

CHUYÊN ĐỀ
CỰC TRỊ HÌNH HỌC

Sưu tầm tổng hợp

CỰC TRỊ HÌNH HỌC

Kiến thức trọng tâm

A-Phương pháp giải bài toán cực trị hình học.

1- Hướng giải bài toán cực trị hình học :

a) Khi tìm vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức f có giá trị lớn nhất ta phải chứng tỏ được :

+Với mọi vị trí của hình H trên miền D thì $f \leq m$ (m là hằng số)

+Xác định vị trí của hình H trên miền D sao cho $f = m$

b) Khi tìm vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức f có giá trị nhỏ nhất ta phải chứng tỏ được :

+Với mọi vị trí của hình H trên miền D thì $f \geq m$ (m là hằng số)

+Xác định vị trí của hình H trên miền D để $f = m$

2 - Cách trình bày lời giải bài toán cực trị hình học .

+ *Cách1* :Trong các hình có tính chất của đề bài, chỉ ra một hình rồi chứng minh mọi hình khác đều có giá trị của đại lượng phải tìm cực trị nhỏ hơn (hoặc lớn hơn) giá trị của đại lượng đó của hình đã chỉ ra.

+ *Cách2* :Biến đổi tương đương điều kiện để đại lượng này đạt cực trị bởi đại lượng khác đạt cực trị cho đến khi trả lời được câu hỏi mà đề bài yêu cầu.

Ví dụ : Cho đường tròn (O) và điểm P nằm trong đường tròn(P không trùng với O).Xác định vị trí của dây đi qua điểm P sao cho dây đó có độ dài nhỏ nhất.

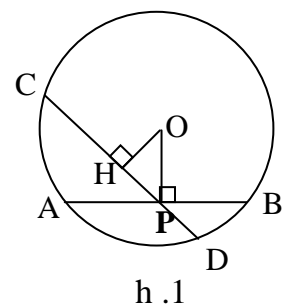
Giải :

+*Cách 1* :

Gọi AB là dây vuông góc với OP tại P , và dây CD là dây bất kỳ đi qua P và không trùng với AB (h.1).

Kẻ $OH \perp CD$.

ΔOHP vuông tại H $\Rightarrow OH < OP \Rightarrow CD > AB$



h.1

Như vậy trong tất cả các dây đi qua P , dây vuông góc với OP tại P có độ dài nhỏ nhất .

+Cách 2 :

Xét dây AB bất kỳ đi qua P (h.2). Kẻ $OH \perp AB$
 Theo liên hệ giữa dây và khoảng cách đến tâm:

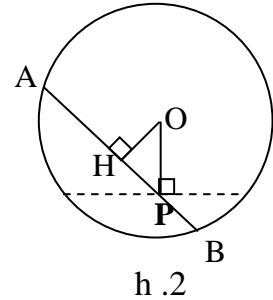
AB nhỏ nhất \Leftrightarrow OH lớn nhất

Ta lại có $OH \leq OP$

$OH = OP \Leftrightarrow H \equiv P$

Do đó $\max OH = OP$

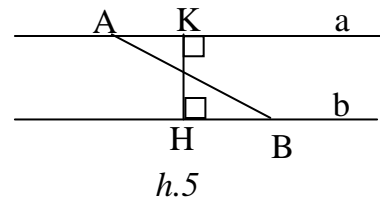
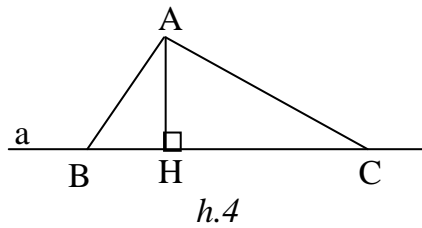
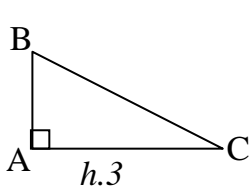
Khi đó dây AB vuông góc với OP tại P.



B-Các kiến thức thường dùng giải bài toán cực trị hình học.

1- Sử dụng quan hệ giữa đường vuông góc , đường xiên , hình chiếu .

a-Kiến thức cần nhớ:



a₁) ΔABC vuông tại A (có thể suy biến thành đoạn thẳng) $\Rightarrow AB \leq BC$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow A \equiv C$. (h.3)

a₂) (h.4)

+ $AH \perp a \Rightarrow AH \leq AB$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow B \equiv H$.

+ $AB < AC \Leftrightarrow HB < HC$

a₃) (h.5)

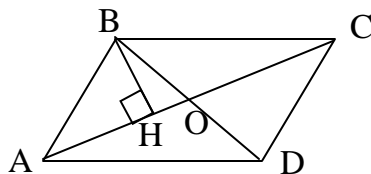
$A, K \in a; B, H \in b; a // b; HK \perp a \Rightarrow HK \leq AB$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow A \equiv K$ và $B \equiv H$.

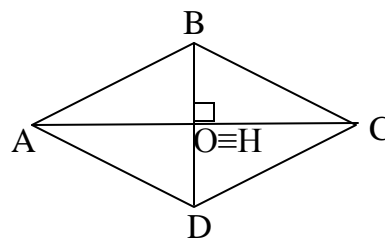
b-Các ví dụ:

Ví dụ 1: Trong các hình bình hành có hai đường chéo bằng 6 cm và 8 cm , hình nào có diện tích lớn nhất ? Tính diện tích lớn nhất đó.

Giải :



h.6



h.7

Xét hình bình hành ABCD có $AC = 8 \text{ cm}$; $BD = 6 \text{ cm}$ (h.6)

Gọi O là giao điểm hai đường chéo . Kẻ $BH \perp AC$.

Ta có : $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = AC.BH$

Ta có $AC = 8 \text{ cm}$, $BH \leq BO = 3 \text{ cm}$. Do đó :

$$S_{ABCD} \leq 8.3 = 24 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$S_{ABCD} = 24 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow BH \equiv BO \Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow BD \perp AC$$

Vậy $\max S_{ABCD} = 24 \text{ cm}^2$. Khi đó hình bình hành ABCD là hình thoi (h.7) có diện tích 24 cm^2 .

Ví dụ 2: Cho hình vuông ABCD . Trên các cạnh AB,BC ,CD,DA ta lấy theo thứ tự các điểm E,F,G,H sao cho $AE = BF = CG = DH$. Xác định vị trí của các điểm E, F,G,H sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất .

Giải :

$$\Delta HAE = \Delta EBF = \Delta FCG = \Delta GHD$$

$$\Rightarrow HE = EF = FG = GH$$

\Rightarrow EFGH là hình thoi .

$$\widehat{AHE} = \widehat{BEF}$$

$$\Rightarrow \widehat{AHE} + \widehat{AEH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BEF} + \widehat{AEH} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{HEF} = 90^\circ$$

\Rightarrow EFGH là hình vuông

Gọi O là giao điểm của AC và EG . Tứ giác

AECG có $AE = CG$, $AE \parallel CG$ nên là hình bình hành suy ra O là trung điểm của AC và EG , do đó O là tâm của cả hai hình vuông ABCD và EFGH.

$$\Delta HOE \text{ vuông cân : } HE^2 = 2OE^2 \Rightarrow HE = OE\sqrt{2}$$

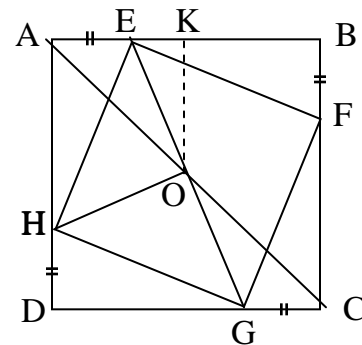
Chu vi EFGH = $4HE = 4\sqrt{2}OE$. Do đó chu vi EFGH nhỏ nhất \Leftrightarrow OE nhỏ nhất

Kẻ $OK \perp AB \Rightarrow OE \geq OK$ (OK không đổi)

$$OE = OK \Leftrightarrow E \equiv K$$

Do đó $\min OE = OK$

Như vậy , chu vi tứ giác EFGH nhỏ nhất khi và chỉ khi E,F,G,H là trung điểm của AB , BC, CD, DA.



h.8

Ví dụ 3: Cho đoạn thẳng AB có độ dài $2a$. Vẽ về một phía của AB các tia Ax và By vuông góc với AB . Qua trung điểm của M của AB có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D . xác định vị trí của các điểm C, D sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất. Tính diện tích tam giác đó.

Giải:

Gọi K là giao điểm của CM và DB

$$MA = MB; \widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ, \widehat{AMC} = \widehat{BMK}$$

$$\Rightarrow \Delta MAC = \Delta MBK \Rightarrow MC = MK$$

Mặt khác $DM \perp CK$

$$\Rightarrow \Delta DCK \text{ cân} \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$$

Kẻ $MH \perp CD$.

$$\Delta MHD = \Delta MBD \Rightarrow MH = MB = a$$

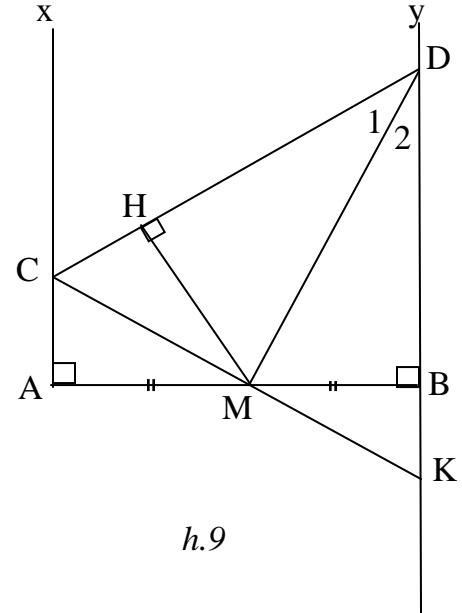
$$\Rightarrow S_{MCD} = \frac{1}{2} CD \cdot MH \geq \frac{1}{2} AB \cdot MH = \frac{1}{2} 2a \cdot a = a^2$$

$$S_{MCD} = a^2 \Leftrightarrow CD \perp Ax \text{ khi đó } \widehat{AMC} = 45^\circ;$$

$$\widehat{BMD} = 45^\circ.$$

Vậy $\min S_{MCD} = a^2$.

Các điểm C, D được xác định trên $Ax; By$ sao cho $AC = BC = a$.



Ví dụ 4: Cho tam giác ABC có \widehat{B} là góc tù, điểm D di chuyển trên cạnh BC . Xác định vị trí của điểm D sao cho tổng các khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AD có giá trị lớn nhất.

Giải:

Gọi S là diện tích ΔABC Khi D di chuyển trên cạnh BC ta có:

$$S_{ABD} + S_{ACD} = S$$

Kẻ $BE \perp AD, CF \perp AD$

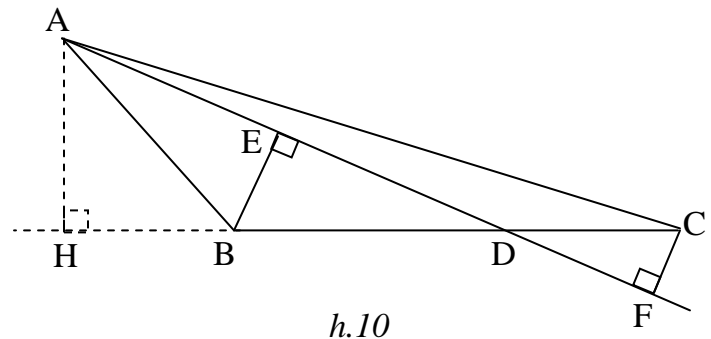
$$\Rightarrow \frac{1}{2} AD \cdot BE + \frac{1}{2} AD \cdot CF = S$$

$$\Rightarrow BE + CF = \frac{2S}{AD}$$

Do đó $BE + CF$ lớn nhất $\Leftrightarrow AD$ nhỏ nhất \Leftrightarrow hình chiếu HD nhỏ nhất

Do $HD \geq HB$ (do $\widehat{ABD} > 90^\circ$) và $HD = HB \Leftrightarrow D \equiv B$

Vậy Khi $D \equiv B$ thì tổng các khoảng cách từ B và C đến AD có giá trị lớn nhất.



ΔCGH vuông tại C có CM là trung tuyến $\Rightarrow CM = 1/2GH$

IK là đường trung bình của $\Delta EFG \Rightarrow IK = 1/2FG$

KM là đường trung bình của $\Delta EGH \Rightarrow KM = 1/2EH$

Do đó : chu vi $EFGH = EF + FG + GH + EH = 2(AI + IK + KM + MC)$

Ta lại có : $AI + IK + KM + MC \geq AC$

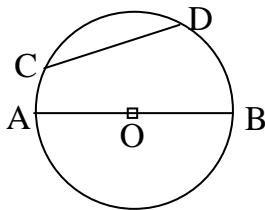
Suy ra chu vi $EFGH \geq 2AC$ (độ dài AC không đổi)

Chu vi $EFGH$ nhỏ nhất bằng $2AC \Leftrightarrow A, I, K, M, C$ thẳng hàng.

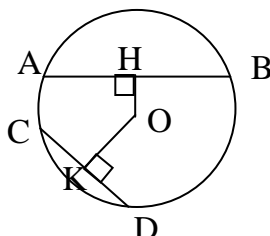
Khi đó ta có $EH // AC, FG // AC, \widehat{AEI} = \widehat{EAI} = \widehat{ADB}$ nên $EF // DB$, tương tự $GH // DB$.Suy ra tứ giác $EFGH$ là hình bình hành có các cạnh song song với các đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$ (h.13).

3- Sử dụng các bất đẳng thức trong đường tròn.

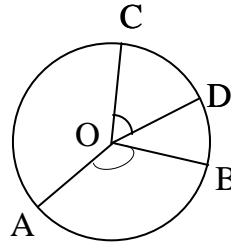
a-Kiến thức cần nhớ:



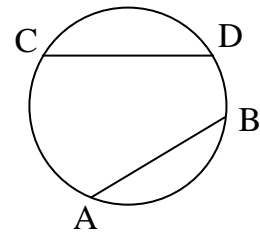
h.14



h.15



h.16



h.17

a1) AB là đường kính , CD là dây bất kỳ $\Rightarrow CD \leq AB$ (h.14)

a2) OH, OK là các khoảng cách từ tâm đến dây AB và CD :

$$AB \geq CD \Leftrightarrow OH \leq OK \text{ (h.15)}$$

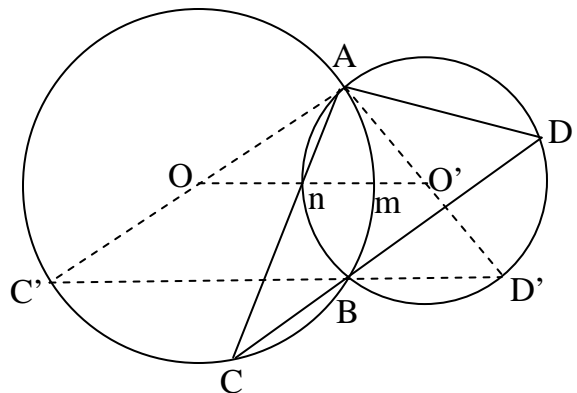
a3) AB, CD là các cung nhỏ của (O) : $AB \geq CD \Leftrightarrow \widehat{AOB} \geq \widehat{COD}$ (h.16)

a4) AB, CD là các cung nhỏ của (O) : $AB \geq CD \Leftrightarrow \widehat{AB} \geq \widehat{CD}$ (h.17)

b-Các ví dụ:

Ví dụ 7: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B . một cát tuyến chung bất kỳ CBD (B nằm giữa C và D) cắt các đường tròn (O) và (O') tại C và D . Xác định vị trí của cát tuyến CBD để ΔACD có chu vi lớn nhất.

Giải:



h.18

$$\text{sđ } \widehat{C} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AmB} ; \text{sđ } \widehat{D} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AnB}$$

⇒ số đo các góc ΔACD không đổi

⇒ ΔACD có chu vi lớn nhất khi một cạnh của nó lớn nhất, chẳng hạn AC là lớn nhất.

AC là dây của đường tròn (O), do đó AC lớn nhất khi AC là đường kính của đường tròn (O), khi đó AD là đường kính của đường tròn (O'). Cát tuyến CBD ở vị trí C'BD' vuông góc với dây chung AB.

Ví dụ 8: Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm trong đường tròn. Xác định dây AB đi qua P sao cho \widehat{OAB} có giá trị lớn nhất.

Giải:

Xét tam giác cân OAB, góc ở đáy \widehat{OAB} lớn nhất nếu góc ở đỉnh \widehat{AOB} nhỏ nhất.

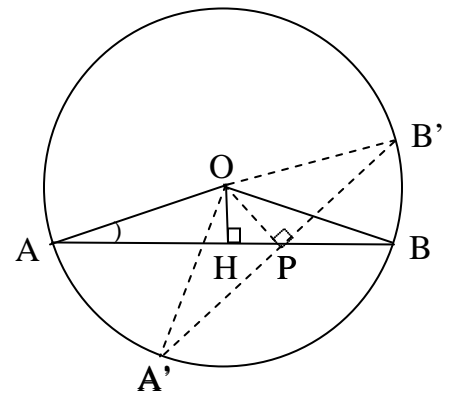
$$\widehat{AOB} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AB}$$

Góc \widehat{AOB} nhỏ nhất \Leftrightarrow Cung \widehat{AB} nhỏ nhất \Leftrightarrow dây AB nhỏ nhất \Leftrightarrow Khoảng cách đến tâm OH lớn nhất.

Ta có $OH \leq OP$

$OH = OP \Leftrightarrow H \equiv P$ nên $\max OH = OP \Leftrightarrow AB \perp OP$

Suy ra dây AB phải xác định là dây A'B' vuông góc với OP tại P.



h.19

4- Sử dụng bất đẳng thức về lũy thừa bậc hai.

a-Kiến thức cần nhớ:

Các bất đẳng thức về lũy thừa bậc hai được sử dụng dưới dạng :

$$A^2 \geq 0 ; -A^2 \leq 0$$

Do đó với m là hằng số, ta có :

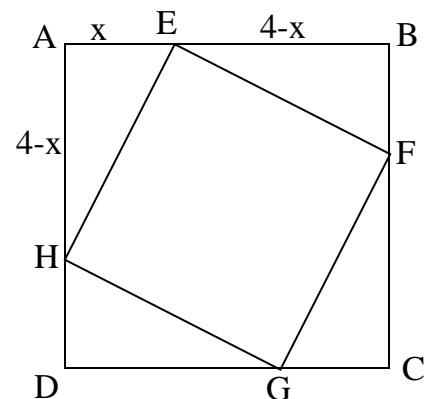
$$f = A^2 + m \geq m ; \min f = m \text{ với } A = 0$$

$$f = -A^2 + m \leq m ; \max f = m \text{ với } A = 0$$

b-Các ví dụ:

Ví dụ 9: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 4cm. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA, lấy theo thứ tự các điểm E, F, G, H sao cho $AE = BF = CG = DH$. Tính độ dài AE sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất.

Giải:



h.20

$$\Delta AHE = \Delta BEF = \Delta CFG = \Delta DGH$$

$$\Rightarrow HE = EF = FG = GH, \angle HEF = 90^\circ$$

\Rightarrow HEFG là hình vuông nên chu vi EFGH nhỏ nhất khi HE nhỏ nhất.

$$\text{Đặt } AE = x \text{ thì } HA = EB = 4 - x$$

ΔHAE vuông tại A nên:

$$HE^2 = AE^2 + HA^2 = x^2 + (4 - x)^2 = 2x^2 - 8x + 16 = 2(x - 2)^2 + 8 \geq 8$$

$$HE = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2$$

Chu vi tứ giác EFGH nhỏ nhất bằng $8\sqrt{2}$ cm, khi đó $AE = 2$ cm.

Ví dụ 10: Cho tam giác vuông ABC có độ dài các cạnh góc vuông $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. M là điểm di chuyển trên cạnh huyền BC. Gọi D và E là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC. Tính diện tích lớn nhất của tứ giác ADME.

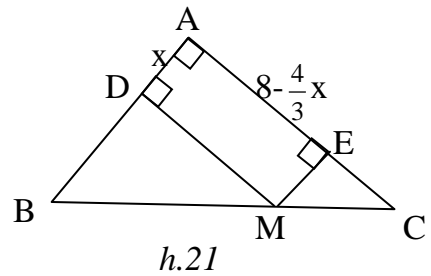
Giải:

ADME là hình chữ nhật.

$$\text{Đặt } AD = x \text{ thì } ME = x$$

$$ME \parallel AB \Rightarrow \frac{EM}{AB} = \frac{CE}{CA} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{CE}{8} \Rightarrow CE = \frac{4}{3}x$$

$$\Rightarrow AE = 8 - \frac{4}{3}x$$



$$\text{Ta có: } S_{ADME} = AD \cdot AE = x \left(8 - \frac{4}{3}x \right) = 8x - \frac{4}{3}x^2$$

$$= -\frac{4}{3}(x - 3)^2 + 12 \leq 12$$

$$S_{ADME} = 12 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow x = 3$$

Diện tích lớn nhất của tứ giác ADME bằng 12 cm^2 , khi đó D là trung điểm của AB, M là trung điểm của BC và E là trung điểm của AC.

5- Sử dụng bất đẳng thức Cô-si.

a-Kiến thức cần nhớ:

Bất đẳng thức Cô-si: Với $x \geq 0; y \geq 0$ ta có: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Bất đẳng thức Cô-si thường được sử dụng dưới các dạng sau:

+ Dạng 1: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \geq 2xy$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

+ Dạng 2: $\frac{(x+y)^2}{xy} \geq 4$; $\frac{xy}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{4}$

$\frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} \leq 2$; $\frac{x^2 + y^2}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

+ Dạng 3: Với $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + y$ không đổi thì xy lớn nhất khi và chỉ khi $x = y$

+ Dạng 4: Với $x \geq 0$; $y \geq 0$; xy không đổi thì $x + y$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = y$

b-Các ví dụ:

Ví dụ 11: Cho đoạn thẳng AB , điểm M di chuyển trên đoạn thẳng ấy . Vẽ các đường tròn có đường kính MA và MB . Xác định vị trí của điểm M để tổng diện tích của hai hình tròn có giá trị nhỏ nhất .

Giải :

Đặt $MA = x$, $MB = y$

Ta có : $x + y = AB$ ($0 < x, y < AB$)

Gọi S và S' theo thứ tự là diện tích của hai hình tròn có đường kính là MA và MB .

Ta có :

$$S + S' = \pi \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \pi \left(\frac{y}{2} \right)^2 = \pi \cdot \frac{x^2 + y^2}{4}$$

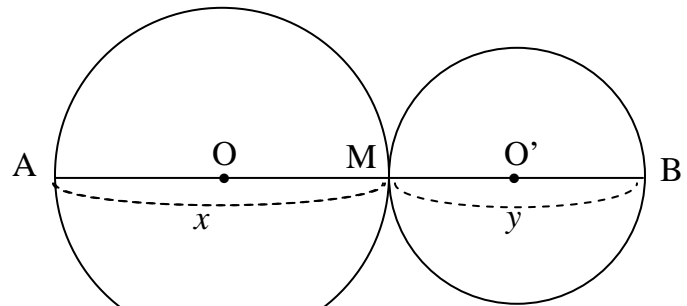
Ta có bất đẳng thức : $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$ nên :

$$S + S' \geq \pi \cdot \frac{(x+y)^2}{8} = \pi \cdot \frac{AB^2}{8}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Do đó $\min(S + S') = \pi \cdot \frac{AB^2}{8}$. Khi đó M là trung điểm của AB .

Ví dụ 12: Cho điểm M nằm trên đoạn thẳng AB . Vẽ về một phía của AB các tia Ax và By vuông góc với AB . Qua M có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc



h.22

với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D . Xác định vị trí của các điểm C, D sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất.

Giải:

$$\text{Ta có: } S_{MCD} = \frac{1}{2} MC \cdot MD$$

$$\text{Đặt } MA = a, MB = b$$

$$\widehat{AMC} = \widehat{BDM} = \alpha$$

$$MC = \frac{a}{\cos \alpha}, MD = \frac{b}{\sin \alpha}$$

$$S_{MCD} = \frac{1}{2} \frac{ab}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}$$

Do a, b là hằng số nên S_{MCD} nhỏ nhất $\Leftrightarrow 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ lớn nhất.

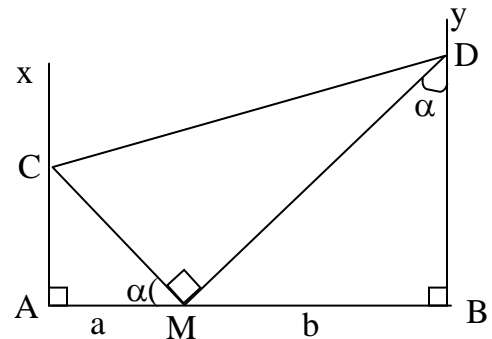
Theo bất đẳng thức $2xy \leq x^2 + y^2$ ta có:

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \leq \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ nên } S_{MCD} \geq ab$$

$$S_{MCD} = ab \Leftrightarrow \sin \alpha = \cos \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$$

$\Leftrightarrow \Delta AMC$ và ΔBMD vuông cân.

Vậy $\min S_{MCD} = ab$. Khi đó các điểm C, D được xác định trên tia $Ax; By$ sao cho $AC = AM, BD = BM$.



h.23

Ví dụ 13: Cho ΔABC , điểm M di động trên cạnh BC . Qua M kẻ các đường thẳng song song với AC và với AB , chúng cắt AB và AC theo thứ tự ở D và E . Xác định vị trí của điểm M sao cho hình bình hành $ADME$ có diện tích lớn nhất.

Giải:

$$S_{ADME} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \frac{S_{ADME}}{S_{ABC}} \text{ lớn nhất}$$

Kẻ $BK \perp AC$ cắt MD ở H .

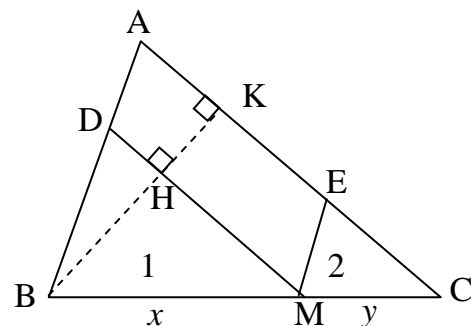
$$S_{ADME} = MD \cdot HK$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK$$

$$\frac{S_{ADME}}{S_{ABC}} = 2 \cdot \frac{MD}{AC} \cdot \frac{HK}{BK}$$

Đặt $MB = x, MC = y,$

$$MD \parallel AC \text{ ta có: } \frac{MD}{AC} = \frac{BM}{BC} = \frac{x}{x+y}; \quad \frac{HK}{BK} = \frac{MC}{BC} = \frac{y}{x+y}$$



h.24

Theo bất đẳng thức $\frac{xy}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S_{ADME}}{S_{ABC}} = \frac{2xy}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y$

Vậy $\max S_{ADME} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ khi đó M là trung điểm của BC.

Ví dụ 14: Cho ΔABC vuông cân có cạnh huyền $BC = a$. Gọi D là trung điểm của AB. Điểm E di chuyển trên cạnh AC. Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D, E đến BC. Tính diện tích lớn nhất của hình thang DEKH. Khi đó hình thang trở thành hình gì ?

Giải:

Ta có :

$$2S_{DEKH} = (DH + EK).HK = (BH + KC) .HK$$

Mà $(BH + KC) + HK = BC = a$ không đổi

Nên $(BH + KC) .HK$ lớn nhất $\Leftrightarrow (BH + KC) = HK = \frac{a}{2}$

Do đó :

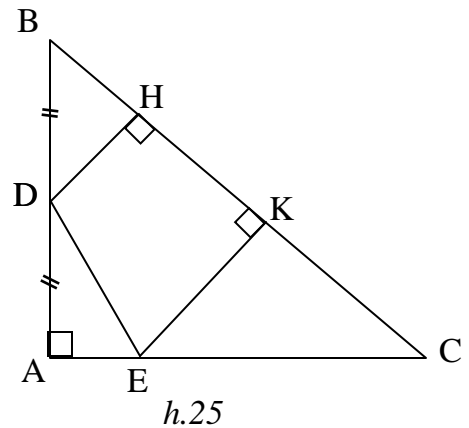
$$\max S_{DEKH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$$

Khi đó đường cao $HK = \frac{a}{2}$ suy ra :

$$KC = BC - BH - HK = a - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{4}$$

Do đó $DH = HB = \frac{a}{4}$, $EK = KC = \frac{a}{4}$.

Hình thang DEKH là hình chữ nhật, E là trung điểm của AC.



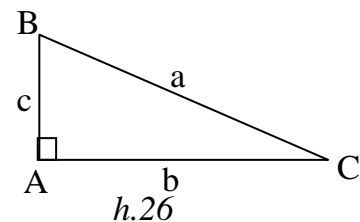
6- Sử dụng tỉ số lượng giác.

a-Kiến thức cần nhớ:

Hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông

$$+ b = a.\sin B = a.\cos C$$

$$+ b = c.\operatorname{tg} B = c.\operatorname{cotg} C$$

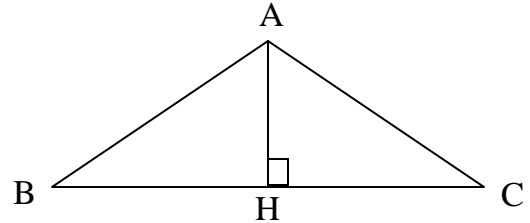


b-Các ví dụ:

Ví dụ 15: Chứng minh rằng trong các tam giác cân có cùng diện tích tam giác có cạnh đáy nhỏ hơn là tam giác có góc ở đỉnh nhỏ hơn.

Giải:

Xét các tam giác ABC cân tại A có cùng diện tích S. Kẻ đường cao AH. Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$



ΔAHC vuông tại H, ta có :

$$\widehat{HAC} = \frac{\alpha}{2},$$

$$AH = HC \cdot \cotg \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} BC \cdot \cotg \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Do đó : } S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} BC \cdot \frac{1}{2} BC \cdot \cotg \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} BC^2 \cotg \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{\frac{4S}{\cotg \frac{\alpha}{2}}} = 2\sqrt{S \cdot \tg \frac{\alpha}{2}}$$

Do S không đổi nên :

BC nhỏ nhất $\Leftrightarrow \tg \frac{\alpha}{2}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \alpha$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \widehat{BAC}$ nhỏ nhất

Ví dụ 16: Cho hình chữ nhật ABCD. Trên các cạnh BC, CD lần lượt lấy các điểm K, M sao cho $BK : KC = 4 : 1$, $CM : MD = 4 : 1$. Tìm tỉ số $AB : BC$ để số đo góc \widehat{KAM} lớn nhất.

(Cho công thức biến đổi $\tg(x+y) = \frac{\tg x + \tg y}{1 - \tg x \cdot \tg y}$)

Giải:

Đặt $\widehat{BAK} = x$, $\widehat{DAM} = y$ ($x + y < 90^\circ$)

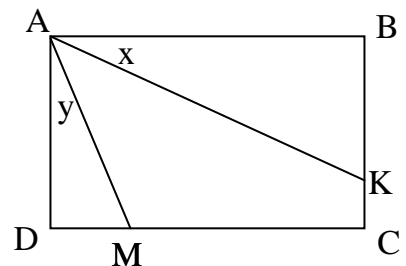
\widehat{KAM} lớn nhất $\Leftrightarrow \widehat{BAK} + \widehat{DAM}$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow x + y$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \tan(x+y)$ nhỏ nhất

Giả sử $AB : BC = 1 : m$ ($m > 0$)

$$\tg x = \frac{BK}{AB} = \frac{BK}{BC} \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{4m}{5}$$

$$\tg y = \frac{DM}{AD} = \frac{DM}{DC} \cdot \frac{DC}{AD} = \frac{1}{5m}$$



$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y} = \left(\frac{4m}{5} + \frac{1}{5m} \right) : \left(1 - \frac{4m}{5} \cdot \frac{1}{5m} \right) = \frac{25}{21} \left(\frac{4m}{5} + \frac{1}{5m} \right)$$

$$\operatorname{tg}(x+y) \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \frac{4m}{5} + \frac{1}{5m} \text{ nhỏ nhất}$$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{4m}{5} + \frac{1}{5m} \geq 2\sqrt{\frac{4m}{5} \cdot \frac{1}{5m}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{4m}{5} = \frac{1}{5m} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Vậy $x+y$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $m = \frac{1}{2}$

Do đó \widehat{KAM} lớn nhất khi và chỉ khi $AB : BC = 2 : 1$

Phần 3: Bài tập ôn luyện

Bài 1 : Cho hình vuông ABCD . Hãy xác định đường thẳng d đi qua tâm hình vuông sao cho tổng các khoảng cách từ bốn đỉnh của hình vuông đến đường thẳng đó là :

- a) Lớn nhất
- b) Nhỏ nhất

Hướng dẫn:

Xét trường hợp d cắt hai cạnh đối BC và AD (h.29)

Gọi m là tổng các khoảng cách từ bốn đỉnh hình vuông đến d.

$$m = 2(AA' + BB')$$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và A'B'

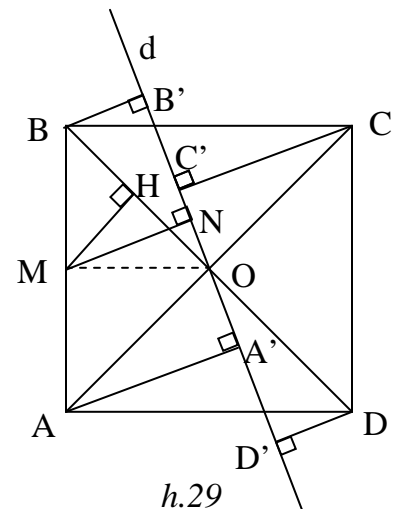
Suy ra : $m = 4MN$ do đó:

m lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ lớn nhất

m nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN$ nhỏ nhất

a) $MN \leq MO \Rightarrow m$ lớn nhất $\Leftrightarrow M=O \Leftrightarrow d // AB$

b) kẻ $MH \perp OB$. Chứng minh $MN \geq MH \Rightarrow MN$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow N=H \Leftrightarrow d=BD$ hoặc $d=AC$.



Bài 2 : Cho ΔABC vuông cân tại A các điểm D,E theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB, AC sao cho $BD = AE$. Xác định vị trí các điểm D,E sao cho :

- DE có độ dài nhỏ nhất .
- Tứ giác BDEC có diện tích lớn nhất .

Hướng dẫn: (h.30)

a) Gọi M là trung điểm của BC .

$$\Delta BDM = \Delta AEM \Rightarrow \widehat{BMD} = \widehat{AME}$$

$$\Rightarrow \widehat{DME} = \widehat{DMA} + \widehat{AME} = \widehat{DMA} + \widehat{BMD} = \widehat{BMA} = 90^\circ$$

Gọi I là trung điểm của DE .

$$DE = DI + IE = AI + IM \geq AM$$

Min $DE = AM \Leftrightarrow I$ là trung điểm của AM

$\Leftrightarrow D$ là trung điểm của AB và E là trung điểm của AC

b) Đặt $AE = x, AB = AC = a$ thì $AD = a - x, S_{ADE} = \frac{x(a-x)}{2}$

S_{BDEC} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S_{ADE}$ lớn nhất $\Leftrightarrow x(a-x)$ lớn nhất

Do $x + (a-x) = a$ không đổi nên $x(a-x)$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = a-x \Leftrightarrow x = a/2$

Khi đó D là trung điểm của AB và E là trung điểm của AC

Bài 3 : Cho ΔABC vuông tại A có $BC = a$, diện tích là S. Gọi m là trung điểm của BC. Hai đường thẳng thay đổi qua M và vuông góc với nhau cắt các cạnh AB, AC ở D, E. Tìm :

- Giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng DE .
- Giá trị nhỏ nhất của diện tích ΔMDE

Hướng dẫn:

a) (h.31) Gọi O là trung điểm của DE

Ta có $OA = OD = OE = OM$

$$\Rightarrow DE = OA + OM \geq AM = \frac{a}{2}$$

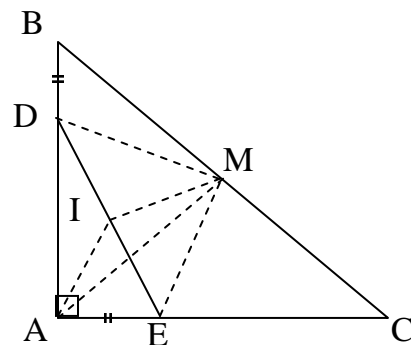
min $DE = a/2 \Leftrightarrow O$ là trung điểm của AM

$\Leftrightarrow D$ là trung điểm của AB và E là trung điểm của AC

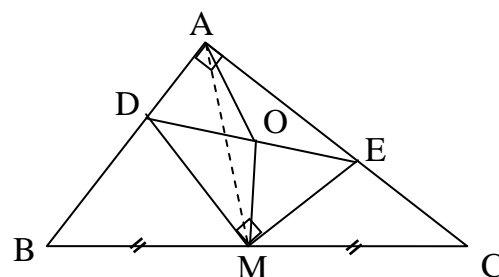
b) (h.32) Kẻ $MH \perp AB, MK \perp AC$

$ME \geq MK, MD \geq MH$.

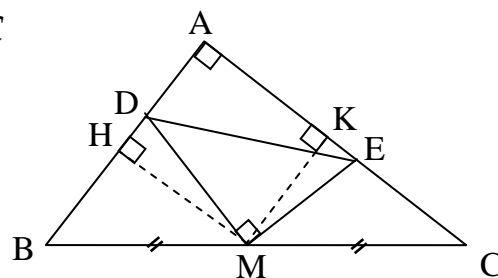
$$2S_{MDE} = MD \cdot ME \geq MH \cdot MK = \frac{AC}{2} \cdot \frac{AB}{2} = \frac{S}{2}$$



h.30



h.31



h.32

$$\min S_{MDE} = \frac{S}{4} \Leftrightarrow D \equiv H \text{ và } E \equiv K$$

Bài 4 : Cho điểm m di chuyển trên đoạn thẳng AB . Vẽ các tam giác đều AMC và BMD về một phía của AB . Xác định vị trí của M để tổng diện tích hai tam giác đều trên là nhỏ nhất .

Hướng dẫn: (h.33)

Gọi K là giao điểm của AC và BD .

Các tam giác AMC , BMD đồng dạng với ΔAKB

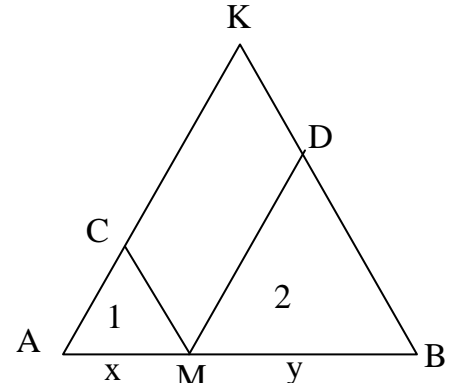
Đặt $AM = x , BM = y , AB = a$ ta có :

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{x}{a}\right)^2 ; \frac{S_2}{S} = \left(\frac{y}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{x^2 + y^2}{a^2} \geq \frac{(x + y)^2}{2a^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Do đó : $\min (S_1 + S_2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB.



h.33

Bài 5 : Cho tam giác nhọn ABC có các cạnh a,b,c tương ứng đường cao AH =H. Hãy dựng hình chữ nhật MNPQ nội tiếp trong tam giác ABC sao cho nó có diện tích lớn nhất . Biết $M \in AB ; N \in AC ; P, Q \in BC$.

Hướng dẫn: (h.34)

Gọi I là giao điểm của AH và MN

Đặt $NP = x ; MN = y ; AI = h - x$

$\Delta AMN \sim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AI}{AH} \Rightarrow \frac{y}{a} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow y = a \cdot \frac{h-x}{h}$$

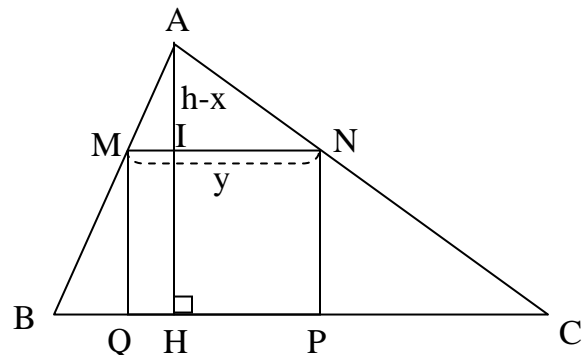
$$\Rightarrow S_{MNPQ} = xy = \frac{a}{h} \cdot x(h-x)$$

$\Rightarrow S_{MNPQ}$ lớn nhất $\Leftrightarrow x(h-x)$ lớn nhất

$x + (h-x) = h$ không đổi nên

$x(h-x)$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = h-x \Leftrightarrow x = h/2$

Khi đó MN là đường trung bình của ΔABC



h.34

Bài 6 : Cho ΔABC vuông tại A . Từ một điểm I nằm trong tam giác ta kẻ $IM \perp BC, IN \perp AC, IK \perp AB$. Tìm vị trí của I sao cho tổng $IM^2 + IN^2 + IK^2$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn: (h.35)

Kẻ $AH \perp BC, IE \perp AH$

$ANIK, IMHE$ là các hình chữ nhật.

$$IK^2 + IN^2 = IK^2 + AK^2 = AI^2 \geq AE^2$$

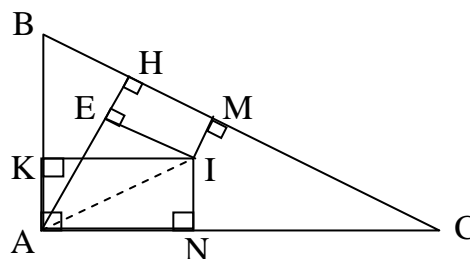
$$IM = EH$$

$$\text{nên } IK^2 + IN^2 + IM^2 = AI^2 + EH^2 \geq AE^2 + EH^2$$

$$\text{Đặt } AE = x, EH = y \text{ ta có : } x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{AH^2}{2}$$

$$\Rightarrow IK^2 + IN^2 + IM^2 \geq \frac{AH^2}{2} .$$

Dấu “=” xảy ra khi I là trung điểm của đường cao AH.



h.35

Bài 7 : Cho tam giác nhọn ABC . Từ một điểm I nằm trong tam giác ta kẻ $IM \perp BC, IN \perp AC, IK \perp AB$. Đặt $AK = x; BM = y; CN = z$.

Tìm vị trí của I sao cho tổng $x^2 + y^2 + z^2$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn: (h.36)

Đặt $BK = k, CM = m, AN = n,$

$$BC = a, AC = b, AB = c .$$

$$x^2 + y^2 + z^2 =$$

$$= (IA^2 - IK^2) + (IB^2 - IM^2) + (IC^2 - IN^2)$$

$$= (IA^2 - IN^2) + (IB^2 - IK^2) + (IC^2 - IM^2) = n^2 + k^2 + m^2$$

$$\Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) = x^2 + y^2 + z^2 + n^2 + k^2 + m^2$$

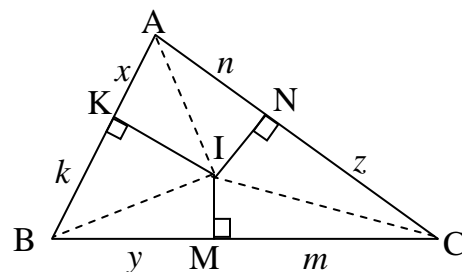
$$= (x^2 + k^2) + (y^2 + m^2) + (z^2 + n^2)$$

$$x^2 + k^2 \geq \frac{(x+k)^2}{2} = \frac{AB^2}{2} = \frac{c^2}{2}$$

$$y^2 + m^2 \geq \frac{(y+m)^2}{2} = \frac{BC^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$z^2 + n^2 \geq \frac{(z+n)^2}{2} = \frac{AC^2}{2} = \frac{b^2}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} .$$



h.36

$$\min(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \Leftrightarrow x = k, y = m, z = n.$$

$\Leftrightarrow I$ là giao điểm của các đường trung trực của ΔABC .

Bài 8 : Cho nửa đường tròn có đường kính $AB = 10$ cm .Một dây CD có độ dài 6cm có hai đầu di chuyển trên nửa đường tròn . Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu của A và B trên CD . Tính diện tích lớn nhất của tứ giác $ABFE$.

Hướng dẫn: (h.37)

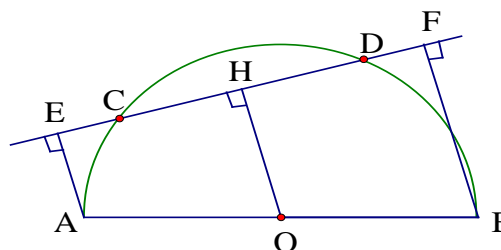
Kẻ $OH \perp CD$, ta tính được $OH = 4$ cm

$$S_{ABFE} = 1/2(AE + BF).EF$$

$$= OH.EF \leq OH. AB = 4.10 = 40$$

$$\max S_{ABFE} = 40 \text{ cm}^2$$

$\Leftrightarrow EF \parallel AB$, khi đó $OH \perp AB$



h 37

Bài 9 : Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a .Vẽ cung BD tâm A bán kính a (nằm trong hình vuông) .một tiếp tuyến bất kỳ với cung đó cắt BC, CD theo thứ tự ở M và N . Tính độ dài nhỏ nhất của MN .

Hướng dẫn:(h.38)

$$\text{Đặt } CM = m, CN = n, MN = x$$

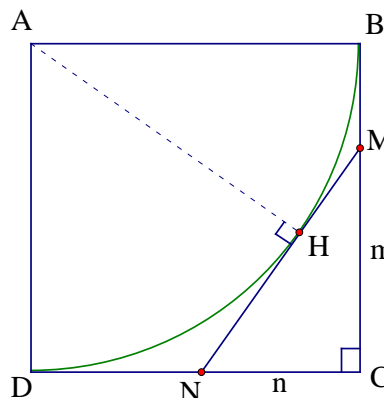
$$m + n + x = 2CD = 2a \text{ và } m^2 + n^2 = x^2$$

$$\text{Do đó : } x^2 = m^2 + n^2 \geq \frac{(m+n)^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 \geq (2a - x)^2 \Rightarrow x\sqrt{2} \geq 2a - x$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{2a}{\sqrt{2} + 1} = 2a(\sqrt{2} - 1)$$

$\min MN = 2a(\sqrt{2} - 1) \Leftrightarrow m = n$. Khi đó tiếp tuyến $MN \parallel BD$, AM là tia phân giác của \widehat{BAC} , AN là phân giác của \widehat{DAC}



h.38

Bài 10 : Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A .Qua A vẽ hai tia vuông góc với nhau, chúng cắt các đường tròn (O) , (O') lần lượt tại B và C . Xác định vị trí của các tia đó để ΔABC có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn:(h.39)

Kẻ $OD \perp AB$; $O'E \perp AC$ ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2AD \cdot 2AE = 2 \cdot AD \cdot AE$$

Đặt $OA = R$; $O'A = r$; $\widehat{AOD} = \widehat{O'AE} = \alpha$

$$AD = R \sin \alpha; AE = r \cos \alpha$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = Rr \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

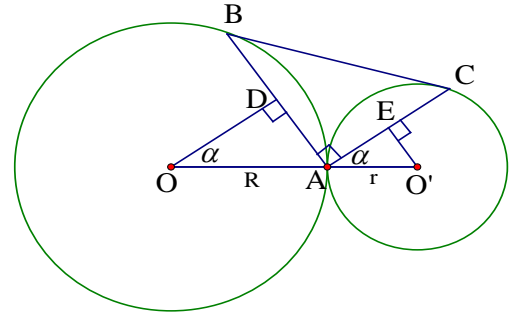
$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \leq \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow S_{ABC} \leq Rr$$

Do đó:

$$\max S_{ABC} = Rr \Leftrightarrow \sin \alpha = \cos \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Vậy nếu ta vẽ các tia AB, AC lần lượt tạo với các tia AO, AO' thành các góc $\widehat{OAB} = \widehat{O'AC} = 45^\circ$ thì ΔABC có diện tích lớn nhất.



h.39

Bài 11 : Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính BC , A là một điểm di động trên đường tròn. Vẽ tam giác đều ABM có A và M nằm cùng phía đối với BC . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C xuống MB . Gọi D, E, F, G theo thứ tự là trung điểm của OC, CM, MH, OH . Xác định vị trí của điểm A để diện tích tứ giác $DEFG$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn: (h.40)

$DEFG$ là hình bình hành.

Kẻ $OI \perp FH$, ta có OI là đường trung bình của ΔBHC nên $OI = \frac{1}{2} HC = GD$

MO là đường trung trực của AB nên

$$\widehat{IMO} = 30^\circ \Rightarrow OI = \frac{1}{2} OM \Rightarrow GD = \frac{1}{2} OM$$

$$\text{Mà } ED = \frac{1}{2} OM \Rightarrow EG = GD$$

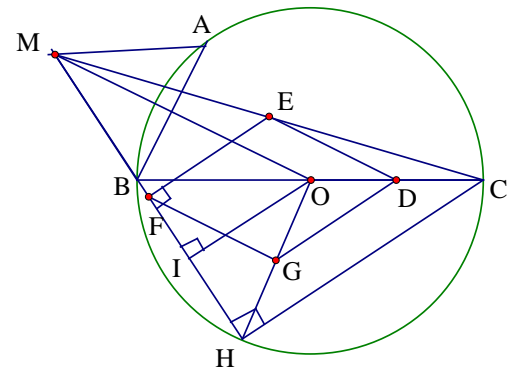
$\Rightarrow DEFG$ là hình thoi

$$\widehat{HFG} = \widehat{HMO} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{EFG} = 60^\circ \Rightarrow \Delta EFG \text{ đều}$$

$$\Rightarrow S_{DEFG} = 2S_{EFG} = 2 \cdot \frac{EF^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{EF^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\left(\frac{HC}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{2} \leq \frac{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\max S = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow H \equiv B \Leftrightarrow \widehat{MBC} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ABC} = 30^\circ \Leftrightarrow AC = R.$$



h.40

Bài 12 : Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) D là điểm bất kỳ thuộc cung BC không chứa A và không trùng với B,C. Gọi H,I,K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D đến các đường thẳng BC, AC, AB. Đặt $BC = a, AC = b, AB = c, DH = x, DI = y, DK = z$.

a) Chứng minh rằng : $\frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{a}{x}$

b) Tìm vị trí của điểm D để tổng $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ nhỏ nhất .

Hướng dẫn: (h.41)

a) Lấy E trên BC sao cho $\widehat{CDE} = \widehat{ADB}$

ΔCDE đồng dạng với ΔADB

$$\Rightarrow \frac{DH}{DK} = \frac{CE}{AB} \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{CE}{c} \Rightarrow \frac{c}{z} = \frac{CE}{x}$$

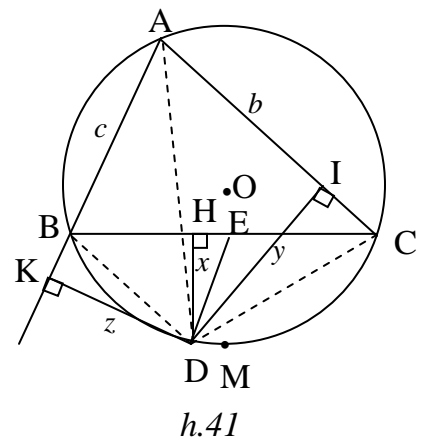
Tương tự ΔBDE đồng dạng với ΔADC

$$\Rightarrow \frac{DH}{DI} = \frac{BE}{AC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{BE}{b} \Rightarrow \frac{b}{y} = \frac{BE}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{BE + CE}{x} = \frac{a}{x}$$

b) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{a}{x} + \frac{a}{x} = \frac{2a}{x}$ Do đó S nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{a}{x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x$ lớn nhất \Leftrightarrow

$D \equiv M$ (M là điểm chính giữa của cung BC không chứa A)



Bài 13 : Cho ΔABC nhọn , điểm M di chuyển trên cạnh BC .Gọi P ,Q là hình chiếu của M trên AB , AC . Xác định vị trí của điểm M để PQ có độ dài nhỏ nhất .

Hướng dẫn: (h.42)

Tứ giác APMQ là tứ giác nội tiếp . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ.

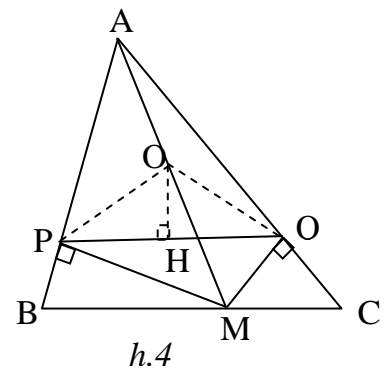
Kẻ $OH \perp PQ$. Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$ thì $\widehat{POH} = \alpha$

$$PQ = 2 PH = 2.OP \sin \alpha = AM \sin \alpha$$

Do α không đổi nên

$$PQ \text{ nhỏ nhất } \Leftrightarrow AM \text{ nhỏ nhất } \Leftrightarrow AM \perp BC.$$

Bài 14 : Cho đoạn thẳng AB và một điểm C trên AB .Vẽ trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB các nửa đường tròn có đường kính AB,AC,BC . Xác định



vị trí của điểm C trên đoạn AB để diện tích phần giới hạn bởi ba nửa đường tròn đó đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn: (h.43)

Gọi $(O_1;r_1);(O_2;r_2);(O_3;r_3)$ là các đường tròn có đường kính là Ab,AC,BC

Đặt $AB = 2a, AC = 2x$ thì $r_1 = a, r_2 = x$ Suy ra $BC = 2a - 2x$ và $r_3 = a - x$

Gọi S là diện tích giới hạn bởi ba đường tròn

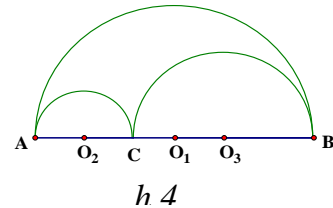
$$Ta\ có : S = \frac{\pi r_1^2}{2} - \left(\frac{\pi r_2^2}{2} + \frac{\pi r_3^2}{2} \right) = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi x^2}{2} - \frac{\pi (a-x)^2}{2} = \pi x(a-x)$$

S lớn nhất $\Leftrightarrow x(a-x)$ lớn nhất

Mặt khác $x + (a-x) = a$ không đổi nên

$$x(a-x) \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow x = a-x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow C \equiv O_1$$

$$Lúc\ đó\ ta\ có\ S = \frac{\pi a^2}{4}$$



Bài 15 : Cho đường tròn $(O;R)$. Trong đường tròn (O) vẽ hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài nhau và tiếp xúc trong với (O) trong đó bán kính đường tròn (O_2) gấp đôi bán kính đường tròn (O_1) . Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài các hình tròn (O_1) và (O_2) .

Hướng dẫn:

Gọi x là bán kính đường tròn (O_1) Khi đó 2x là bán kính đường tròn (O_2) (h.44)

Xét ΔOO_1O_2 ta có : $O_1O_2 \leq OO_1 + OO_2$

$$\Rightarrow 3x \leq (R-x) + (R-2x) \Rightarrow 6x \leq 2R \Rightarrow x \leq \frac{R}{3}$$

Gọi S là phần diện tích hình tròn (O) nằm ngoài các đường tròn (O_1) và (O_2) , ta có :

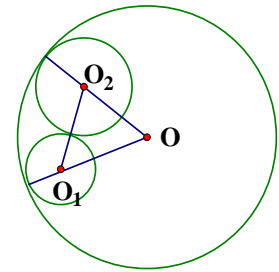
$$S = \pi R^2 - \pi x^2 - \pi 4x^2 = \pi (R^2 - 5x^2)$$

$$Do\ x \leq \frac{R}{3}\ \text{nên}\ x^2 \leq \frac{R^2}{9} \Rightarrow S \geq \frac{4\pi R^2}{9};$$

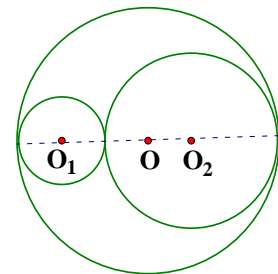
$$\min S = \frac{4\pi R^2}{9} \Leftrightarrow x = \frac{R}{3}$$

Khi đó O_1, O, O_2 thẳng hàng và bán kính các đường tròn

(O_1) và (O_2) là $\frac{R}{3}$ và $\frac{2R}{3}$ (h.45).



h.44



h.45

Bài 16: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1 , điểm M nằm trên đường chéo BD .

a) Nêu cách dựng đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với hai cạnh AD và CD. Nêu cách dựng đường tròn (K) đi qua M và tiếp xúc với hai cạnh AB,BC.

b) Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên đường chéo BD thì tổng chu vi hai đường tròn không đổi .

c) Xác định vị trí của điểm M trên BD để tổng diện tích của hai hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất .

a) Qua M kẻ đường vuông góc với BD cắt AB,BC,CD,DA tại P,Q,F,E .

Do AB,BC tiếp xúc với (K) nên $K \in MB$

$PQ \perp KM$ nên PQ là tiếp tuyến của (K)

Vậy (K) là đường tròn nội tiếp ΔPBQ

Tương tự (I) là đường tròn nội tiếp ΔEDF (2 đ)

b) Tổng chu vi hai đường tròn (I) và (K) bằng:

$$2\pi \cdot IM + 2\pi \cdot MK = 2\pi \cdot IK$$

$$MD = ID + IM = \sqrt{2} \cdot IJ + IM = \sqrt{2} \cdot IM + IM = (\sqrt{2} + 1) \cdot IM$$

$$MB = KB + MK$$

$$= \sqrt{2} \cdot KH + KM = \sqrt{2} \cdot KM + KM = (\sqrt{2} + 1) \cdot KM$$

$$\Rightarrow BD = MD + MB = (\sqrt{2} + 1)(IM + MK) = (\sqrt{2} + 1)IK$$

$$\Rightarrow IK = \frac{BD}{\sqrt{2} + 1} = BD(\sqrt{2} - 1) \text{ Do } BD = AB\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow IK = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$

Vậy tổng chu vi hai đường tròn bằng $2\pi(2 - \sqrt{2})$ (4 đ)

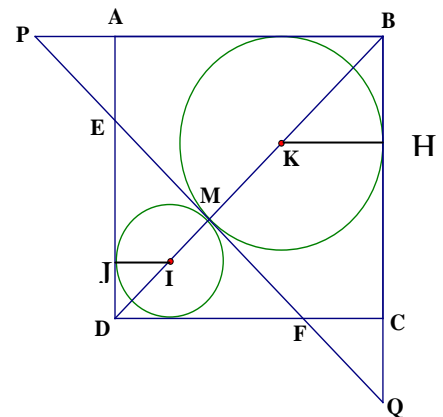
c) Gọi x và y là bán kính các đường tròn (I) và (K)

$$\text{Ta có : } x + y = 2 - \sqrt{2}$$

Gọi S_1, S_2 là diện tích các hình tròn trên

$$S_1 + S_2 = \pi x^2 + \pi y^2 = \pi(x^2 + y^2) \geq \pi \frac{(x+y)^2}{2} = \pi \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}$$

$$S_1 + S_2 \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow M \text{ là trung điểm của } BD. \text{ (4đ)}$$



h.46

Bài toán cực trị Phần hình học

I. Một số kiến thức cơ bản.

- a) - Ta chứng minh được $A \geq m$ (m không đổi)
 - Có một hình sao cho $A = m$ thì GTNN của A là m
- b) Ta chứng minh được $A \leq t$ (t không đổi)
 - Có một hình sao cho $A = t$ thì GTLN của A là t
 - Từ đó ta xác định được vị trí của các điểm để đạt được cực trị.

II. Phân loại bài tập và ví dụ minh họa :

1) Tìm cực trị dùng bất đẳng thức trong tam giác

1.1. Kiến thức cơ sở:

- Với 3 điểm A, B, C bất kỳ ta có : $|AC - BC| \leq AB \leq AC + BC$
 Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow C \in [AB]$
- Trong tam giác ABC Có $\angle BAC > \angle ABC \Leftrightarrow BC < AC$
 + Quy tắc n điểm A_1A_2, \dots, A_n
 Ta có $A_1A_n \leq A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n$
 Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A_1A_2, \dots, A_n$ thẳng hàng và sắp xếp theo thứ tự đó.

1.2. Các ví dụ áp dụng :

Ví dụ 1 : Cho đường tròn $(O; R)$, A và B là hai điểm cố định nằm ngoài đường tròn. M là điểm cố định trên đường tròn (O).

Xác định vị trí của điểm M để diện tích tam giác MAB có giá trị :

- a) Lớn nhất b) nhỏ nhất

Giải

Vẽ đường thẳng d qua O và $\perp AB$ tại K
 d cắt đường tròn (O) tại C và D

Hạ $AH \perp AB$

$$\Rightarrow S_{MAB} = \frac{MH \cdot AB}{2}$$

a) Ta có $MH \leq MK$

Xét 3 điểm M, O, K ta có $MK \leq OM + OK$

$$\Leftrightarrow MK \leq OC + OK \Leftrightarrow MH \leq CK \Rightarrow S_{MAB} \leq \frac{CK \cdot AB}{2} \quad (\text{không đổi})$$

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv K \Leftrightarrow M \equiv C$

b) Xét 3 điểm M, O, H ta có $MH \geq |OH - OM|$

Mà $OK \leq OH$ và $OK - OM = OK - OD = DK \Rightarrow MH \geq DK$

$$\Rightarrow S_{MAB} \geq \frac{DK \cdot AB}{2} \quad (\text{không đổi}) \quad \text{Dấu " $=$ " xảy ra} \Leftrightarrow M \in [OH]$$

Và $M \equiv K \Leftrightarrow M \equiv D$

Ví dụ 2: Cho đường tròn $(O; R)$; A là điểm cố định trong đường tròn ($A \neq O$). Xác định vị trí của điểm B trên đường tròn O sao cho góc OBA lớn nhất.

Giải:

Giả sử có $B \in (O)$. Vẽ dây BC của đường tròn (O) qua A ta có $OB = OC = R$

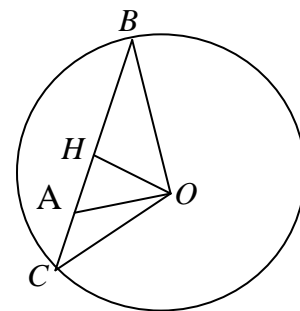
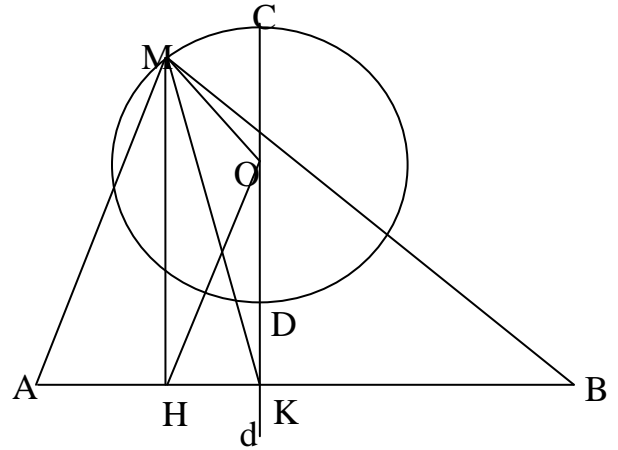
$$\Rightarrow \Delta OBC \text{ cân tại } O \Rightarrow \text{góc } OBC = \frac{180^\circ - \text{COB}}{2}$$

Nên góc $OBA_{\max} \Leftrightarrow \text{góc } COB_{\min}$.

Trong ΔCOB có $CO = OB = R$ không đổi

$$\Rightarrow \angle COB_{\min} \Leftrightarrow BC_{\min} = OH_{\max}$$

Mà $OH \leq OA$ nên $OH_{\max} \Leftrightarrow H \equiv A \Leftrightarrow BC \perp OA$ tại A .



Vậy $OBA_{\max} \Leftrightarrow B \in (O)$ sao cho $BC \perp OA$ tại A.

Ví dụ 3: : Cho tứ giác lồi ABCD. Tìm điểm M trong tứ giác đó sao cho $AM + MB + MC + MD$ đạt cực trị nhỏ nhất.

Giải:

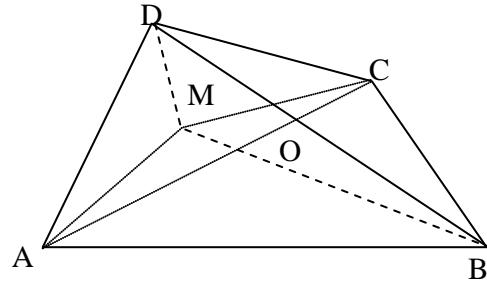
Với 3 điểm M, A, C ta có: $MA + MC \geq AC$

ta có $MB + MD \geq BD$.

$$AM + MB + MC + MD \geq AC + BD \quad (\text{không đổi}).$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in AC \Leftrightarrow M \equiv O \\ M \in BD \end{cases}$$

Vậy $\min (AM + MB + MC + MD) = AC + BD \Leftrightarrow M \equiv O$



1.3. Bài tập vận dụng:

Bài 1: Cho góc vuông xOy; điểm A thuộc miền trong của góc. Các điểm M, N theo thứ tự chuyển động trên các tia Ox, Oy sao cho góc MAB = 90°. Xác định vị trí của M, N để MN có độ dài nhỏ nhất.

Bài 2: Cho 2 đường tròn ở ngoài nhau (O;R) và (O';R'). A nằm trên (O), B nằm trên (O'). Xác định vị trí của điểm A, B để đoạn thẳng AB có độ dài lớn nhất.

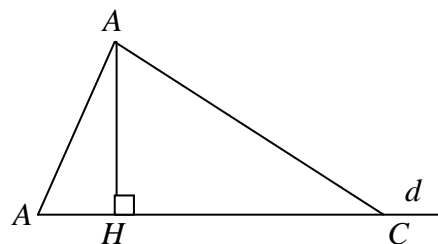
2 / Tìm cực trị dùng quan hệ giữa đường vuông góc với đường xiên

. 2.1. Kiến thức cơ sở

Ta có $AH \perp d; A \notin d; B, C \in d$

*. $AB \geq AH$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow B \equiv H$

*. $AB \leq AC \Leftrightarrow BH \leq HC$



2.2. Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 1: Cho ΔABC ($\hat{A} = 90^\circ$) M là điểm chuyển động trên cạnh BC. Vẽ $MD \perp AB$; $ME \perp AC$ ($D \in AB$, $E \in AC$). Xác định vị trí của M để DE có độ dài nhỏ nhất.

Giải:

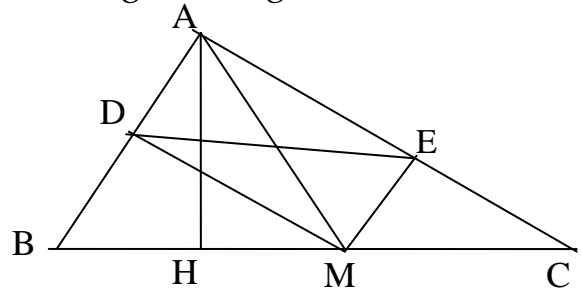
Vẽ $AH \perp BC$ ($H \in BC$), H cố định và AH không đổi, tứ giác AEMD có $\hat{A} = \hat{E} = \hat{D} = 90^\circ$

\Rightarrow AEMD là hình chữ nhật.

$\Rightarrow DE = AM$ mà $AM \geq AH$ (không đổi)

(theo t/c đường xiên và đường vuông góc).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$. Vậy khi $M \equiv H$ thì DE nhỏ nhất.



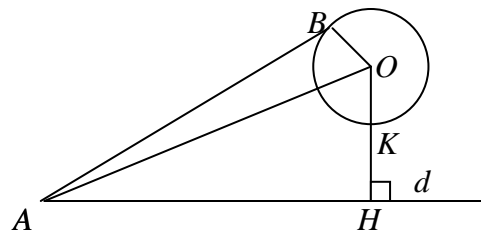
Ví dụ 2: Cho đường thẳng d và đường tròn (O;R) có khoảng cách từ tâm đến d là $OH \geq R$. Lấy hai điểm bất kỳ $A \in d$; $B \in (O;R)$. Hãy chỉ ra vị trí của A và B sao cho độ dài của AB ngắn nhất? Chứng minh điều đó.

Giải:

Từ tâm (O) kẻ $OH \perp d$, OH cắt đường tròn (O) tại K. Xét ba điểm A. B. O ta có $AB + OB \leq OA$ mà $OA \geq OH$ (quan hệ đường xiên và đường vuông góc).

$\Rightarrow AB \geq OH - OB = HK$ không đổi

Vậy $\min AB = KH \Leftrightarrow \begin{cases} A \equiv H \\ B \equiv K \end{cases}$



2.3. Bài tập vận dụng:

Bài 1: Trên cạnh BC, AC của tam giác đều ABC lấy tương ứng hai điểm M và N sao cho $BM = CN$. Tìm vị trí của M để MN có giá trị lớn nhất.

Bài 2: Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB . M là một điểm trên nửa đường tròn, kẻ $MH \perp HB$. Xác định vị trí của M để:

- $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất
- Chu vi của ΔMAB lớn nhất.

3. Tìm cực trị vận dụng bất đẳng thức trong đường tròn.

3.1 Kiến thức cơ sở:

- + Trong một đường tròn: đường kính là dây cung lớn nhất.
- + Dây cung lớn hơn \Leftrightarrow dây đó gần tâm hơn.
- + Cung lớn hơn \Leftrightarrow dây tương cung lớn hơn
- + Cung lớn hơn \Leftrightarrow góc ở tâm lớn hơn

3.2. Các ví dụ áp dụng :

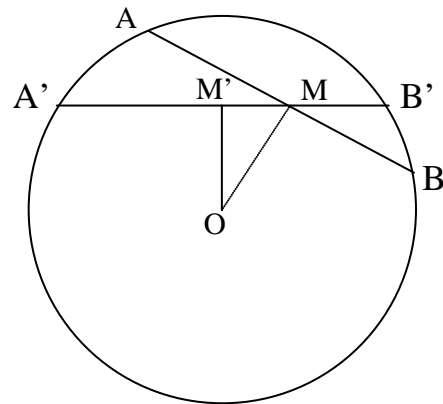
Ví dụ 1 : Cho đường tròn (O) và một điểm M nằm trong đường tròn đó ($M \neq O$). Xác định vị trí của dây cung AB của đường tròn (O) qua M sao cho độ dài AB ngắn nhất.

Giải:

Ta có dây $AB \perp OM$ tại M là dây cung có độ dài nhỏ nhất.

Thật vậy: Qua M vẽ dây $A'B'$ bất kỳ của (O) $A'B'$ không vuông góc với OM . Vẽ $OM' \perp A'B'$. $M' \in A'B'$; $M' \neq M \Rightarrow OM' \perp MM' \Rightarrow OM > OM'$

$\Rightarrow AB < A'B'$ (theo định lý khoảng cách từ tâm đến dây).



Ví dụ 2: Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn (O;R). M là điểm di động trên đường tròn (O). Xác định vị trí của M để $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

Ta xét $M \in$ cung BC. Trên MA lấy D sao cho $MB = MD$. Ta chứng minh được: $\triangle BMD$ là tam giác đều.

$$\Rightarrow \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 60^\circ$$

$$\text{Mà } \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 60^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_3$$

Chứng minh cho $\triangle BAD = \triangle BCM$ (g-c-g)

$$\Rightarrow AD = MC$$

$$\Rightarrow MA + MB + MC = MA + MD + DA = 2MA$$

Mà MA là dây cung của đường tròn (O;R) $\Rightarrow MA = 2R$

$\Rightarrow \max(MA + MB + MC) = 2.2R = 4R \Leftrightarrow MA$ là đường kính của đường tròn (O) $\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa của cung BC.

Tương tự ta xét M thuộc cung AB và M thuộc cung AC $\Rightarrow M$ là điểm chính giữa cung AB hoặc cung AC thì $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất.

3.4. Bài tập vận dụng:

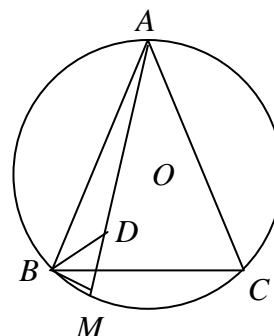
Bài 1: Trên cạnh BC, AC của tam giác đều ABC lấy tương ứng hai điểm M và N sao cho $BM = CN$. Tìm vị trí của M để MN có giá trị lớn nhất.

Bài 2: Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O;R) cho trước. tìm tứ giác có tổng $AB \cdot CD + AD \cdot BC$ đạt giá trị lớn nhất.

4. Tìm cực trị dùng bất đẳng thức đại số

4.1. Kiến thức bổ sung:

+ Bất đẳng thức côsi cho hai số không âm: a, b



Ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$

+ Bất đẳng thức côsi tổng quát cho n số không âm

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

+ Bất đẳng thức Bunhiacôpski

$$(ax + by) \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}.$$

+ Và một số bất đẳng thức quen thuộc khác.

4.2. Các ví dụ áp dụng:

Ví dụ 1 Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB, M là điểm chuyển động trên đường tròn. Xác định vị trí của M trên đường tròn

để $MA + \sqrt{3}MB$ đạt giá trị lớn nhất

Giải:

Ta có: $\angle AMB = 90^\circ$ (góc nội chắn nửa đ. tròn)

ΔMAB có $\angle M = 90^\circ$ Theo Pitago ta có:

$$MA^2 + MB^2 = AB^2 = 4R^2$$

áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có

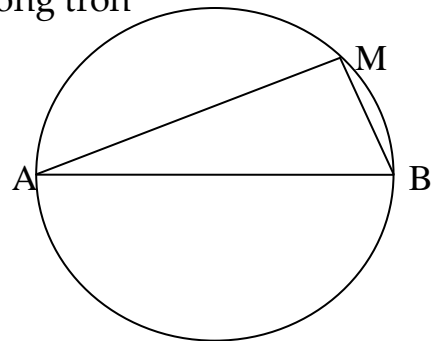
$$MA + \sqrt{3}MB \leq \sqrt{(1+3)(MA^2 + MB^2)} = \sqrt{4 \cdot 4R^2} = 4R$$

$$\Rightarrow MA + \sqrt{3}MB \leq 4R$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{1}{MA} = \frac{\sqrt{3}}{MB} \Leftrightarrow \frac{MB}{MA} = \sqrt{3}$$

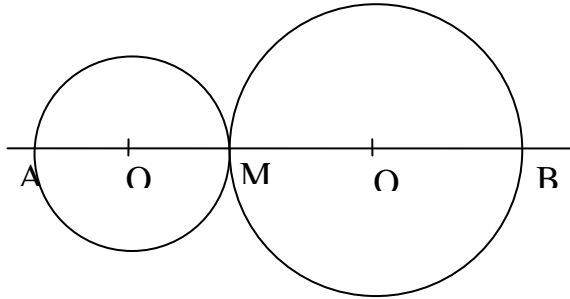
$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \hat{A} = \frac{MB}{MA} = \sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{MAB} = 60^\circ \text{ nên } \max(MA + \sqrt{3} \cdot MB) = 4R \Leftrightarrow \hat{MAB} = 60^\circ$$



Ví dụ 2 : Cho đoạn thẳng AB , điểm M di chuyển trên đoạn ấy .Vẽ các đường tròn đường kính MA , MB .Xác định vị trí của M để tổng diện tích của hai hình tròn có giá trị nhỏ nhất .

Giải



Đặt $MA = x$, $MB = y$, ta có : $x + y = AB$ ($0 < x < y < AB$)

Gọi S và S' thứ tự là diện tích của 2 hình tròn có đường kính là MA và MB

$$\text{Ta có : } S + S' = \pi \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \pi \left(\frac{y}{2} \right)^2 = \pi \cdot \frac{x^2 + y^2}{4}$$

$$\text{áp dụng BĐT : } x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \Rightarrow S + S' \geq \pi \cdot \frac{(x+y)^2}{8} = \pi \cdot \frac{AB^2}{8}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = y \quad \text{Vậy Min } (S + S') = \pi \cdot \frac{AB^2}{8}$$

$\Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB

Ví dụ 3 : Cho ΔABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ Tìm điểm M nằm bên trong tam giác ABC sao cho $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ có giá trị nhỏ nhất . Trong đó x, y, z là khoảng cách từ

M đến BC , AC , AB

Giải

Gọi diện tích ΔABC là S . Ta có $ax + by + cz = 2S$ Không đổi

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có

$$(ax + by + cz) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) \geq \left(\sqrt{ax} \sqrt{\frac{a}{x}} + \sqrt{by} \sqrt{\frac{b}{y}} + \sqrt{cz} \sqrt{\frac{c}{z}} \right)^2$$

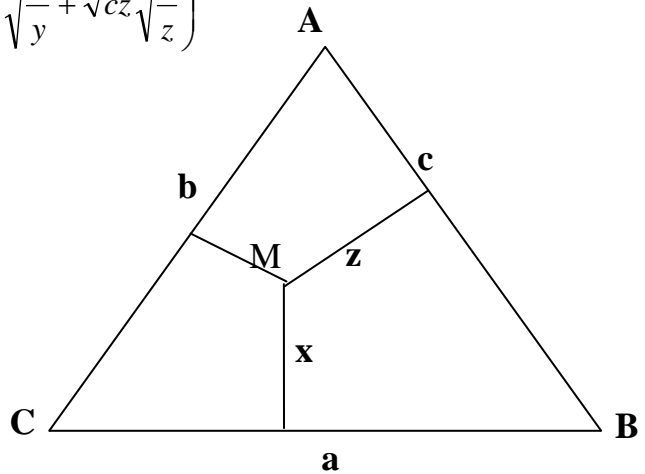
$$\Rightarrow (ax + by + cz) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) \geq (a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) \geq \frac{(a+b+c)^2}{2S}$$

Vậy $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) = \frac{(a+b+c)^2}{2S}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{\frac{a}{x}}} = \frac{\sqrt{by}}{\sqrt{\frac{b}{y}}} = \frac{\sqrt{cz}}{\sqrt{\frac{c}{z}}} \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ là tam giác đều}$$



4.3. Các bài tập áp dụng :

Bài 1: Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng a. Trên hai cạnh AB và AD lần lượt lấy 2 điểm M, N sao cho chu $\Delta AMN = 2a$. Tìm vị trí của M và N để $S_{\Delta AMN}$ lớn nhất.

Bài 2: Cho ΔABC ngoại tiếp đường tròn $(O;r)$. Kẻ các tiếp tuyến của đường tròn $(O;r)$ song song với các cạnh của tam giác. Các tiếp tuyến này tạo với các cạnh của tam giác thành 3 tam giác nhỏ có diện tích là S_1, S_2, S_3 . Gọi S là diện tích của tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của tỷ số $\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S}$.

B. Một vài ví dụ

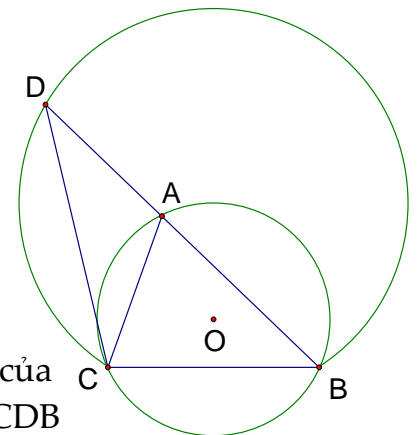
Bài 1: Cho đường tròn $(O; R)$, dây BC cố định. Tìm vị trí của A trên cung lớn BC để tam giác ABC có chu vi lớn nhất.

Hướng dẫn:

BC cố định nên góc CAB không đổi, độ dài BC không đổi

Chu vi tam giác ABC chỉ còn phụ thuộc vào $AB+AC$.

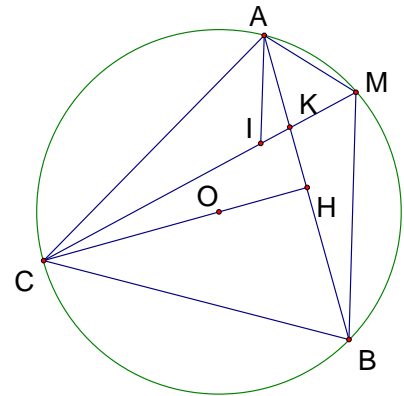
Trên tia đối của tia AB lấy D sao cho $AC = AD$ vậy chu vi của tam giác ABC phụ thuộc vào độ dài của BD hơn nữa góc CDB



cũng không đổi hay BD là dây của cung chứa góc $\frac{1}{2}\angle A$ dựng trên BC. Vậy BD lớn nhất bằng đường kính của cung chứa góc $\frac{1}{2}\angle A$ dựng trên BC $\Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa của cung lớn BC

Bài 2: Cho đường tròn $(O; R)$ với dây AB cố định sao cho khoảng cách từ O tới AB bằng $\frac{R}{2}$. Gọi H là trung điểm của AB, tia HO cắt

đường tròn $(O; R)$ tại C. Trên cung nhỏ AB lấy M tùy ý (khác A, B). Đường thẳng qua A và song song với MB cắt CM tại I. Dây CM cắt dây AB tại K.



a) So sánh góc AIM với góc ACB.

b) Chứng minh: $\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} = \frac{1}{MK}$.

c) Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MAK và tam giác MBK, hãy xác định vị trí của điểm M trên cung nhỏ AB để tích $R_1.R_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn:

a) $OH = \frac{1}{2}R \Rightarrow$ Nhận xét quan hệ giữa dây và và số cung căng dây (Số cung AB = 120°)

Từ đó tìm được quan hệ giữa hai góc AIM và ACB.

b) Thường chuyển về tỉ số các đoạn thẳng

(Cần chứng minh $\frac{MK}{MA} + \frac{MK}{MB} = 1$)

Tìm cách quy đồng mẫu về trái bằng cách chỉ ra các tam giác đồng dạng?

Tam giác chứa hai cạnh MK, MA đồng dạng với tam giác nào? tam giác chứa hai cạnh MK, MB đồng dạng với tam giác nào?

(Tam giác MKA và tam giác MBC đồng dạng $\Rightarrow \frac{MK}{MA} = \frac{MB}{MC}$, tam giác MKB và tam

giác MAC đồng dạng $\Rightarrow \frac{MK}{MB} = \frac{MA}{MC}$

Vậy $\frac{MK}{MA} + \frac{MK}{MB} = \frac{MA + MB}{MC}$

do đó ta phải chứng minh $MA + MB = MC$

c) Để tìm giá trị lớn nhất của tích $R_1.R_2$, ta tìm mối liên hệ của tổng $R_1 + R_2$ với các yếu tố không đổi của bài toán

Để ý hai tam giác AMK, BMK có hai góc AMK, BMK không đổi ($= 60^\circ$), tổng hai cạnh đối diện không đổi. (dùng công thức $R = \frac{a}{2 \sin A}$)

Lời Giải sơ lược:

a) Xét tam giác AOH có $\cos O = \frac{OH}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle AOH = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle AOB = 120^\circ \Rightarrow$ số cung $AB = 120^\circ \Rightarrow \angle ACB = 60^\circ$

Tam giác ABC có đường cao CH đồng thời là trung tuyến. Vậy tam giác ABC đều $\Rightarrow \angle ACB = 60^\circ$

$AI \parallel MB \Rightarrow$ góc AIM = góc CMB = góc CAB = 60°

Vậy góc AIM = góc ACB.

b) Tam giác AIM đều (có hai góc bằng 60°) $\Rightarrow AM = MI$.

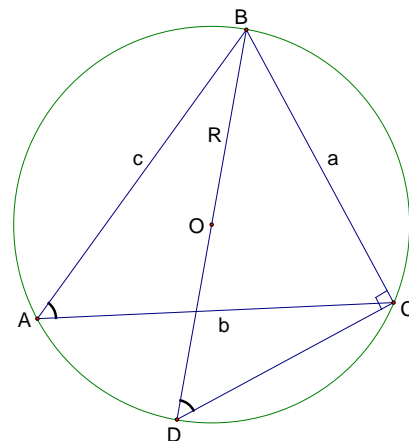
$\Delta AIC = \Delta AMB$ (c - g - c) $\Rightarrow CI = MB$

ΔMKA và ΔMBC đồng dạng nên $\frac{MK}{MA} = \frac{MB}{MC}$

ΔMKB và ΔMAC đồng dạng nên $\frac{MK}{MB} = \frac{MA}{MC}$

Vậy: $\frac{MK}{MA} + \frac{MK}{MB} = \frac{MB}{MC} + \frac{MA}{MC} = \frac{MB+MA}{MC} = 1$ hay

$\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} = \frac{1}{MK}$.



Bổ đề: Trong tam giác ABC:

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

CM:

Vẽ đường kính BD \Rightarrow góc A = góc D

Xét tam giác vuông BCD

$BD = \frac{BC}{\sin D}$ hay $2R = \frac{a}{\sin A}$ tương tự ta cm được $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

c) Áp dụng bổ đề ta được:

Trong tam giác AKM: $R_1 = \frac{AK}{2 \sin M} = \frac{AK}{2 \sin 60^\circ} = \frac{AK}{\sqrt{3}}$

Trong tam giác BKM: $R_2 = \frac{BK}{2 \sin M} = \frac{BK}{2 \sin 60^\circ} = \frac{BK}{\sqrt{3}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho 2 số không âm R_1, R_2 có:

$$\sqrt{R_1 R_2} \leq \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{AK + BK}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}R}{2\sqrt{3}} = \frac{R}{2} = \text{hs dấu bằng khi } R_1 = R_2 \Leftrightarrow AK = BK \Leftrightarrow M \text{ là}$$

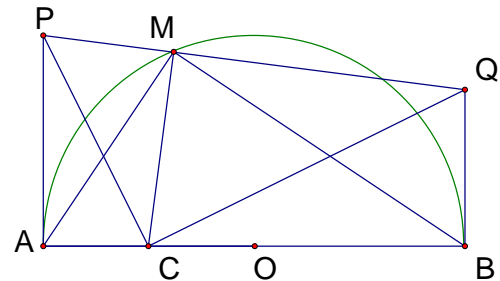
điểm chính giữa của cung AB.

Vậy $R_1 R_2 \max = \frac{R^2}{4}$ khi M là điểm chính giữa của cung AB.

Bài 3: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, lấy C là trung điểm của AO. Kẻ hai tia Ax và By vuông góc với AB và ở cùng một phía với nửa đường tròn. Điểm M di động trên nửa đường tròn (M khác A, B). Một đường thẳng vuông góc với CM tại M cắt Ax ở P, cắt By ở Q. Tìm vị trí của điểm M trên nửa đường tròn để tứ giác APQB có diện tích nhỏ nhất. Tìm giá trị diện tích nhỏ nhất đó.

Phương hướng:

Hình thang ABQP có đường cao không đổi do đó diện tích của nó nhỏ nhất $\Leftrightarrow AP + BQ$ nhỏ nhất. Ta đi chứng minh tích AP.BQ không đổi. Muốn vậy chỉ ra AP và BQ là cạnh không tương ứng của hai tam giác đồng dạng.



Gợi ý: Tứ giác APMC, BQMC nội tiếp \Rightarrow Hãy chỉ ra các cặp góc bằng nhau. (liên hệ giữa các góc với các đường tròn)

Lời giải sơ lược:

Tứ giác APMC nội tiếp \Rightarrow góc PCA = góc PMA

Có góc AMB vuông \Rightarrow góc PMA + góc BMQ = 90°

Tứ giác BQMC nội tiếp \Rightarrow góc BMQ = góc BCQ.

Có góc CAQ vuông \Rightarrow góc BCQ + góc BQC = 90° .

Vậy: góc PCA = góc BQC

Do đó tam giác APC và tam giác BCQ đồng dạng $\Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{BC}{BQ} \Rightarrow AP \cdot BQ = AC \cdot BC$

$$= \frac{R}{2} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4} = \text{hs.}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi : $\frac{AP + BQ}{2} \geq \sqrt{AP \cdot BQ} = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$ dấu bằng khi $AP =$

$BQ \Leftrightarrow CM$ vuông góc với AB

Hay $S_{ABQP} = \frac{1}{2} AB(AP + BQ)_{\min} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \sqrt{3}R = \sqrt{3}R^2$ khi số cung AM = 60° .

Bài 4: Cho tam giác đều ABC, E là một điểm trên cạnh AC (E khác A), K là trung điểm của đoạn AE. Đường thẳng EF đi qua E và vuông góc với đường thẳng AB (F thuộc AB) cắt đường thẳng đi qua C và vuông góc với đường thẳng BC tại D. Xác định vị trí của E sao cho đoạn KD có độ dài nhỏ nhất.

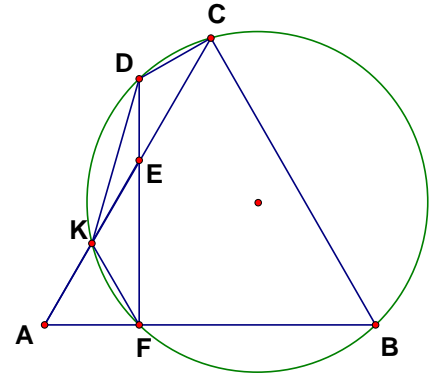
Hướng dẫn:

Khai thác Tam giác ABC đều, tam giác AEF vuông, K là trung điểm AE, góc DCB vuông.

=> 5 điểm B, C, D, K, F cùng thuộc một đường tròn

=> KD là một dây cung .

sđ cung DK không đổi. Do đó: KD nhỏ nhất ⇔ bán kính nhỏ nhất.



Lời giải sơ lược:

Tam giác AEF vuông tại F, góc A = 60°, FK là trung tuyến ứng với cạnh huyền => Tam giác AKF đều => góc FKC = 120°.

Vậy Tứ giác BCKF nội tiếp.

Tứ giác BCDF có góc F = góc C = 90°

Vậy Tứ giác BCDF nội tiếp hay 5 điểm B, C, D, K, F cùng thuộc một đường tròn đường kính BD.

sđ cung DK = 2 góc DFK = 60° => $KD = \frac{1}{2} DB \leq \frac{1}{2} CB$ dấu bằng khi E trùng với C

Vậy $KD_{\min} = \frac{1}{2} CB$ khi E ≡ C.

Bài 5: Cho tam giác ABC cân ở B có góc ABC bằng β, O là trung điểm của cạnh AC, K là chân đường vuông góc hạ từ O xuống cạnh AB, (ω) là đường tròn tâm O bán kính OK. E là một điểm thay đổi trên cạnh BA sao cho góc AOE bằng α (20° < α < 90°). F là điểm trên cạnh BC sao cho EF tiếp xúc với (ω). Tìm α để AE + CF nhỏ nhất.

Gợi ý:

Để Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng, ta đi chứng minh tích không đổi

Nhận xét quan hệ của hai tam giác AEO và OEF?

(Sử dụng tính chất tiếp tuyến, tổng các góc của tứ giác, tam giác)

Lời giải sơ lược:

Trong tam giác OEF:

$$\angle EOF = 180^\circ - \angle OEF - \angle OFE = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle AEF - \frac{1}{2} \angle CFE$$

