CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HSG LỚP 6 PHẦN SỐ HỌC

BÀI 1: TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG

Tìm chữ số tận cùng của một số tự nhiên là dạng toán hay. Đa số các tài liệu về dạng toán này đều sử dụng khái niệm đồng dư, một khái niệm trừu tượng và không có trong chương trình. Vì thế có không ít học sinh, đặc biệt là các bạn lớp 6 và lớp 7 khó có thể hiểu và tiếp thu được.

Qua bài viết này, tôi xin trình bày với các bạn một số tính chất và phương pháp giải bài toán "tìm chữ số tận cùng", chỉ sử dụng kiến thức THCS.

Chúng ta xuất phát từ tính chất sau:

Tính chất 1:

a) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6 khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

b) Các số có chữ số tận cùng là 4, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc lẻ thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

c) Các số có chữ số tận cùng là 3, 7, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n (n thuộc N) thì chữ số tận cùng là 1.

d) Các số có chữ số tận cùng là 2, 4, 8 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n (n thuộc N) thì chữ số tận cùng là 6.

Việc chứng minh tính chất trên không khó, xin dành cho bạn đọc. Như vậy, muốn tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$, trước hết ta xác định chữ số tận cùng của a.

- Nếu chữ số tận cùng của a là 0, 1, 5, 6 thì x cũng có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6.
- Nếu chữ số tận cùng của a là 3, 7, 9, vì $a^m = a^{4n + r} = a^{4n}.a^r$ với r = 0, 1, 2, 3 nên từ tính chất 1c => chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của a^r.
- Nếu chữ số tận cùng của a là 2, 4, 8, cũng như trường hợp trên, từ tính chất 1d => chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của $6.a^r$.

Bài toán 1: Tìm chữ số tận cùng của các số:

a) 7^{99} b) 14^{1414} c) 4^{567}

Lời giải:

a) Trước hết, ta tìm số dư của phép chia 99 cho 4:

$9^9 - 1 = (9 - 1)(9^8 + 9^7 + \ldots + 9 + 1)$ chia hết cho 4

=> 99 = 4k + 1 (k thuộc N) => $7^{99} = 7^{4k + 1} = 7^{4k}.7$

Do 7^{4k} có chữ số tận cùng là 1 (theo tính chất 1c) => 7^{99} có chữ số tận cùng là 7.

b) Dễ thấy $14^{14} = 4k$ (k thuộc N) => theo tính chất 1d thì $14^{1414} = 14^{4k}$ có chữ số tận cùng là 6.

c) Ta có $5^{67} - 1$ chia hết cho 4 => $5^{67} = 4k + 1$ (k thuộc N)

=> $4^{567} = 4^{4k + 1} = 4^{4k}.4$, theo tính chất 1d, 4^{4k} có chữ số tận cùng là 6 nên 4^{567} có chữ số tận cùng là 4.

Tính chất sau được => từ tính chất 1.

Tính chất 2: *Một số tự nhiên bất kì, khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 1 (n thuộc N) thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.*

Chữ số tận cùng của một tổng các lũy thừa được xác định bằng cách tính tổng các chữ số tận cùng của từng lũy thừa trong tổng.

Bài toán 2: Tìm chữ số tận cùng của tổng $S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \ldots + 2004^{8009}$.

Lời giải:

Nhận xét: Mọi lũy thừa trong S đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 1 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(n-2)+1}$, n thuộc {2, 3, …, 2004}).

Theo tính chất 2, mọi lũy thừa trong S và các cơ số tương ứng đều có chữ số tận cùng giống nhau, bằng chữ số tận cùng của tổng:

$(2 + 3 + \ldots + 9) + 199.(1 + 2 + \ldots + 9) + 1 + 2 + 3 + 4 = 200(1 + 2 + \ldots + 9) + 9 = 9009$.

Vậy chữ số tận cùng của tổng S là 9.

Từ tính chất 1 tiếp tục => tính chất 3.

Tính chất 3:

a) Số có chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 7 ; số có chữ số tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 3.

b) Số có chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 8 ; số có chữ số tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 2.

c) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9, khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ không thay đổi chữ số tận cùng.

Bài toán 3: Tìm chữ số tận cùng của tổng $T = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \ldots + 2004^{8011}$.

Lời giải:

Nhận xét: Mọi lũy thừa trong T đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 3 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(n-2)+3}$, n thuộc {2, 3, …, 2004}).

Theo tính chất 3 thì 2^3 có chữ số tận cùng là 8 ; 3^7 có chữ số tận cùng là 7 ; 4^{11} có chữ số tận cùng là 4 ; …

Như vậy, tổng T có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của tổng: $(8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 199.(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 1 + 8 + 7 + 4 = 200(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 8 + 7 + 4 = 9019$.

Vậy chữ số tận cùng của tổng T là 9.

* Trong một số bài toán khác, việc tìm chữ số tận cùng dẫn đến lời giải khá độc đáo.

Bài toán 4: Tồn tại hay không số tự nhiên n sao cho $n^2 + n + 1$ chia hết cho 1995^{2000}.

Lời giải: 1995^{2000} tận cùng bởi chữ số 5 nên chia hết cho 5. Vì vậy, ta đặt vấn đề là liệu $n^2 + n + 1$ có chia hết cho 5 không ?

Ta có $n^2 + n = n(n + 1)$, là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên chữ số tận cùng của $n^2 + n$ chỉ có thể là 0 ; 2 ; 6 => $n^2 + n + 1$ chỉ có thể tận cùng là 1 ; 3 ; 7 => $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 5.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n sao cho $n^2 + n + 1$ chia hết cho 1995^{2000}.

Sử dụng tính chất *"một số chính phương chỉ có thể tận cùng bởi các chữ số 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9"*, ta có thể giải được bài toán sau:

Bài toán 5: Chứng minh rằng các tổng sau không thể là số chính phương:

a) $M = 19^k + 5^k + 1995^k + 1996^k$ (với k chẵn)

b) $N = 2004^{2004k} + 2003$

Sử dụng tính chất *"một số nguyên tố lớn hơn 5 chỉ có thể tận cùng bởi các chữ số 1 ; 3 ; 7 ; 9"*, ta tiếp tục giải quyết được bài toán:

Bài toán 6: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng: $p^{8n} + 3.p^{4n} - 4$ chia hết cho 5.

* Các bạn hãy giải các bài tập sau:

Bài 1: Tìm số dư của các phép chia:

a) $2^1 + 3^5 + 4^9 + \ldots + 2003^{8005}$ cho 5

b) $2^3 + 3^7 + 4^{11} + \ldots + 2003^{8007}$ cho 5

Bài 2: Tìm chữ số tận cùng của X, Y:

$X = 2^2 + 3^6 + 4^{10} + \ldots + 2004^{8010}$

$Y = 2^8 + 3^{12} + 4^{16} + \ldots + 2004^{8016}$

Bài 3: Chứng minh rằng chữ số tận cùng của hai tổng sau giống nhau:

$U = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \ldots + 2005^{8013}$

$V = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \ldots + 2005^{8015}$

Bài 4: Chứng minh rằng không tồn tại các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn:

$19^x + 5^y + 1980z = 1975^{430} + 2004$.

* Các bạn thử nghiên cứu các tính chất và phương pháp tìm nhiều hơn một chữ số tận cùng của một số tự nhiên, chúng ta sẽ tiếp tục trao đổi về vấn đề này.

*** Tìm hai chữ số tận cùng**

Nhận xét: Nếu $x \in N$ và $x = 100k + y$, trong đó k ; $y \in N$ thì hai chữ số tận cùng của x cũng chính là hai chữ số tận cùng của y.

Hiển nhiên là $y \leq x$. Như vậy, để đơn giản việc tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên x thì thay vào đó ta đi tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên y (nhỏ hơn).

Rõ ràng số y càng nhỏ thì việc tìm các chữ số tận cùng của y càng đơn giản hơn.

Từ nhận xét trên, ta đề xuất phương pháp tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$ như sau:

Trường hợp 1: Nếu a chẵn thì $x = a^m \vdots 2^m$. Gọi n là số tự nhiên sao cho $a^{n-1} \vdots 25$.

Viết $m = p^n + q$ ($p ; q \in N$), trong đó q là số nhỏ nhất để $a^q \vdots 4$ ta có:

$x = a^m = a^q(a^{pn} - 1) + a^q$.

Vì $a^{n-1} \vdots 25 \Rightarrow a^{pn} - 1 \vdots 25$. Mặt khác, do $(4, 25) = 1$ nên $a^q(a^{pn} - 1) \vdots 100$.

Vậy hai chữ số tận cùng của am cũng chính là hai chữ số tận cùng của aq. Tiếp theo, ta tìm hai chữ số tận cùng của aq.

Trường hợp 2: Nếu a lẻ , gọi n là số tự nhiên sao cho $a^{n-1} \vdots 100$.

Viết $m = u^n + v$ ($u ; v \in N$, $0 \leq v < n$) ta có:

$x = a^m = a^v(a^{un} - 1) + a^v$.

Vì $a^n - 1 \vdots 100 \Rightarrow a^{un} - 1 \vdots 100$.

Vậy hai chữ số tận cùng của a^m cũng chính là hai chữ số tận cùng của a^v. Tiếp theo, ta tìm hai chữ số tận cùng của a^v.

Trong cả hai trường hợp trên, chìa khóa để giải được bài toán là chúng ta phải tìm được số tự nhiên n. Nếu n càng nhỏ thì q và v càng nhỏ nên sẽ dễ dàng tìm hai chữ số tận cùng của a^q và a^v.

Bài toán 7:

Tìm hai chữ số tận cùng của các số:

a) a^{2003} b) 7^{99}

Lời giải: a) Do 2^{2003} là số chẵn, theo trường hợp 1, ta tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $2^n - 1 \vdots 25$.

Ta có $2^{10} = 1024 \Rightarrow 2^{10} + 1 = 1025 \vdots 25 \Rightarrow 2^{20} - 1 = (2^{10} + 1)(2^{10} - 1) \vdots 25 \Rightarrow 2^3(2^{20} - 1) \vdots 100$. Mặt khác:

$2^{2003} = 2^3(2^{2000} - 1) + 2^3 = 2^3((2^{20})^{100} - 1) + 2^3 = 100k + 8$ ($k \in N$).

Vậy hai chữ số tận cùng của 2^{2003} là 08.

b) Do 7^{99} là số lẻ, theo trường hợp 2, ta tìm số tự nhiên n bé nhất sao cho $7^n - 1 \vdots 100$.

Ta có $7^4 = 2401 \Rightarrow 74 - 1 \vdots 100$.

Mặt khác: $9^9 - 1 \vdots 4 \Rightarrow 9^9 = 4k + 1$ ($k \in N$)

Vậy $7^{99} = 7^{4k + 1} = 7(7^{4k} - 1) + 7 = 100q + 7$ ($q \in N$) tận cùng bởi hai chữ số 07.

Bài toán 8:

Tìm số dư của phép chia 3^{517} cho 25.

Lời giải: Trước hết ta tìm hai chữ số tận cùng của 3^{517}. Do số này lẻ nên theo trường hợp 2, ta phải tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $3^n - 1 \vdots 100$.

Ta có $3^{10} = 9^5 = 59049 \Rightarrow 3^{10} + 1 \vdots 50 \Rightarrow 3^{20} - 1 = (3^{10} + 1)(3^{10} - 1) \vdots 100$.

Mặt khác: $5^{16} - 1 \vdots 4 \Rightarrow 5(5^{16} - 1) \vdots 20$

$\Rightarrow 5^{17} = 5(5^{16} - 1) + 5 = 20k + 5 \Rightarrow 3^{517} = 3^{20k + 5} = 3^5(3^{20k} - 1) + 3^5 = 3^5(3^{20k} - 1) + 243$, có hai chữ số tận cùng là 43.

Vậy số dư của phép chia 3^{517} cho 25 là 18.

Trong trường hợp số đã cho chia hết cho 4 thì ta có thể tìm theo cách gián tiếp. Trước tiên, ta tìm số dư của phép chia số đó cho 25, từ đó suy ra các khả năng của hai chữ số tận cùng. Cuối cùng, dựa vào giả thiết chia hết cho 4 để chọn giá trị đúng.

Các thí dụ trên cho thấy rằng, nếu a = 2 hoặc a = 3 thì n = 20 ; nếu a = 7 thì n = 4.

Một câu hỏi đặt ra là: Nếu a bất kì thì n nhỏ nhất là bao nhiêu ? Ta có tính chất sau đây (bạn đọc tự chứng minh).

Tính chất 4: Nếu $a \in N$ và $(a, 5) = 1$ thì $a^{20} - 1 \vdots 25$.

Bài toán 9: Tìm hai chữ số tận cùng của các tổng:

a) $S_1 = 1^{2002} + 2^{2002} + 3^{2002} + ... + 2004^{2002}$

b) $S_2 = 1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + ... + 2004^{2003}$

Lời giải:

a) Dễ thấy, nếu a chẵn thì a^2 chia hết cho 4 ; nếu a lẻ thì $a^{100} - 1$ chia hết cho 4 ; nếu a chia hết cho 5 thì a^2 chia hết cho 25.

Mặt khác, từ tính chất 4 ta suy ra với mọi $a \in N$ và $(a, 5) = 1$ ta có a100 - 1 $\vdots$ 25.

Vậy với mọi a Є N ta có $a^2(a^{100} - 1) \vdots 100$.
Do đó $S_1 = 1^{2002} + 2^2(2^{2000} - 1) + ... + 2004^2(2004^{2000} - 1) + 2^2 + 3^2 + ... + 2004^2$.
Vì thế hai chữ số tận cùng của tổng S_1 cũng chính là hai chữ số tận cùng của tổng $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 2004^2$. áp dụng công thức:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$

$=> 1^2 + 2^2 + ... + 2004^2 = 2005 \times 4009 \times 334 = 2684707030$, tận cùng là 30.

Vậy hai chữ số tận cùng của tổng S_1 là 30.

b) Hoàn toàn tương tự như câu a, $S_2 = 1^{2003} + 2^3(2^{2000} - 1) + ... + 2004^3(2004^{2000} - 1) + 2^3 + 3^3 + 2004^3$. Vì thế, hai chữ số tận cùng của tổng S_2 cũng chính là hai chữ số tận cùng của $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 2004^3$.

áp dụng công thức:

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$=> 1^3 + 2^3 + ... + 2004^3 = (2005 \times 1002)^2 = 4036121180100$, tận cùng là 00.

Vậy hai chữ số tận cùng của tổng S_2 là 00.

Trở lại bài toán 5 (TTT2 số 15), ta thấy rằng có thể sử dụng việc tìm chữ số tận cùng để nhận biết một số không phải là số chính phương. Ta cũng có thể nhận biết điều đó thông qua việc tìm hai chữ số tận cùng.

Ta có tính chất sau đây (bạn đọc tự chứng minh).

Tính chất 5: Số tự nhiên A không phải là số chính phương nếu:

+ A có chữ số tận cùng là 2, 3, 7, 8 ;
+ A có chữ số tận cùng là 6 mà chữ số hàng chục là chữ số chẵn ;
+ A có chữ số hàng đơn vị khác 6 mà chữ số hàng chục là lẻ ;
+ A có chữ số hàng đơn vị là 5 mà chữ số hàng chục khác 2 ;
+ A có hai chữ số tận cùng là lẻ.

Bài toán 10: Cho n Є N và n - 1 không chia hết cho 4. Chứng minh rằng $7^n + 2$ không thể là số chính phương.

Lời giải: Do n - 1 không chia hết cho 4 nên n = 4k + r (r Є {0, 2, 3}). Ta có $7^4 - 1 = 2400 \vdots 100$. Ta viết $7^n + 2 = 7^{4k+r} + 2 = 7^r(7^{4k} - 1) + 7^r + 2$.
Vậy hai chữ số tận cùng của $7^n + 2$ cũng chính là hai chữ số tận cùng của $7^r + 2$ (r = 0, 2, 3) nên chỉ có thể là 03, 51, 45. Theo tính chất 5 thì rõ ràng $7^n + 2$ không thể là số chính phương khi n không chia hết cho 4.

*** Tìm ba chữ số tận cùng**

Nhận xét: Tương tự như trường hợp tìm hai chữ số tận cùng, việc tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên x chính là việc tìm số dư của phép chia x cho 1000.
Nếu x = 1000k + y, trong đó k ; y Є N thì ba chữ số tận cùng của x cũng chính là ba chữ số tận cùng của y ($y \le x$).
Do 1000 = 8 x 125 mà (8, 125) = 1 nên ta đề xuất phương pháp tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$ như sau:

Trường hợp 1: Nếu a chẵn thì $x = a^m$ chia hết cho 2^m. Gọi n là số tự nhiên sao cho $a^n - 1$ chia hết cho 125.
Viết $m = p^n + q$ (p ; q Є N), trong đó q là số nhỏ nhất để a^q chia hết cho 8 ta có:

$x = a^m = a^q(a^{pn} - 1) + a^q$.

Vì $a^n - 1$ chia hết cho 125 => $a^{pn} - 1$ chia hết cho 125. Mặt khác, do (8, 125) = 1 nên $a^q(a^{pn} - 1)$ chia hết cho 1000.

Vậy ba chữ số tận cùng của a^m cũng chính là ba chữ số tận cùng của a^q. Tiếp theo, ta tìm ba chữ số tận cùng của a^q.

Trường hợp 2: Nếu a lẻ , gọi n là số tự nhiên sao cho $a^n - 1$ chia hết cho 1000.

Viết $m = u^n + v$ ($u ; v \in N, 0 \leq v < n$) ta có:

$x = a^m = a^v(a^{un} - 1) + a^v$.

Vì $a^n - 1$ chia hết cho 1000 => $a^{un} - 1$ chia hết cho 1000.

Vậy ba chữ số tận cùng của a^m cũng chính là ba chữ số tận cùng của a^v. Tiếp theo, ta tìm ba chữ số tận cùng của a^v.

Tính chất sau được suy ra từ tính chất 4.

Tính chất 6:

Nếu $a \in N$ và (a, 5) = 1 thì $a^{100} - 1$ chia hết cho 125.

Chứng minh: Do $a^{20} - 1$ chia hết cho 25 nên $a^{20}, a^{40}, a^{60}, a^{80}$ khi chia cho 25 có cùng số dư là 1

=> $a^{20} + a^{40} + a^{60} + a^{80} + 1$ chia hết cho 5. Vậy $a^{100} - 1 = (a^{20} - 1)(a^{80} + a^{60} + a^{40} + a^{20} + 1)$ chia hết cho 125.

Bài toán 11:

Tìm ba chữ số tận cùng của 123^{101}.

Lời giải: Theo *tính chất 6*, do (123, 5) = 1 => $123^{100} - 1$ chia hết cho 125 (1).

Mặt khác:

$123^{100} - 1 = (123^{25} - 1)(123^{25} + 1)(123^{50} + 1)$ => $123^{100} - 1$ chia hết cho 8 (2).

Vì (8, 125) = 1, từ (1) và (2) suy ra: $123^{100} - 1$ chi hết cho 1000

=> $123^{101} = 123(123^{100} - 1) + 123 = 1000k + 123$ ($k \cap N$).

Vậy 123^{101} có ba chữ số tận cùng là 123.

Bài toán 12:

Tìm ba chữ số tận cùng của $3^{399...98}$.

Lời giải: Theo *tính chất 6*, do (9, 5) = 1 => $9^{100} - 1$ chi hết cho 125 (1).

Tương tự bài 11, ta có $9^{100} - 1$ chia hết cho 8 (2).

Vì (8, 125) = 1, từ (1) và (2) suy ra: $9^{100} - 1$ chia hết cho 1000 => $3^{399...98} = 9^{199...9} = 9^{100p + 99} = 9^{99}(9^{100p} - 1) + 9^{99} = 1000q + 9^{99}$ ($p, q \in N$).

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399...98}$ cũng chính là ba chữ số tận cùng của 9^{99}.

Lại vì $9^{100} - 1$ chia hết cho 1000 => ba chữ số tận cùng của 9^{100} là 001 mà $9^{99} = 9^{100}$: 9 => ba chữ số tận cùng của 9^{99} là 889 (dễ kiểm tra chữ số tận cùng của 9^{99} là 9, sau đó dựa vào phép nhân $\overline{??9} \times 9 = ...001$ để xác định $\overline{??9} = 889$).

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399...98}$ là 889.

Nếu số đã cho chia hết cho 8 thì ta cũng có thể tìm ba chữ số tận cùng một cách gián tiếp theo các bước: Tìm dư của phép chia số đó cho 125, từ đó suy ra các khả năng của ba chữ số tận cùng, cuối cùng kiểm tra điều kiện chia hết cho 8 để chọn giá trị đúng.

Bài toán 13:

Tìm ba chữ số tận cùng của 2004^{200}.

Lời giải: do (2004, 5) = 1 (*tính chất 6*)

=> 2004^{100} chia cho 125 dư 1

=> $2004^{200} = (2004^{100})^2$ chia cho 125 dư 1

=> 2004^{200} chỉ có thể tận cùng là 126, 251, 376, 501, 626, 751, 876. Do 2004^{200} chia hết cho 8 nên chỉ có thể tận cùng là 376.

Từ phương pháp tìm hai và ba chữ số tận cùng đã trình bày, chúng ta có thể mở rộng để tìm nhiều hơn ba chữ số tận cùng của một số tự nhiên.

Sau đây là một số bài tập vận dụng:

Bài 1: Chứng minh $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ chia hết cho 5 khi và chỉ khi n không chia hết cho 4.

Bài 2: Chứng minh $9^{20002003}$, $7^{20002003}$ có chữ số tận cùng giống nhau.

Bài 3: Tìm hai chữ số tận cùng của:

a) 3^{999} b) 11^{1213}

Bài 4: Tìm hai chữ số tận cùng của:

$S = 2^3 + 2^{23} + ... + 2^{40023}$

Bài 5: Tìm ba chữ số tận cùng của:

$S = 1^{2004} + 2^{2004} + ... + 2003^{2004}$

Bài 6: Cho (a, 10) = 1. Chứng minh rằng ba chữ số tận cùng của a^{101} cũng bằng ba chữ số tận cùng của a.

Bài 7: Cho A là một số chẵn không chia hết cho 10. Hãy tìm ba chữ số tận cùng của A^{200}.

Bài 8: Tìm ba chữ số tận cùng của số:

$1993^{19941995 ...2000}$

Bài 9: Tìm sáu chữ số tận cùng của 5^{21}.

BÀI 2: CHỨNG MINH MỘT SỐ KHÔNG PHẢI LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Trong chương trình Toán lớp 6, các em đã được học về các bài toán liên quan tới phép chia hết của một số tự nhiên cho một số tự nhiên khác 0 và đặc biệt là được giới thiệu về số chính phương, đó là số tự nhiên bằng bình phương của một số tự nhiên (chẳng hạn: 0 ; 1 ; 4 ; 9 ;16 ; 25 ; 121 ; 144 ; …).

Kết hợp các kiến thức trên, các em có thể giải quyết bài toán: Chứng minh một số không phải là số chính phương. Đây cũng là một cách củng cố các kiến thức mà các em đã được học. Những bài toán này sẽ làm tăng thêm lòng say mê môn toán cho các em.

1. Nhìn chữ số tận cùng

Vì số chính phương bằng bình phương của một số tự nhiên nên có thể thấy ngay **số chính phương phải có chữ số tận cùng là một trong các chữ số 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9.** Từ đó các em có thể giải được bài toán kiểu sau đây:

Bài toán 1: Chứng minh số: $n = 2004^2 + 2003^2 + 2002^2 - 2001^2$ không phải là số chính phương.

Lời giải: Dễ dàng thấy chữ số tận cùng của các số 20042 ; 20032 ; 20022 ; 20012 lần lượt là 6 ; 9 ; 4 ; 1. Do đó số n có chữ số tận cùng là 8 nên n không phải là số chính phương.

Chú ý: Nhiều khi số đã cho có chữ số tận cùng là một trong các số 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9 nhưng vẫn không phải là số chính phương. Khi đó các bạn phải lưu ý thêm một chút nữa:

Nếu số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì phải chia hết cho p^2.

Bài toán 2: Chứng minh số 1234567890 không phải là số chính phương.

Lời giải: Thấy ngay số 1234567890 chia hết cho 5 (vì chữ số tận cùng là 0) nhưng không chia hết cho 25 (vì hai chữ số tận cùng là 90). Do đó số 1234567890 không phải là số chính phương.

Chú ý: Có thể lý luận 1234567890 chia hết cho 2 (vì chữ số tận cùng là 0), nhưng không chia hết cho 4 (vì hai chữ số tận cùng là 90) nên 1234567890 không là số chính phương.

Bài toán 3: Chứng minh rằng nếu một số có tổng các chữ số là 2004 thì số đó không phải là số chính phương.

Lời giải: Ta thấy tổng các chữ số của số 2004 là 6 nên 2004 chia hết cho 3 mà không chia hết 9 nên số có tổng các chữ số là 2004 cũng chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9, do đó số này không phải là số chính phương.

2. Dùng tính chất của số dư

Chẳng hạn các em gặp bài toán sau đây:

Bài toán 4: Chứng minh một số có tổng các chữ số là 2006 không phải là số chính phương.

Chắc chắn các em sẽ dễ bị "choáng". Vậy ở bài toán này ta sẽ phải nghĩ tới điều gì ? Vì cho giả thiết về tổng các chữ số nên chắc chắn các em phải nghĩ tới phép chia cho 3 hoặc cho 9. Nhưng lại không gặp điều "kì diệu" như bài toán 3. Thế thì ta nói được điều gì về số này ? Chắc chắn số này chia cho 3 phải dư 2. Từ đó ta có lời giải.

Lời giải: Vì **số chính phương khi chia cho 3 chỉ có số dư là 0 hoặc 1** mà thôi (coi như bài tập để các em tự chứng minh !). Do tổng các chữ số của số đó là 2006 nên số đó chia cho 3 dư 2. Chứng tỏ số đã cho không phải là số chính phương. Tương tự các em có thể tự giải quyết được 2 bài toán:

Bài toán 5: Chứng minh tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2005 không phải là số chính phương.

Bài toán 6: Chứng minh số: $n = 2004^4 + 2004^3 + 2004^2 + 23$ không là số chính phương.

Bây giờ các em theo dõi bài toán sau để nghĩ tới một "tình huống" mới.

Bài toán 7: Chứng minh số:

$n = 4^4 + 44^{44} + 444^{444} + 4444^{4444} + 15$ không là số chính phương.

Nhận xét: Nếu xét n chia cho 3, các em sẽ thấy số dư của phép chia sẽ là 1, thế là không "bắt chước" được cách giải của các bài toán 3 ; 4 ; 5 ; 6. Nếu xét chữ số tận cùng các em sẽ thấy chữ số tận cùng của n là 9 nên không làm "tương tự" được như các bài toán 1 ; 2. Số dư của phép chia n cho 4 là dễ thấy nhất, đó chính là 3. Một **số chính phương khi chia cho 4 sẽ cho số dư như thế nào nhỉ ?** Các em có thể tự chứng minh và được kết quả: số dư đó chỉ có thể là **0 hoặc 1**. Như vậy là các em đã giải xong bài toán 7.

3. "Kẹp" số giữa hai số chính phương "liên tiếp"

Các em có thể thấy rằng: Nếu n là số tự nhiên và số tự nhiên k thỏa mãn $n^2 < k < (n + 1)^2$ thì k không là số chính phương. Từ đó các em có thể xét được các bài toán sau:

Bài toán 8: Chứng minh số 4014025 không là số chính phương.

Nhận xét: Số này có hai chữ số tận cùng là 25, chia cho 3 dư 1, chia cho 4 cũng dư 1. Thế là tất cả các cách làm trước đều không vận dụng được. Các em có thể thấy lời giải theo một hướng khác.

Lời giải: Ta có $2003^2 = 4012009$; $2004^2 = 4016016$ nên $2003^2 < 4014025 < 2004^2$. Chứng tỏ 4014025 không là số chính phương.

Bài toán 9: Chứng minh $A = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ không là số chính phương với mọi số tự nhiên n khác 0.

Nhận xét: Đối với các em đã làm quen với dạng biểu thức này thì có thể nhận ra A + 1 là số chính phương (đây là bài toán quen thuộc với lớp 8). Các em lớp 6, lớp 7 cũng có thể chịu khó đọc lời giải.

Lời giải: Ta có:

$A + 1 = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 = (n^2 + 3n)^2 + 2(n2 + 3n) +1 = (n^2 + 3n +1)^2$.

Mặt khác:

$(n^2 + 3n)^2 < (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) = A$.

Điều này hiển nhiên đúng vì $n \geq 1$. Chứng tỏ: $(n^2 + 3n)^2 < A < A + 1 = (n^2 + 3n +1)^2$.

=> A không là số chính phương.

Các em có thể rèn luyện bằng cách thử giải bài toán sau:

Bài toán 10: Hãy tìm số tự nhiên n sao cho $A = n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n$ là số chính phương.

Gợi ý: Nghĩ đến $(n^2 - n + 1)^2$.

Bài toán 11: Chứng minh số $23^5 + 23^{12} + 23^{2003}$ không là số chính phương.

Gợi ý: Nghĩ đến phép chia cho 3 hoặc phép chia cho 4.

Bài toán 12: Có 1000 mảnh bìa hình chữ nhật, trên mỗi mảnh bìa được ghi một số trong các số từ 2 đến 1001 sao cho không có hai mảnh nào ghi số giống nhau. Chứng minh rằng: Không thể ghép tất cả các mảnh bìa này liền nhau để được một số chính phương.

Bài toán 13: Chứng minh rằng: Tổng các bình phương của bốn số tự nhiên liên tiếp không thể là số chính phương.

Gợi ý: Nghĩ tới phép chia cho 4.

Bài toán 14: Chứng minh rằng số $333^{333} + 555^{555} + 777^{777}$ không là số chính phương.

Gợi ý: Nghĩ đến phép chia cho … một chục (?)

Bài toán 15: Lúc đầu có hai mảnh bìa, một cậu bé tinh nghịch cứ cầm một mảnh bìa lên lại xé ra làm bốn mảnh. Cậu ta mong rằng cứ làm như vậy đến một lúc nào đó sẽ được số mảnh bìa là một số chính phương. Cậu ta có thực hiện được mong muốn đó không ?

Để kết thúc bài viết này, tôi muốn chúc các em học thật giỏi môn toán ngay từ đầu bậc THCS và cho tôi được nói riêng với các quý thầy cô: nguyên tắc chung để chứng minh một số tự nhiên không là số chính phương, đó là dựa vào một trong các điều kiện cần để một số là số chính phương (mà như các quý thầy cô đã biết: mọi điều kiện cần trên đời là dùng để … phủ định !). Từ đó các quý thầy cô có thể sáng tạo thêm nhiều bài toán thú vị khác.

BÀI 3: CHỨNG MINH MỘT SỐ LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Các bạn đã được giới thiệu các phương pháp chứng minh một số không phải là số chính phương trong TTT2 số 9. Bài viết này, tôi muốn giới thiệu với các bạn bài toán chứng minh một số là số chính phương.

Phương pháp 1: Dựa vào định nghĩa.

Ta biết rằng, số chính phương là bình phương của một số tự nhiên. Dựa vào định nghĩa này, ta có thể định hướng giải quyết các bài toán.

Bài toán 1: Chứng minh: Với mọi số tự nhiên n thì $a_n = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ là số chính phương.

Lời giải: Ta có:

$a_n = n(n + 1) (n + 2) (n + 3) + 1$

$= (n^2 + 3n) (n^2 + 3n + 2) + 1$

$= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1$

$= (n^2 + 3n + 1)^2$

Với n là số tự nhiên thì $n^2 + 3n + 1$ cũng là số tự nhiên, theo định nghĩa, a_n là số chính phương.

Bài toán 2: Chứng minh số: $\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ chữ số } 1}\underbrace{55\ldots5}_{n-1 \text{ chữ số } 5}6$ là số chính phương.

Lời giải:

Ta có:

$$A = 1\underbrace{1...1}_{n\text{ chữ số }1}\underbrace{55...5}_{n-1\text{ chữ số }5}6$$

$$= 1\underbrace{1...1}_{n\text{ chữ số }1}\underbrace{55...5}_{n\text{ chữ số }5} + 1$$

$$= \underbrace{11...1}_{2n\text{ chữ số }1} + \underbrace{4x11...1}_{n\text{ chữ số }1} + 1$$

$$= \frac{10^{2n}-1}{9} + 4x\frac{10^{n}-1}{9} + 1$$

$$= \frac{10^{2n} + 4x10^{n} + 4}{9} = \frac{(10^{n}+2)^{2}}{9}$$

$$= \left(\frac{\overbrace{10...02}^{n-1\text{ chữ số }0}}{3}\right)^{2} = \underbrace{3...3}_{n-1\text{ chữ số }3}4^{3}.$$

Vậy: $1\underbrace{1...1}_{n\text{ chữ số }1}\underbrace{55...5}_{n-1\text{ chữ số }5}6$ là số chính phương.

Phương pháp 2: Dựa vào tính chất đặc biệt.

Ta có thể chứng minh một tính chất rất đặc biệt: "Nếu a, b là hai số tự nhiên nguyên tố cùng nhau và a.b là một số chính phương thì a và b đều là các số chính phương".

Bài toán 3: Chứng minh rằng: Nếu m, n là các số tự nhiên thỏa mãn $3m^2 + m = 4n^2 + n$ thì m - n và 4m + 4n + 1 đều là số chính phương.

Lời giải:

Ta có: $3m^2 + m = 4n2 + n$

tương đương với $4(m^2 - n2) + (m - n) = m^2$

hay là $(m - n)(4m + 4n + 1) = m^2$ (*)

Gọi d là ước chung lớn nhất của m - n và 4m + 4n + 1 thì (4m + 4n + 1) + 4(m - n) chia hết cho d => 8m + 1 chí hết cho d.

Mặt khác, từ (*) ta có: m^2 chia hết cho d^2 => m chia hết cho d.

Từ 8m + 1 chia hết cho d và m chia hết cho d ta có 1 chia hết cho d => d = 1.

Vậy m - n và 4m + 4n + 1 là các số tự nhiên nguyên tố cùng nhau, thỏa mãn (*) nên chúng đều là các số chính phương. Cuối cùng xin gửi tới các bạn một số bài toán thú vị về số chính phương:

1) Chứng minh các số sau đây là số chính phương:

$= 2\,2\,4\underbrace{9\,9\ldots9}_{n-2 \text{ chữ số } 9}\,1\underbrace{0\,0\,0\ldots0}_{n \text{ chữ số } 0}\,5$

$= \underbrace{4\,4\ldots4}_{n \text{ chữ số } 4}\,\underbrace{8\,8\ldots8}_{n-1 \text{ chữ số } 8}\,9$

2) Cho các số nguyên dương a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau, thỏa mãn: 1/a + 1/b = 1/c. Hãy cho biết a + b có là số chính phương hay không ?
3) Chứng minh rằng, với mọi số tự nhiên n thì $3^n + 4$ không là số chính phương.
4) Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 2n + 2004$ là số chính phương.
5) Chứng minh: Nếu: $a = 2 + 2\sqrt{12n^2+1}$ và n là hai số tự nhiên thì a là số chính phương.

BÀI 4: MỘT DẠNG TOÁN VỀ ƯCLN VÀ BCNN

Trong chương trình số học lớp 6, sau khi học các khái niệm ước chung lớn nhất (ƯCLN) và bội chung nhỏ nhất (BCNN), các bạn sẽ gặp dạng toán tìm hai số nguyên dương khi biết một số yếu tố trong đó có các dữ kiện về ƯCLN và BCNN.

Phương pháp chung để giải:

1/ Dựa vào định nghĩa ƯCLN để biểu diễn hai số phải tìm, liên hệ với các yếu tố đã cho để tìm hai số.

2/ Trong một số trường hợp, có thể sử dụng mối quan hệ đặc biệt giữa ƯCLN, BCNN và tích của hai số nguyên dương a, b, đó là: **ab = (a, b).[a, b]**, trong đó (a, b) là ƯCLN và [a, b] là BCNN của a và b. Việc **chứng minh** hệ thức này không khó:

Theo định nghĩa ƯCLN, gọi d = (a, b) => a = md ; b = nd với m, n thuộc Z^+ ; (m, n) = 1 (*)

Từ (*) => ab = mnd^2 ; [a, b] = mnd

=> (a, b).[a, b] = d.(mnd) = mnd^2 = ab

=> ab = (a, b).[a, b] . (**)

Chúng ta hãy xét một số ví dụ minh họa.

Bài toán 1: Tìm hai số nguyên dương a, b biết [a, b] = 240 và (a, b) = 16. Lời giải: Do vai trò của a, b là như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử a ≤ b.

Từ (*), do (a, b) = 16 nên a = 16m ; b = 16n (m ≤ n do a ≤ b) với m, n thuộc Z^+ ; (m, n) = 1.

Theo định nghĩa BCNN:

[a, b] = mnd = mn.16 = 240 => mn = 15

=> m = 1 , n = 15 hoặc m = 3, n = 5 => a = 16, b = 240 hoặc a = 48, b = 80.

Chú ý: Ta có thể áp dụng công thức (**) để giải bài toán này: ab = (a, b).[a, b] => mn.16^2 = 240.16 suyy ra mn = 15.

Bài toán 2: Tìm hai số nguyên dương a, b biết ab = 216 và (a, b) = 6.

Lời giải: Lập luận như bài 1, giả sử a ≤ b.

Do (a, b) = 6 => a = 6m ; b = 6n với m, n thuộc Z^+ ; (m, n) = 1 ; m ≤ n.

Vì vậy: ab = 6m.6n = 36mn => ab = 216 tương đương mn = 6 tương đương m = 1, n = 6 hoặc m = 2, n = 3 tương đương với a = 6, b = 36 hoặcc là a = 12, b = 18.

Bài toán 3: Tìm hai số nguyên dương a, b biết ab = 180, [a, b] = 60.

Lời giải:

Từ (**) => (a, b) = ab/[a, b] = 180/60 = 3.

Tìm được (a, b) = 3, bài toán được đưa về dạng bài toán 2.

Kết quả: a = 3, b = 60 hoặc a = 12, b = 15.

Chú ý: Ta có thể tính (a, b) một cách trực tiếp từ định nghĩa ƯCLN, BCNN: Theo (*) ta có ab = mnd^2 = 180 ; [a, b] = mnd = 60 => d = (a, b) = 3.

Bài toán 4: Tìm hai số nguyên dương a, b biết a/b = 2,6 và (a, b) = 5.

Lời giải: Theo (*), (a, b) = 5 => a = 5m ; b = 5n với m, n thuộc Z^+ ; (m, n) = 1.

Vì vậy: a/b = m/n = 2,6 => m/n = 13/5 tương đương với m = 13 và n = 5 hay a = 65 và b = 25.

Chú ý: phân số tương ứng với 2,6 phải chọn là phân số tối giản do (m, n) = 1.

Bài toán 5: Tìm a, b biết a/b = 4/5 và [a, b] = 140.

Lời giải: Đặt (a, b) = d. Vì , a/b = 4/5 , mặt khác (4, 5) = 1 nên a = 4d, b = 5d.

Lưu ý [a, b] = 4.5.d = 20d = 140 => d = 7 => a = 28 ; b = 35.

Bài toán 6: Tìm hai số nguyên dương a, b biết a + b = 128 và (a, b) = 16.

Lời giải: Lập luận như bài 1, giả sử a ≤ b.

Ta có: a = 16m ; b = 16n với m, n thuộc Z^+ ; (m, n) = 1 ; m ≤ n.

Vì vậy: a + b = 128 tương đương 16(m + n) = 128 tương đương m + n = 8

Tương đương với m = 1, n = 7 hoặc m = 3, n = 5 hay a = 16, b = 112 hoặc a = 48, b = 80

Bài toán 7: Tìm a, b biết a + b = 42 và [a, b] = 72.

Lời giải: Gọi d = (a, b) => a = md ; b = nd với m, n thuộc Z^+ ; (m, n) = 1.

Không mất tính tổng quát, giả sử a ≤ b => m ≤ n.

Do đó: a + b = d(m + n) = 42 (1)

[a, b] = mnd = 72 (2)

=> d là ước chung của 42 và 72 => d thuộc {1 ; 2 ; 3 ; 6}.

Lần lượt thay các giá trị của d vào (1) và (2) để tính m, n ta thấy chỉ có trường hợp d = 6 => m + n = 7 và mn = 12 => m = 3 và n = 4 . (thỏa mãn các điều kiện của m, n). Vậy d = 6 và a = 3.6 = 18 , b = 4.6 = 24

Bài toán 8: Tìm a, b biết a - b = 7, [a, b] = 140.

Lời giải: Gọi d = (a, b) => a = md ; b = nd với m, n thuộc Z^+ ; (m, n) = 1.

Do đó: a - b = d(m - n) = 7 (1')

[a, b] = mnd = 140 (2')

=> d là ước chung của 7 và 140 => d thuộc {1 ; 7}.

Thay lần lượt các giá trị của d vào (1') và (2') để tính m, n ta được kết quả duy nhất: d = 7 => m - n = 1 và mn = 20 => m = 5, n = 4

Vậy d = 7 và a = 5.7 = 35 ; b = 4.7 = 28 .

Bài tập tự giải:

1/ Tìm hai số a, b biết 7a = 11b và (a, b) = 45.

2/ Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 448, ƯCLN của chúng bằng 16 và chúng có các chữ số hàng đơn vị giống nhau.
3/ Cho hai số tự nhiên a và b. Tìm tất cả các số tự nhiên c sao cho trong ba số, tích của hai số luôn chia hết cho số còn lại.

BÀI 5: NGUYÊN LÍ ĐI - RÍCH - LÊ

Nguyên lí Đi-rích-lê phát biểu như sau: "Nếu có m vật đặt vào n cái ngăn kéo và m > n thì có ít nhất một ngăn kéo chứa ít nhất hai vật". Nguyên lí Đi-rích-lê chỉ giúp ta chứng minh được sự tồn tại "ngăn kéo" chứa ít nhất hai vật mà không chỉ ra được đó là "ngăn kéo" nào. Các bạn hãy làm quen việc vận dụng nguyên lí qua các bài toán sau đây.

Bài toán 1: Chứng minh rằng trong 11 số tự nhiên bất kì bao giờ cũng tồn tại ít nhất 2 số có hiệu chia hết cho 10.

Lời giải:
Với 11 số tự nhiên khi chia cho 10 ta được 11 số dư, mà một số tự nhiên bất kì khi chia cho 10 có 10 khả năng dư là 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... ; 9.
Vì có 11 số dư mà chỉ có 10 khả năng dư, theo nguyên lí Đi-rích-lê, tồn tại ít nhất 2 số khi chia cho 10 có cùng số dư do đó hiệu của chúng chia hết cho 10 (đpcm).

Bài toán 2: Chứng minh rằng tồn tại số có dạng 19941994...199400...0 chia hết cho 1995.

Lời giải:
Xét 1995 số có dạng: 1994 ; 19941994 ; ... ; .
Nếu một trong các số trên chia hết cho 1995 thì dễ dàng có đpcm.
Nếu các số trên đều không chia hết cho 1995 thì khi chia từng số cho 1995 sẽ chỉ có 1994 khả năng dư là 1 ; 2 ; 3 ; ... ; 1994.
Vì có 1995 số dư mà chỉ có 1994 khả năng dư, theo nguyên lí Đi-rích-lê tồn tại ít nhất 2 số khi chia cho 1995 có cùng số dư, hiệu của chúng chia hết cho 1995. Giả sử hai số đó là:
Khi đó: = 1994...199400...0 chia hết cho 1995 (đpcm).

Bài toán 3: Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên k sao cho (1999^k - 1) chia hết cho104.

Lời giải: Xét 104 + 1 số có dạng:
19991 ; 19992 ; ... ; 1999104 + 1.
Lập luận tương tự bài toán 2 ta được:
(1999m - 1999n) chia hết cho 104 (m > n)
hay 1999n (1999m-n - 1) chia hết cho 104
Vì 1999n và 104 nguyên tố cùng nhau, do đó (1999m-n - 1) chia hết cho 104.
Đặt m - n = k => 1999^k - 1 chia hết cho 104 (đpcm).

Bài toán 4: Chứng minh rằng tồn tại một số chỉ viết bởi hai chữ số chia hết cho 2003.

Lời giải: Xét 2004 số có dạng 1 ; 11 ; 111 ; ... ;

Lập luận tương tự bài toán 2 ta được:

hay 11...100...0 chia hết cho 2003 (đpcm).

Một số bài toán tự giải:

Bài toán 5: Chứng minh rằng mọi số nguyên tố p ta có thể tìm được một số được viết bởi hai chữ số chia hết cho p.

Bài toán 6: Chứng minh rằng nếu một số tự nhiên không chia hết cho 2 và 5 thì tồn tại bội của nó có dạng: 111...1.

Bài toán 7: Chứng minh rằng tồn tại số có dạng 1997k (k thuộc N) có tận cùng là 0001.

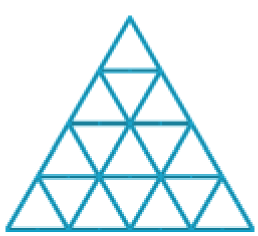
Bài toán 8: Chứng minh rằng nếu các số nguyên m và n nguyên tố cùng nhau thì tìm được số tự nhiên k sao cho mk - 1 chia hết cho n.

Các bạn hãy đón đọc số sau: Nguyên lí Đi-rích-lê với những bài toán hình học thú vị.

BÀI 6: NGUYÊN LÍ ĐI-RÍCH-LÊ & NHỮNG BÀI TOÁN HÌNH HỌC THÚ VỊ

Nguyên lí có thể mở rộng như sau: Nếu có m vật đặt vào n cái ngăn kéo và m > k.n thì có ít nhất một ngăn kéo chứa ít nhất k + 1 vật. Với mở rộng này, ta còn có thể giải quyết thêm nhiều bài toán khác. Sau đây xin giới thiệu để bạn đọc làm quen việc vận dụng nguyên lí Đi-rích-lê với một số bài toán hình học.

Bài toán 1: Trong tam giác đều có cạnh bằng 4 (đơn vị độ dài, được hiểu đến cuối bài viết) lấy 17 điểm. Chứng minh rằng trong 17 điểm đó có ít nhất hai điểm mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá 1.

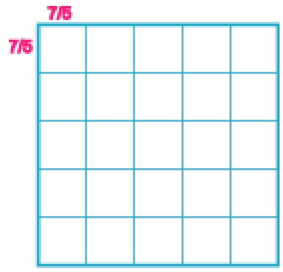


Hình 1

Lời giải: Chia tam giác đều có cạnh bằng 4 thành 16 tam giác đều có cạnh bằng 1 (hình 1). Vì 17 > 16, theo nguyên lí Đi-rích-lê, tồn tại ít nhất một tam giác đều cạnh bằng 1 có chứa ít nhất 2 điểm trong số 17 điểm đã cho. Khoảng cách giữa hai điểm đó luôn không vượt quá 1 (đpcm).

Bài toán 2: Trong một hình vuông cạnh bằng 7, lấy 51 điểm. Chứng minh rằng có 3 điểm trong 51 điểm đã cho nằm trong một hình tròn có bán kính bằng 1.

Lời giải: Chia hình vuông cạnh bằng 7 thành 25 hình vuông bằng nhau, cạnh của mỗi hình vuông nhỏ bằng 5/7 *(hình 2)*.



Hình 2

Vì 51 điểm đã cho thuộc 25 hình vuông nhỏ, mà 51 > 2.25 nên theo nguyên lí Đi-rích-lê, có ít nhất một hình vuông nhỏ chứa ít nhất 3 điểm (3 = 2 + 1) trong số 51 điểm đã cho. Hình vuông cạnh bằng có bán kính đường tròn ngoại tiếp là:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2+\left(\frac{7}{5}\right)^2}}{2}=\sqrt{\frac{98}{100}}<1.$$

Vậy bài toán được chứng minh. Hình tròn này chính là hình tròn bán kính bằng 1, chứa hình vuông ta đã chỉ ra ở trên.

Bài toán 3: Trong mặt phẳng cho 2003 điểm sao cho cứ 3 điểm bất kì có ít nhất 2 điểm cách nhau một khoảng không vượt quá 1. Chứng minh rằng: tồn tại một hình tròn bán kính bằng 1 chứa ít nhất 1002 điểm.

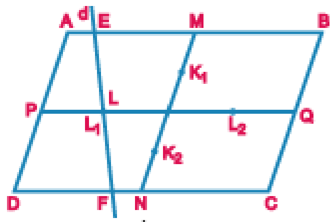
Lời giải: Lấy một điểm A bất kì trong 2003 điểm đã cho, vẽ đường tròn C_1 tâm A bán kính bằng 1.

+ Nếu tất cả các điểm đều nằm trong hình tròn C1 thì hiển nhiên có đpcm.

+ Nếu tồn tại một điểm B mà khoảng cách giữa A và B lớn hơn 1 thì ta vẽ đường tròn C_2 tâm B bán kính bằng 1.

Khi đó, xét một điểm C bất kì trong số 2001 điểm còn lại. Xét 3 điểm A, B, C, vì AB > 1 nên theo giả thiết ta có AC $\leq$ 1 hoặc BC $\leq$ 1. Nói cách khác, điểm C phải thuộc C_1 hoặc C_2. => 2001 điểm khác B và A phải nằm trong C_1 hoặc C_2. Theo nguyên lí Đi-rích-lê ta có một hình tròn chứa ít nhất 1001 điểm. Tính thêm tâm của hình tròn này thì hình tròn này chính là hình tròn bán kính bằng 1 chứa ít nhất 1002 điểm trong 2003 điểm đã cho.

Bài toán 4: Cho hình bình hành ABCD, kẻ 17 đường thẳng sao cho mỗi đường thẳng chia ABCD thành hai hình thang có tỉ số diện tích bằng 1/3 . Chứng minh rằng, trong 17 đường thẳng đó có 5 đường thẳng đồng quy.



Hình 3

Lời giải: Gọi M, Q, N, P lần lượt là các trung điểm của AB, BC, CD, DA *(hình 3).*
Vì ABCD là hình bình hành => MN // AD // BC ; PQ // AB // CD.
Gọi d là một trong 17 đường thẳng đã cho. Nếu d cắt AB tại E ; CD tại F ; PQ tại L thì LP, LQ lần lượt là đường trung bình của các hình thang AEFD, EBCF. Ta có: S(AEFD) / S(EBCF) = 1/3 hoặc S(EBCF) / S(EBFC) = 1/3 => LP / LQ = 1/3 hoặc là LQ / LP = 1/3.
Trên PQ lấy hai điểm L_1, L_2 thỏa mãn điều kiện $L_1P / L_1Q = L_2Q / L_2P = 1/3$ khi đó L trùng với L_1 hoặc L trùng với L_2. Nghĩa là nếu d cắt AB và CD thì d phải qua L_1 hoặc L_2.
Tương tự, trên MN lấy hai điểm K_1, K_2 thỏa mãn điều kiện $K_1M / K_1N = K_2N / K_2M = 1/3$ khi đó nếu d cắt AD và BC thì d phải qua K_1 hoặc K_2.
Tóm lại, mỗi đường thẳng trong số 17 đường thẳng đã cho phải đi qua một trong 4 điểm L_1 ; L_2 ; K_1 ; K_2.
Vì 17 > 4.4 nên theo nguyên lí Đi-rích-lê, trong 17 đường thẳng đó sẽ có ít nhất 5 đường thẳng (5 = 4 + 1) cùng đi qua một trong 4 điểm L_1 ; L^2 ; K_1 ; K_2 (5 đường thẳng đồng quy, đpcm).
Sau đây là một số bài tập tương tự.

Bài 1: Trong hình chữ nhật có kích thước 3 x 5, lấy 7 điểm bất kì. Chứng minh rằng có hai điểm cách nhau một khoảng không vượt quá $\sqrt{5}$.

Bài 2: Trong mặt phẳng tọa độ, cho ngũ giác lồi có tất cả các đỉnh là các điểm nguyên (có hoành độ và tung độ là số nguyên). Chứng minh rằng trên cạnh hoặc bên trong ngũ giác còn ít nhất một điểm nguyên khác nữa.

Bài 3: Tờ giấy hình vuông có cạnh bé nhất là bao nhiêu để có thể cắt ra được 5 hình tròn có bán kính bằng 1.

Bài 4: Trên một tờ giấy kẻ ô vuông, chọn 101 ô bất kì. Chứng minh rằng trong 101 ô đó có ít nhất 26 ô không có điểm chung.

BÀI 7: BÀN LUẬN VỀ BÀI TOÁN "BA VỊ THẦN"

Chúng ta đều đã biết bài toán thú vị: "Ba vị thần" sau:
Ngày xưa, trong một ngôi đền cổ có 3 vị thần giống hệt nhau. Thần thật thà (TT) luôn luôn nói thật, thần dối trá (DT) luôn luôn nói dối và thần khôn ngoan (KN) lúc nói thật lúc nói dối. Các vị thần vẫn trả lời câu hỏi của khách đến lễ đền nhưng không ai

xác định được chính xác các vị thần. Một hôm có một nhà hiền triết từ xa đến thăm đền. Để xác định được các vị thần, ông hỏi thần bên trái:

- Ai ngồi cạnh ngài ?
- Đó là thần TT (1)

Ông hỏi thần ngồi giữa:

- Ngài là ai ?
- Ta là thần KN (2)

Sau cùng ông hỏi thần bên phải:

- Ai ngồi cạnh ngài ?
- Đó là thần DT (3)

Nhà hiền triết thốt lên:

- Tôi đã xác định được các vị thần.

Hỏi nhà hiền triết đã suy luận như thế nào ?

Lời giải: Gọi 3 vị thần theo thứ tự từ trái sang phải là: A, B, C.
Từ câu trả lời (1) => A không phải là thần TT.
Từ câu trả lời (2) => B không phải là thần TT.
Vậy C là thần TT. Theo (3) đ B là thần DT đ A là thần KN

Nhận xét: Cả 3 câu hỏi đều tập trung xác định thần B, phải chăng đó là cách hỏi "thông minh" của nhà hiền triết để tìm ra 3 vị thần ? Câu trả lời không phải, mà là nhà hiền triết gặp may do 3 vị thần đã trả lời câu hỏi không "khôn ngoan" !
Nếu 3 vị thần trả lời "khôn ngoan" nhất mà vẫn đảm bảo tính chất của từng vị thần thì sau 3 câu hỏi, nhà hiền triết cũng không thể xác định được vị thần nào. Ta sẽ thấy rõ hơn qua phân tích sau về 2 cách hỏi của nhà hiền triết:

1. Hỏi thần X:

- Ngài là ai ?

Có 3 khả năng trả lời sau:

- Ta là thần TT => không xác định được X (Cách trả lời khôn nhất)
- Ta là thần KN => X là thần KN hoặc DT
- Ta là thần DT => X là KN

2. Hỏi thần X:

- Ai ngồi cạnh ngài ?

Cũng có 3 khả năng trả lời sau:

- Đó là thần TT => thần X khác thần TT
- Đó là thần KN => không xác định được X (cách trả lời khôn nhất)
- Đó là thần DT => không xác định được X (cách trả lời khôn nhất)

Trong cả 2 cách hỏi của nhà hiền triết đều có cách trả lời khiến nhà hiền triết không có được một thông tin nào về ba vị thần thì làm sao mà xác định được các vị thần. Nếu gặp may (do sự trả lời ngờ nghệch) thì chỉ cần sau 2 câu hỏi nhà hiền triết cũng đủ để xác định 3 vị thần. Các bạn tự tìm xem trường hợp đó các câu trả lời của các vị thần là như thế nào nhé.

Bài toán cổ này thật là hay và dí dỏm, nhưng nếu các vị thần trả lời theo các phương án “khôn ngoan” nhất thì có cách nào để xác định được 3 vị thần sau 1 số ít nhất câu hỏi được không ?
Rõ ràng là không thể đặt câu hỏi như nhà hiền triết được.
Phải hỏi như thế nào để thu được nhiều thông tin nhất ?
Bây giờ ta đặt vấn đề như sau:
Mỗi lần hỏi chỉ được hỏi 1 vị thần và chính vị đó trả lời. Cần hỏi như thế nào để sau một số ít nhất câu hỏi ta xác định được các vị thần. Bài toán rõ ràng là không dễ chút nào, nhưng tôi tin rằng các bạn sẽ tìm ra nhiều phương án tối ưu đấy ! Sau đây là một phương án của tôi.

Hỏi thần A:
- Ngài là thần KN ?
- Nhận được câu trả lời.

Hỏi thần B:
- Ngài là thần KN ?
- Nhận được câu trả lời.

Sau đó tôi chỉ cần hỏi thêm 1 hoặc 2 câu nữa là xác định được chính xác 3 vị thần.
Như vậy số câu hỏi nhiều nhất là 4. Các bạn có thể rút số câu hỏi xuống dưới 4 được không ?
Xin mời các bạn hãy giải trí bài toán này bằng một phương án tuyệt vời nào đó (Nhớ là chỉ hỏi một thần và chính vị đó trả lời)