CHUYÊN ĐỀ TOÁN 6 (BD HSG)
DÃY SỐ VIẾT THEO QUI LUẬT

I. Phương pháp dự đoán và quy nạp:

Trong một số trường hợp khi gặp bài toán tính tổng hữu hạn

$Sn = a_1 + a_2 + ... a_n$ (1)

Bằng cách nào đó ta biết được kết quả (dự đoán, hoặc bài toán chứng minh khi đã cho biết kết quả). Thì ta nên sử dụng phương pháp này và hầu như thế nào cũng chứng minh được.

Ví dụ 1: Tính tổng $S_n = 1+3+5 +... + (2n -1)$

Thử trực tiếp ta thấy : $S_1 = 1$

$S_2 = 1 + 3 = 2^2$

$S_3 = 1+ 3+ 5 = 9 = 3^2$

... ...

Ta dự đoán $Sn = n^2$

Với n = 1; 2; 3 ta thấy kết quả đúng

Giả sử với $n = k$ ($k \geq 1$) ta có $S_k = k^2$ (2)

Ta cần phải chứng minh $S_k + 1 = (k +1)^2$ (3)

Thật vậy cộng 2 vế của (2) với $2k +1$ ta có

$1+3+5 +... + (2k – 1) + (2k +1) = k^2 + (2k +1)$

Vì $k^2 + (2k +1) = (k +1)^2$ nên ta có (3) tức là $S_{k+1} = (k +1)^2$

Theo nguyên lý quy nạp bài toán được chứng minh

Vậy $Sn = 1+3 + 5 + ... + (2n -1) = n^2$

Tương tự ta có thể chứng minh các kết quả sau đây bằng phương pháp quy nạp toán học.

1, $1 + 2+3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2, $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3, $1^3+2^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

4, $1^5 + 2^5 + ... + n^5 = \frac{1}{12}.n^2 (n + 1)^2 (2n^2 + 2n – 1)$

II. Phương pháp khử liên tiếp:

Giả sử ta cần tính tổng (1) mà ta có thể biểu diễn a_i , i = 1,2,3...,n , qua hiệu hai số hạng liên tiếp của 1 dãy số khác, chính xác hơn , giả sử : $a_1 = b_1 - b_2$

$a_2 = b_2 - b_3$

....

$a_n = b_n - b_{n+1}$

Khi đó ta có ngay:

$$S_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots\ldots + (b_n - b_{n+1})$$

$$= b_1 - b_{n+1}$$

Ví dụ 2: Tính tổng:

$$S = \frac{1}{10.11} + \frac{1}{11.12} + \frac{1}{12.13} + \ldots\ldots + \frac{1}{99.100}$$

Ta có : $\frac{1}{10.11} = \frac{1}{10} - \frac{1}{11}, \ \frac{1}{11.12} = \frac{1}{11} - \frac{1}{12}, \ldots, \ \frac{1}{99.100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$

Do đó :

$$S = \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \ldots\ldots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{10} - \frac{1}{100} = \frac{9}{100}$$

- Dạng tổng quát

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)} \quad (n > 1)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Ví dụ 3: Tính tổng

$$S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Ta có $S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}\right) + \ldots\ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Ví dụ 4: Tính tổng

$S_n = 1! + 2.2! + 3.3! + ... + n.n!$ ($n! = 1.2.3....n$)

Ta có : $1! = 2! - 1!$

$2.2! = 3! - 2!$

$3.3! = 4! - 3!$

....

$n.n! = (n + 1) - n!$

Vậy $S_n = 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + ... + (n+1)! - n!$

$= (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1$

Ví dụ 5 : tính tổng

$$S_n = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + ... + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$$

Ta có : $\frac{2i+1}{[i(i+1)]^2} = \frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2}$; $\quad i = 1 ; 2 ; 3; ....; n$

Do đó $\quad S_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + ... + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

III. Phương pháp giải phương trình với ẩn là tổng cần tính:

Ví dụ 6 : Tính tổng

$S = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{100}$ (4)

Ta viết lại S như sau :

$S = 1 + 2(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{99})$

$S = 1 + 2(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{99} + 2^{100} - 2^{100})$

=> $S = 1 + 2(S - 2^{100})$ (5)

Từ (5) suy ra $S = 1 + 2S - 2^{101}$

⇨ $S = 2^{101} - 1$

Ví dụ 7: tính tổng

$S_n = 1 + p + p^2 + p^3 + ... + p^n$ ($p \neq 1$)

Ta viết lại S_n dưới dạng sau :

$S_n = 1+p\,(1+p+p^2+....+p^{n-1})$

$S_n = 1 + p\,(1+p+p^2+.....+p^{n-1}+p^n-p^n)$

⇨ $S_n = 1+p\,(S_n - p^n)$

⇨ $S_n = 1 + p.S_n - p^{n+1}$

⇨ $S_n\,(p-1) = p^{n+1} - 1$

⇨ $S_n = \dfrac{P^{n+1}-1}{p-1}$

<u>Ví dụ 8</u> : Tính tổng

$S_n = 1+2p+3p^2+....+(n+1)p^n$, $(p \neq 1)$

Ta có : $p.S_n = p+2p^2+3p^3+.....+(n+1)p^{n+1}$

$= 2p - p + 3p^2 - p^2 + 4p^3 - p^3 + ... + (n+1)p^n - p^n + (n+1)p^n - p^n + (n+1)p^{n+1}$

$= (2p+3p^2+4p^3+......+(n+1)p^n) - (p+p+p+....p^n) + (n+1)p^{n+1}$

$= (1+2p+3p^2+4p^3+.......+(n+1)p^n) - (1+p+p^2+....+p^n) + (n+1)p^{n+1}$

$p.S_n = S_n - \dfrac{P^{n+1}-1}{P-1} + (n+1)P^{n+1}$ (theo VD 7)

Lại có $(p-1)S_n = (n+1)p^{n+1} - \dfrac{p^{n+1}-1}{P-1}$

⇨ $S_n = \dfrac{(n+1)P^{n+1}}{p-1} - \dfrac{p^{n+1}-1}{(P-1)^2}$

<u>IV. Phương pháp tính qua các tổng đã biết</u>

- Các kí hiệu : $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$
- Các tính chất :

1, $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

2, $\sum_{i=1}^{n} a.a_i = a\sum_{i=1}^{n} a_i$

<u>Ví dụ 9</u> : Tính tổng :

$S_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n+1)$

Ta có : $S_n = \sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \sum_{i=1}^{n}(i^2+i) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i$

Vì :

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+....+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(Theo I)

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

cho nên : $S_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

<u>Ví dụ 10 :</u> Tính tổng :

S_n =1.2+2.5+3.8+.......+n(3n-1)

ta có : $S_n = \sum_{i=1}^{n} i(3i-1) = \sum_{i=1}^{n}(3i^2 - i)$

$$= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i==1}^{n} i$$

Theo (I) ta có :

$S_n = \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = n^2(n+1)$

<u>Ví dụ 11</u> . Tính tổng

$S_n = 1^{3+} + 2^3 + 5^3 + ... + (2n+1)^3$

ta có :

$S_n = [(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ...+(2n+1)^3] - [2^3 + 4^3 + 6^3 + ...+(2n)^3]$

$= [1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + (2n+1)^3] - 8(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ...+ n^3)$

$S_n = \frac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{4} - \frac{8n^2(n+1)^2}{4}$ (theo (I) – 3)

$=(n+1)^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2$

$= (n+1)^2(2n^2+4n+1)$

V/ Vận dụng trực tiếp công thức tính tổng các số hạng của dãy số cách đều (Học sinh lớp 6)

- Cơ sở lý thuyết:

+ Để đếm số hạng của 1 dãy số mà 2 số hạng liên tiếp của dãy cách nhau cùng 1 số đơn vị , ta dùng công thức:

Số số hạng = (số cuối – số đầu) : (khoảng cách) + 1

+ Để tính tổng các số hạng của một dãy số mà 2 số hạng liên tiếp cách nhau cùng 1 số đơn vị , ta dùng công thức:

Tổng = (số đầu – số cuối) .(số số hạng) :2

Ví dụ 12 :

Tính tổng A = 19 +20 +21 +.... + 132

Số số hạng của A là : (132 – 19) : 1 +1 = 114 (số hạng)m

A = 114 (132 +19) : 2 = 8607

Ví dụ 13 : Tính tổng

B = 1 +5 +9 +.......+ 2005 +2009

số số hạng của B là (2009 – 1) : 4 + 1 = 503

B = (2009 +1) .503 :2 = 505515

VI / Vân dụng 1 số công thức chứng minh được vào làm toán

Ví dụ 14 : Chứng minh rằng : k (k+1) (k+20 -9k-1)k(k+1) = 3k (k +1)

Từ đó tính tổng S = 1..2+2.3 + 3.4 +...... + n (n + 1)

Chứng minh : cách 1 : VT = k(k+1)(k+2) –(k-1) k(k+1)

= k(k+1) $[(k+2)-(k-1)]$ = k (k+1) .3 = 3k(k+1)

Cách 2 : Ta có k (k +1) = k(k+1).$\frac{(k+2)-(k-1)}{3}$

$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} - \frac{k(k+1)(k-1)}{3}$ *

⇨ 3k (k-1) = k (k+1)(k+2) – (k-1) k(k+1)

=> 1.2 = $\frac{1.2.3}{3} - \frac{0.1.2}{3}$

$2.3 = \frac{2.3.4}{3} - \frac{1.2.3}{3}$

....

$n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$

S = $\frac{-1.2.0}{3} + \frac{(n+2)n(n+1)}{3} = \frac{(n+1)n(n+2)}{3}$

Ví dụ 15: Chứng minh rằng:

k (k+1) (k+2) (k+3) – (k-1) k(k+1) (k+2) =4k (k+1) (k+2)

từ đó tính tổng S = 1.2 .3 + 2.3 .4 +3.4.5 +.... + n(n+1) (n+2)

Chứng minh : VT = k(k+1) (k+2) $[(k+3)-(k-1)]$

$= k(k+1) (k +2) .4$

Rút ra: $k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} - \frac{(k-1)k(k+1)(k+2)}{4}$

Áp dụng: $1.2.3 = \frac{1.2.3.4}{4} - \frac{0.1.2.3}{4}$

$2.3.4 = \frac{2.3.4.5}{4} - \frac{1.2.3.4}{4}$

....

$n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$

Cộng vế với vế ta được $S = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

<u>* Bài tập đề nghị:</u>

Tính các tổng sau

1, $B = 2+ 6 +10 + 14 + ... + 202$

2, a, $A = 1+2 +2^2 +2^3 +.....+ 2^{6.2} + 2^{6\ 3}$

b, $S = 5 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^{99} + 5^{100}$

c, $C = 7 + 10 + 13 + ... + 76$

3, $D = 49 +64 + 81+ .... + 169$

4, $S = 1.4 + 2 .5 + 3.6 + 4.7 +.... + n(n +3)$, $n = 1,2,3 ,....$

5, $S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{99.100}$

6, $S = \frac{4}{5.7} + \frac{4}{7.9} + ... + \frac{4}{59.61}$

7, $A = \frac{5}{11.16} + \frac{5}{16.21} + \frac{5}{21.26} + ... + \frac{5}{61.66}$

8, $M = \frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^{2005}}$

9, $S_n = \frac{1}{1.2.3.} + \frac{1}{2.3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

10, $S_n = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + ... + \frac{2}{98.99.100}$

11, $S_n = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

12, M = 9 + 99 + 999 +...... + $\underbrace{99.....\ .....9}_{\text{50 chữ số 9}}$

13, Cho: $S_1 = 1+2$ $\qquad S_3 = 6+7+8+9$

$S_2 = 3+4+5$ $\qquad S_4 = 10 + 11 + 12 + 13 + 14$

Tính S_{100} =?

Trong quá trình bồi dưỡng học sinh giỏi , tôi đã kết hợp các dạng toán có liên quan đến dạng tính tổng để rèn luyện cho các em , chẳng hạn dạng toán tìm x :

14, a, (x+1) + (x+2) + (x+3) +...... + (x+100) = 5070

b, 1 + 2 + 3 + 4 +............+ x = 820

c, $1 + \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+......+\frac{2}{x(x+1)}=1\frac{2013}{2015}$

Hay các bài toán chứng minh sự chia hết liên quan

15, Chứng minh : a, $A = 4+ 2^2 +2^3 +2^4 +..... + 2^{20}$ là luỹ thừa của 2

b, $B =2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{60} \vdots 3 ; 7; 15$

c, $C = 3 + 3^3 +3^5 + ...+ 3^{2015} \vdots 13 ; 41$

d, $D = 11^9 + 11^8 +11^7 +......+ 11 + 1 \vdots 5$