CHUYÊN ĐỀ: ƯCLN, BCNN

BÀI 1: CÁC TÍNH CHẤT VÀ BÀI TOÁN CƠ BẢN VỀ ƯCLN VÀ BCNN

A. CÁC KÝ HIỆU

1. Ước và Bội của một số nguyên

Với a, b $\in Z$ và b $\neq$ 0. Nếu có số nguyên q sao cho a = b.q thì ta nói a chia hết cho b. Ta còn nói a là bội của b và b là ước của a.

2. Nhận xét

- Nếu a = b.q thì ta nói a chia cho b được q và viết a : b = q.
- Số 0 là bội của mọi số nguyên khác 0. Số 0 không phải là ước của bất kì số nguyên nào.
- Các số 1 và -1 là ước của mọi số nguyên.

3. Liên hệ phép chia có dư với phép chia hết.

Nếu số tự nhiên a chia cho số tự nhiên b được số dư là k thì số (a – k) $\vdots$ b

4. Ước chung của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó.

Ước chung của các số a, b, c được kí hiệu là ƯC (a, b, c).

5. Bội chung của hai hay nhiều số là bội của tất cả các số đó.

Bội chung của các số a, b, c được kí hiệu là: BC (a, b, c).

6. Ước chung lớn nhất. Bội chung nhỏ nhất

- Ước chung lớn nhất của hai hay nhiều số là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó.
- Bội chung nhỏ nhất của hai hay nhiều số là số nhỏ nhất khác không trong tập hợp các bội chung của các số đó.

B. CÁC TÍNH CHẤT

- $(a,1)=1;[a,1]=a$
- Nếu $a \vdots b \rightarrow (a,b)=b;[a,b]=a$
- Nếu a, b nguyên tố cùng nhau $\rightarrow (a,b)=1;[a,b]=a.b$
- $UC(a,b)=U(ucln(a,b));BC(a,b)=B(bcnn(a,b))$
- Nếu $(a,b)=d;\begin{cases} a=dm \\ b=dn \end{cases} \rightarrow (m,n)=1; vd:(10,15)=5;\begin{cases} 10=2.5 \\ 15=3.5 \end{cases} \rightarrow (2,3)=1$
- Nếu $[a,b]=c;\begin{cases} c=am \\ c=bn \end{cases} \rightarrow (m,n)=1; vd:[10,15]=30;\begin{cases} 30=10.3 \\ 30=15.2 \end{cases} \rightarrow (2,3)=1$
- $ab=(a,b).[a,b]$

B. BÀI TẬP

Bài 1: Các mệnh đề sau đúng hay sai. Hãy chứng minh

a. Hai số tự nhiên lẻ liên tiếp thì nguyên tố cùng nhau

b. $2n+5;3n+7$ nguyên tố cùng nhau với $n\in N$

Lời giải

a. Gọi hai số tự nhiên lẻ liên tiếp là: 2n + 1 và 2n + 3 ($n\in N$)

Đặt $d=(2n+1;2n+3)\rightarrow \begin{cases}2n+1 \vdots d\\ 2n+3 \vdots d\end{cases} \rightarrow (2n+3)-(2n-1)=2 \vdots d \rightarrow \left[\begin{array}{l}d=1\\ d=2\end{array}\right.$

Vì 2n + 1 và 2n + 3 là các số lẻ nên d là số lẻ $\rightarrow d=1$

b. Đặt $d=(2n+5;3n+7)\rightarrow \begin{cases}2n+5 \vdots d\\ 3n+7 \vdots d\end{cases} \rightarrow n+2 \vdots d \rightarrow \begin{cases}2n+4 \vdots d\\ 2n+5 \vdots d\end{cases} \rightarrow 1 \vdots d \rightarrow d=1 \rightarrow dpcm$

Bài 2: Tìm hai số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng = 162 và ƯCLN của chúng bằng 18

Lời giải

Gọi hai số ần tìm là a và b. Giả sử $a\leq b$

Ta có: $a+b=162;(a,b)=18$

Đặt $\begin{cases}a=18m\\ b=18n\end{cases} \rightarrow \begin{cases}(m,n)=1\\ m\leq n\end{cases}$

Từ $a+b=162 \rightarrow 18(m+n)=162 \leftrightarrow m+n=9$

Lập bảng:

m	1	2	3	4
n	8	7	6	5
a	18	36	loai	72
b	144	126		90

Do (m, n) = 1

Kết luận: Các số cần tìm là: $(18,144);(36,126);(72,90)$

Bài 3: Cho $a=4n+3;b=5n+1(n\in N)$, biết rằng a, b không nguyên tố cùng nhau.

Tìm ƯCLN (a,b)

Lời giải

Đặt $(a,b)=d \rightarrow d\neq 1$

$\begin{cases}a=4n+3 \vdots d\\ b= \quad \vdots\end{cases} \rightarrow 5(4n+3)-4(5n+1)\vdots d \rightarrow 11 \vdots d \rightarrow \left[\begin{array}{l}d=1(loai)\\ 5n+1\ d\end{array}\right. \rightarrow d=11 \rightarrow (a,b)=11$

Bài 4: Cho hai số tự nhiên lớn hơn 100, biết ƯCLN của hai số đó là 45 và số lớn là 270. Hãy tìm số nhỏ?

Lời giải

$a<b;a>100;(a,b)=45;b=270$

Đặt $\left.\begin{matrix} a=45m \\ b=45.6 \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} (m,6)=1 \\ m<6 \end{cases} \to \begin{cases} m=1(loai) \\ m=5(tm) \end{cases} \to a=5.45=225$

Bài 5: Tìm hai số nhỏ hơn 200, biết hiệu của chúng bằng 90 và ƯCLN là 15

Lời giải

Gọi hai số cần tìm là a, b $(a,b\in N;a,b<200)$

Ta có: $a-b=90;(a,b)=15$

Đặt $\left.\begin{matrix} a=15m \\ b=15.n \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} (m,n)=1 \\ 15(m-n)=90 \end{cases} \to \begin{cases} (m,n)=1 \\ m-n=6 \end{cases}$

Lại có: $a,b<200 \to \begin{cases} 15m<200 \\ 15n<200 \end{cases} \to \begin{cases} m\le 13 \\ n\le 13 \end{cases}$

m	n	a	b
13	7	195	105
11	5	65	75
7	1	85	15

Vậy: $(a,b)=(195,105);(65,75);(85,15)$

Bài 6: Tìm hai số tự nhiên có tích bằng 432 và ƯCLN bằng 6

Lời giải

$ab=432;(a,b)=6(a<b)$

Đặt $a=6m;b=6n \to \begin{cases} mn=12 \\ (m,n)=1 \\ m<n \end{cases}$

m	n	a	b
1	12	6	72
3	4	18	24

Vậy $(a,b)=(6,72);(18,24)$

Bài 7: Cho $(a,b)=1;a>b.CMR:$

a. $(a,a+b)=1$	b. $(b,a-b)=1$	c. $(ab,a+b)=1$	d. $(a^2,a-b)=1$

Lời giải

a. Đặt $(a,a+b)=d(d\in N^*)\to\begin{cases}a\vdots d\\ a+b\vdots d\end{cases}\to b\vdots d\to d\in UC(a,b)\to d\in U(UC(a,b))\to 1\vdots d\to d=1$

c. $(ab,a+b)=d\to\begin{cases}ab\vdots d\\ a+b\vdots d\end{cases}$

Giả sử $d\neq 1$. Gọi p là số ước nguyên tố của d (1 số tự nhiên khác 1 bào giờ cũng tồn tại ít nhất một ước nguyên tố)

$\to d\vdots p\to\begin{cases}ab\vdots p\\ a+b\vdots p\end{cases}$

Ta có: $ab\vdots p\to\left[\begin{array}{l}a\vdots b\to b\vdots p\\ b\vdots p\to a\vdots p\end{array}\right.\to p\in UC(a,b)\to p\in U(ucln(a,b))\to 1\vdots p\to p=1(vo.ly)$

Vậy $d=1\to(ab;a+b)=1$

d. $\begin{cases}a^2b\vdots d\\ a-b\vdots d\end{cases}\to\begin{cases}a^2b\vdots p\\ a-b\vdots p\end{cases}\to\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a^2\vdots p\to a\vdots p\to b\vdots p\\ b\vdots p\to a\vdots p\end{array}\right.\\ a-b\vdots p\end{cases}$

Bài 8: Biết rằng $\overline{abc}$ là bội chung của $\overline{ab};\overline{ac};\overline{bc}$.CMR :

a. $\overline{abc}$ là bội của $\overline{bc}$ b. $\overline{abc}$ là bội của 11

Lời giải

a. $\overline{abc}\vdots\overline{ab}\leftrightarrow 10\overline{ab}+c\vdots\overline{ab}\leftrightarrow c\vdots\overline{ab}\leftrightarrow c=0$

(do c có một chữ số, $\overline{ab}$ có hai chữ số)

- $\begin{cases}\overline{abc}\vdots\overline{ac}\\ c=0\end{cases}\to(100a+10b)\vdots 10a\to b\vdots a$

Đặt $b=ak(k\in N^*)$

- $\begin{cases}\overline{abc}\vdots\overline{ba}\\ c=0;b=ak\end{cases}\to 100a+10b\vdots(10b+a)\to 99a\vdots 10b+a\to 99a\vdots 10ak+a\to 99\vdots 10k+1\to 10k+1=11\leftrightarrow k=1\to a=b;c=0$

Vì $\overline{abc}\vdots\overline{ac}\to\overline{abc}\vdots\overline{bc}\to dpcm$

b. $\overline{abc}=\overline{aa0}=110a\vdots 11\to dpcm$

Bài 9: Tìm hai số tự nhiên a và b, biết: $BCNN(a,b) = 300; UCLN(a,b) = 15$

Lời giải

Ta có: $ab = 300.15 = 4500 (1)$

Giả sử $a \le b; UCLN(a,b) = 15$

Đặt $\left.\begin{matrix} a = 15m \\ b = 15n \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} (m,n) = 1 \\ m \le n \end{cases}$ $;(1) \rightarrow 15m.15n = 4500 \rightarrow \begin{cases} mn = 20 \\ m \le n \end{cases}$

Ta có bảng:

m	n	a	b
1	20	15	300
4	5	60	75

Bài 10: Tìm hai số tự nhiên a và b, biết tích của chúng là 2940 và BCNN của chúng bằng 210

Lời giải

Đặt $(a,b) = d; gia.su.a \le b$

Đặt $\left.\begin{matrix} a = dm \\ b = dn \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} (m,n) = 1 \\ m \le n \end{cases}$

Ta có: $ab = dm.dn = d^2mn; [a,b] = \dfrac{ab}{(a,b)} = \dfrac{d^2mn}{d} = dmn$

Theo đầu bài $[a,b] = 210 \rightarrow dmn = 210; d = \dfrac{ab}{[a,b]} = \dfrac{2940}{210} = 14 \rightarrow mn = \dfrac{210}{14} = 15$

Ta có bảng:

m	n	a	b
1	15	14	210
3	5	42	70

Bài 11: Biết rằng $[a,b].(a,b) = ab$

a. $[a,b] = 600; (a,b)$ nhỏ hơn 10 lần (a ,b). Số thứ nhất là 120, tìm số thứ hai

b. (a, b) = 12, [a, b] lớn gấp 6 lần (a, b). Số thứ nhất là 24, tìm số thứ hai

c. Tổng cuả hai số bằng 60, tổng giữa UCLN và BCNN của chúng là 84. Tìm hai số đó

Lời giải

a. Ta có: $(a,b) = 600:10 = 60; (a,b).[a,b] = ab \to 60.60 = 120.b \to b = 300$

b. Số thứ hai là 36

c. Gọi hai số phải tìm là: a và b

$(a,b) = d$, đặt $a = dm; b = dn \to \begin{cases} (m,n) = 1 \\ m, n \in N^* \end{cases}$; $[a,b] = \dfrac{ab}{(a,b)} = \dfrac{d^2.m.n}{d} = dmn$

Có: $d + dmn = 4 \leftrightarrow d(mn+1) = 4(1)$

Vì tổng của hai bằng 60 nên $d(m+n) = 60(2)$

Từ $(1)(2) \to 1, 2, 3, 4, 6, 12 = d \to d = 12(thoa.man) \to m = 2; n = 3 \to a = 24; b = 36$

Hoặc $m = 3; n = 2 \to a = 36; b = 24$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1: Tìm hai số nguyên dương a, b biết a + b = 128 và ƯCLN(a, b) = 16.

Lời giải

Giả sử a ≤ b.

Ta có ƯCLN(a, b) = 16

=> a = 16m ; b = 16n với m, n thuộc Z^+; ƯCLN(m, n) = 1 ; m ≤ n.

Ta có: a + b = 128 => 16(m + n) = 128 => m + n = 8

Vì ƯCLN(m, n) = 1 nên:

Trường hợp 1có: m = 1, n = 7 => a = 16, b = 112

Trường hợp 2 có: m = 3, n = 5 => a = 48, b = 80

Bài 2: Tìm hai số nguyên dương a, b biết ab = 216 và ƯCLN(a, b) = 6.

Lời giải

Giả sử a ≤ b.

Do ƯCLN (a, b) = 6 => a = 6m ; b = 6n với m, n thuộc Z^+; ƯCLN (m, n) = 1 ; m ≤ n.

Ta có ab = 6m.6n = 36mn => ab = 216 => mn = 6

Vì ƯCLN (m, n) = 1 nên:

Trường hợp 1 có: m = 1, n = 6 => a = 6, b = 36

Trường hợp 2 có: m = 2, n = 3 => a = 12, b = 18.

Bài 3: Tìm hai số nguyên dương a, b biết $\dfrac{a}{b} = 2,6$a/b và ƯCLN (a, b) = 5.

Lời giải

ƯCLN(a, b) = 5 => a = 5m ; b = 5n với m, n thuộc Z^+; ƯCLN(m, n) = 1.

Ta có: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n} = 2,6 \to \dfrac{m}{n} = \dfrac{13}{5}$, mà ƯCLN(m, n) = 1

=> m = 13 và n = 5 => a = 65 và b = 25.

Bài 4: Tìm a, b biết a + b = 42 và BCNN (a, b) = 72.

Lời giải

Gọi d = ƯCLN(a, b) => a = md ; b = nd với m, n thuộc Z^+ ; ƯCLN(m, n) = 1.

Không mất tính tổng quát, giả sử a ≤ b => m ≤ n.

Do đó : a + b = d(m + n) = 42 (1)

BCNN (a, b) = mnd = 72 (2)

=> d là ước chung của 42 và 72 => d thuộc {1 ; 2 ; 3 ; 6}.

Lần lượt thay các giá trị của d vào (1) và (2) để tính m, n

=> Chỉ có trường hợp d = 6 => m + n = 7 và mn = 12 => m = 3 và n = 4 (thỏa mãn các điều kiện của m, n).

Vậy d = 6 và a = 3.6 = 18 , b = 4.6 = 24

Bài 5: Tìm a, b biết a - b = 7, BCNN (a, b) = 140.

Lời giải

Gọi d = ƯCLN(a, b) => a = md ; b = nd với m, n thuộc Z^+ ; ƯCLN(m, n) = 1.

Do đó : a - b = d(m - n) = 7 (1’)

BCNN (a, b) = mnd = 140 (2’)

=> d là ước chung của 7 và 140 => d thuộc {1 ; 7}.

Thay lần lượt các giá trị của d vào (1’) và (2’) để tính m, n ta được kết quả duy nhất :

d = 7 => m - n = 1 và mn = 20 => m = 5, n = 4 (thỏa mãn điều kiện ƯCLN(m, n) = 1)

Vậy d = 7 và a = 5.7 = 35 ; b = 4.7 = 28 .

Bài 6: Tìm hai số nguyên dương a, b biết ab = 180, BCNN (a, b) = 60.

Lời giải

Ta có ƯCLN(a, b) = ab/BCNN (a, b) = 180/60 = 3.

Tìm được (a, b) = 3

Kết quả : a = 3, b = 60 hoặc a = 12, b = 15.

Bài 7: Tìm a, b biết a/b = 4/5 và BCNN (a, b) = 140.

Lời giải

Đặt ƯCLN(a, b) = d. Vì , a/b = 4/5 , mặt khác ƯCLN(4, 5) = 1 nên a = 4d, b = 5d.

Lưu ý BCNN(a, b) = 4.5.d = 20d = 140 => d = 7 => a = 28 ; b = 35.

Bài 8: Tìm hai số nguyên dương a, b biết ab = 216 và ƯCLN (a,b) = 6.

Lời giải

Giả sử a ≤ b.

Do (a, b) = 6 => a = 6m ; b = 6n với m, n thuộc Z^+ ; ƯCLN(m, n) = 1 ; m ≤ n.

Vì vậy : ab = 6m.6n = 36mn => ab = 216 => mn = 6

Vì ƯCLN(m, n) = 1 nên:

Trường hợp 1 có m = 1, n = 6 => a = 6, b = 36

Trường hợp 2 có m = 2, n = 3 => a = 12, b = 18.

Bài 9: Tìm hai số tự nhiên a và b, biết: BCNN(a,b) = 300; ƯCLN(a,b) =15 và a +15= b.

Lời giải

+ Vì ƯCLN(a, b) = 15, nên ắt tồn tại các số tự nhiên m và n khác 0, sao cho:

a = 15m; b = 15n (1)

và ƯCLN(m, n) = 1 (2)

+ Vì BCNN(a, b) = 300, nên theo trên, ta suy ra :

$\Rightarrow \text{BCNN}(15m; 15n) = 300 = 15.20$

$\Rightarrow \text{BCNN}(m; n) = 20 \qquad (3)$

+ Vì a + 15 = b, nên theo trên, ta suy ra :

$\Rightarrow 15m + 15 = 15n \Rightarrow 15.(m+1) = 15n \Rightarrow m + 1 = n \qquad (4)$

Trong các trường hợp thoả mãn các điều kiện (2) và (3), thì chỉ có trường hợp : m = 4, n = 5 là thoả mãn điều kiện (4).

Vậy với m = 4, n = 5, ta được các số phải tìm là : a = 15 . 4 = 60; b = 15 . 5 = 75

Bài 10: Tìm hai số a,b biết bội chung nhỏ nhất của a; b là 420, ƯCLN(a;b) = 21 và a + 21 = b

Lời giải

+ Vì ƯCLN(a, b) = 21, nên tồn tại các số tự nhiên m và n khác 0, sao cho:

a = 21m; b = 21n (1)

và ƯCLN(m, n) = 1 (2)

+ Vì BCNN(a, b) = 420, nên theo trên, ta suy ra:

$\Rightarrow \text{BCNN}(21m; 21n) = 420 = 21.20$

$\Rightarrow \text{BCNN}(m; n) = 20 \qquad (3)$

+ Vì a + 21 = b, nên theo trên, ta suy ra:

$\Rightarrow 21m + 21 = 21n \Rightarrow 21.(m+1) = 21n \Rightarrow m + 1 = n \qquad (4)$

Trong các trường hợp thoả mãn các điều kiện (2) và (3), thì chỉ có

Trường hợp: m = 4, n = 5 hoặc m = 2, n = 3 là thoả mãn điều kiện (4).

Vậy với m = 4, n = 5 hoặc m = 2, n = 3 ta được các số phải tìm là:

a = 21.4 = 84; b = 21.5 = 105

Bài 11: Tìm hai số tự nhiên biết: Hiệu của chúng bằng 84, ƯCLN của chúng bằng 28 và các số đó trong khoảng từ 300 đến 440.

Lời giải

Gọi hai số phải tìm là a và b (a, b $\in$ N*, a > b)

Ta có: ƯCLN(a, b) = 28 nên a = 28k và b = 28q . Trong đó k, q$\in$N*và k, q nguyên tố cùng nhau.

Ta có : a - b = 84 $\Rightarrow$ k - q = 3

Theo bài ra: 300 $\le$ b < a $\le$ 440 $\Rightarrow$ 10 < q < k <16.

Chọn hai số có hiệu bằng 3 trong khoảng từ 11 đến 15 là 11 và 14; 12 và 15.

Chỉ có 11 và 14 là hai số nguyên tố cùng nhau => q = 11và k = 14.

Ta có : a = 28. 11 = 308 ; b = 28. 14 = 392

Vậy hai số phải tìm là 308 và 392.

BÀI 2: CHỨNG MINH HAI SỐ NGUYÊN TỐ CÙNG NHAU

A. Bài toán và phương pháp giải

Bài toán: Chứng minh hai số a, b nguyên tố cùng nhau: (a, b) = 1

Phương pháp giải: Giả sử d = (a, b)

- Cách 1: Chỉ ra d = 1

- Cách 2:

+) Giả sử $d \ne 1 (d \ge 2)$ (phương pháp phản chứng)

+) Gọi p là ước nguyên tố của d

+) Chỉ ra rằng p = 1 (vô lý)

+) Kết luận: d = 1

B. Bài tập

Bài 1: Cho $n \in N^*. CMR$:

a. $(n+3;2n+5)=1$ b. $(3n+3;4n+9)=1$

Lời giải

a. Gọi $(n+3;2n+5)=d(d \in N^*) \to \begin{cases} n+3 \vdots d \\ 2n+5 \vdots d \end{cases} \to \begin{cases} 2n+6 \vdots d \\ 2n+5 \vdots d \end{cases} \to d=1$

b. $(3n+3;\ 4n+9)=d \to \begin{cases} 4(3n+7) \vdots 7 \\ 3(4n+9) \vdots d \end{cases} \to d=1$

Bài 2: Cho a, b là số tự nhiên lẻ, $b \in N.CMR : (a, ab+128)=1$

Lời giải

$d=(a,ab+128)\to d$ lẻ $\to \begin{cases} a\vdots d\\ ab+128\vdots d\end{cases}\to 128\vdots d\to \begin{cases}2^7\vdots d\\ d: le\end{cases}\to\begin{cases}2\vdots d\\ d: le\end{cases}\to d=1$

Bài 3: Chứng tỏ rằng nếu $17n^2+1\vdots 6(n\in N^*)$ thì $(n,2)=1;(m,3)=1$

Lời giải

+) Theo đầu bài ta có: $17n^2+1\vdots 6\to 17n^2+1\vdots 2\to 17n^2+1$ chẵn $\to n$ lẻ $\to n\not\vdots\, 2\to (n,2)=1$

+) Vì $17n^2+1\vdots 6\to 17n^2+1\vdots 3\to n\not\vdots\, 3\to (n,3)=1$

(nếu $n\vdots 3\to 17n^2\vdots 3\to 17n^2+1\vdots 3\to loai\to n\not\vdots\, 3$)

Bài 4: Cho hai số a, b nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng 13a + 4b và 15a + 7b hoặc ngyên tố cùng nhau hoặc có 1 ước chung là 31

Lời giải

Gọi $d=(13a+4b,15a+7b)\to\begin{cases}13a+4b\vdots d\ (1)\\ 15a+7b\vdots d(2)\end{cases}\to\begin{cases}91a+28b\vdots d\\ 60a+28b\vdots d\end{cases}\to 31a\vdots d(3)$

- Nếu $(d,31)\neq 1\to d\vdots 31$ (vì 31 có hai ước là 1 và chính nó, mà $(1,d)\neq 1\to d\vdots 31)\to 31\in UC(13a+4b;15a+7b)$

- Nếu $(d,31)=1\to(3)\to a\vdots d.\to(1):\to 4b\vdots b\to(2):\to 7b\vdots d\to 2.4b-7b\vdots d\to b\vdots d$
$\to d\in UC(a,b)=1\to d=1$

Bài 5: Cho $n\in N^*$. Tìm ƯCLN của 2n – 1 và 9n + 4

Lời giải

Gọi
$d=(2n-1,9n+4)(d\in N^*)\to\begin{cases}2n-1\vdots d(1)\\ 9n+4\vdots d(2)\end{cases}\to 2(9n+4)-9(2n-1)\vdots d\to 17\vdots d\to\left[\begin{array}{l}d=1\\ d=17\end{array}\right.$

- Nếu
$d=17\to(9n+4)-4(2n-1)=n+8\vdots 17\to n=17+9k(k\in N)\to 9n+4=9(17k+9)+4=9.17k+85\vdots 17$
$2n-1=2(17k+9)-1=2.17k+17\vdots 17$

Vậy nếu n có dạng 17k + 9 ($k\in N$) thì ƯCLN (2n – 1, 9n + 4) = 17

Bài 6: Tìm ƯC LN (1 + 2 + 3 + <.+ n, 2n + 1) với $n\in N, n\geq 2$

Lời giải

$(\frac{n(n+1)}{2},2n+1)=d\to\begin{cases}\frac{n(n+1)}{2}\vdots d\\ 2n+1\vdots d\end{cases}\to\begin{cases}n(n+1)\vdots d\\ 2n+1\vdots d\end{cases}$

Giả sử d > 1, p là ước nguyên tố của d

$$\rightarrow n(n+1)\vdots d \rightarrow \left[\begin{array}{l} n \vdots p \\ n+1 \vdots p \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} n+1 \vdots p \\ n \vdots p \end{array}\right. \rightarrow (n+1)-n = 1 \vdots p \rightarrow 1 \vdots p (vo.ly) \rightarrow d = 1$$

Bài 7: Cho hai số nguyên tố cùng nhau a và b. Chứng tỏ rằng 11a + 2b và 18a + 5b hoặc là số nguyên tố cùng nhau hoặc có 1 ước chung là 19

Lời giải

$d = (11a+2b, 18a+5b)$ ta chứng minh $\left[\begin{array}{l} d = 1 \\ d = 19 \end{array}\right. \rightarrow 5(11a+2b) - 2(18a+5b) = 19 \vdots d$

Đặt $19a = dk (k \in N^*) \rightarrow d.k \vdots 19 \rightarrow \left[\begin{array}{l} d \vdots 19 \\ k \vdots 19 \end{array}\right. \rightarrow dpcm$

- Nếu

$k \vdots 19 \rightarrow k = 19q \rightarrow 19a = dk = d.19.q \rightarrow a = dq \rightarrow a \vdots d \rightarrow \begin{cases} 2b \vdots d \\ 5b \vdots d \end{cases} \rightarrow b \vdots d \rightarrow d \in UC(a, b) = 1 \rightarrow d = 1$

Bài 8:

a) Chứng minh rằng: $(a,b) = 1$ và a, b khác tính chẵn lẻ thì $(a^m + b^n, a^m - b^n) = 1 \forall m,n \in N^*$ và $a^m - b^n > 0$

b. $(2017^{2015} + 2016^{2014}, 2017^{2015} - 2016^{2014}) = 1$

Lời giải

a) $d = (a^m + b^n, a^m - b^n) \rightarrow \begin{cases} a^m + b^n \vdots d \\ a^m - b^n \vdots d \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2a^m \vdots d \\ 2b^n \vdots d \end{cases}$. Vì a, b khác tính chẵn lẻ nên d lẻ

$$\rightarrow \begin{cases} a^m \vdots d \\ b^n \vdots d \end{cases}$$

Giả sử d > 1 $\rightarrow d$ có ít nhất một ước số là số nguyên tố, giả sử ước nguyên tố đó là p

$$\begin{cases} a^m \vdots p \\ b^n \vdots p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \vdots p \\ b \vdots p \end{cases} \rightarrow p \in UC(a,b); ma : (a,b) = 1 \rightarrow 1 \vdots p \rightarrow p = 1 \rightarrow vo.ly$$

Vậy $d \leq 1 \rightarrow d = 1 \rightarrow dpcm$

b. $a = 2017; b = 2016; m = 2015; n = 2014$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1: Chứng minh rằng 2 số n + 1 và 3n + 4 (n ∈ N) là hai số nguyên tố cùng nhau

Lời giải

Gọi d = ƯCLN (n + 1; 3n + 4) $\to d \in N^*$, nên ta có: $\begin{cases} n+1 \vdots d \\ 3n+4 \vdots d \end{cases} \to \begin{cases} 3n+3 \vdots d \\ 3n+4 \vdots d \end{cases} \to 1 \vdots d$

Vậy hai số: n + 1 và 3n + 4 là hai số nguyên tố cùng nhau với (n ∈ N)

Bài 2: Chứng minh rằng 2n + 1 và 2n + 3 là hai số nguyên tố cùng nhau

Lời giải

Gọi d = ƯCLN (2n + 1; 2n + 3) $\to d \in N^*$

Khi đó ta có: $\begin{cases} 2n+1 \vdots d \\ 2n+3 \vdots d \end{cases} \to (2n+3)-(2n+1) \vdots d \to 2 \vdots d \Rightarrow d \in U(2) = \{1;2\}$

Mà ta lại có 2n + 1 ⋮ d mà 2n + 1 là số lẻ nên d = 2 (loại), do đó d = 1

Vậy hai số 2n + 1 và 2n + 3 là hai số nguyên tố cùng nhau

Bài 3: Chứng minh rằng 14n + 3 và 21n + 4 (n ∈N) là hai số nguyên tố cùng nhau

Lời giải

Gọi d = ƯCLN (14n + 3; 21n + 4) $\to d \in N^*$

Khi đó ta có: $\begin{cases} 14n+3 \vdots d \\ 21n+4 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(14n+3) \vdots d \\ 2(21n+4) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 42n+9 \vdots d \\ 42n+8 \vdots d \end{cases} \Rightarrow (42n+9)-(42n+8) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d$

Vậy hai số 14n + 3 và 21n + 4 là hai số nguyên tố cùng nhau

Bài 4: Tìm UC của 2n + 1 và 3n + 1 với n ∈N

Lời giải

Gọi d = ƯCLN(2n + 1, 3n+1) $\to d \in N^*$

Khi đó ta có :

$\begin{cases} 2n+1 \vdots d \\ 3n+2 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(2n+1) \vdots d \\ 2(3n+2) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+3 \vdots d \\ 6n+4 \vdots d \end{cases} \Rightarrow (6n+4)-(6n+3) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d \in U(1) = \{1;-1\}$

Do đó ƯC(2n + 1; 3n + 1) là ước của d, hay là ước của 1

Vì ước của 1 hay ước của -1 có chung 1 tập hợp

Vậy ƯC (2n + 1; 3n + 1) = U (1) = { 1; -1)

Bài 5: Tìm ƯCLN của 9n + 24 và 3n + 4

Lời giải

Gọi ƯCLN(9n + 24; 3n + 4) = d $\to d \in N^*$

Khi đó ta có: $\begin{cases} 9n+24 \vdots d \\ 3n+4 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9n+24 \vdots d \\ 9n+12 \vdots d \end{cases} \Rightarrow (9n+24)-(9n+12) = d \Rightarrow 12 \vdots d$

$\Rightarrow d \in U(12) = \{\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm12\}$

Do 3n + 4 ⋮ d, mà 3n + 4 không chia hết cho 3, nên d = 3, 6, 13 (loại)

Do đó d = 1; 2; 4

Để d = 2 thì n phải chẵn

Để d = 4 thì n phải chia hết cho 4

Để d = 1 thì là số lẻ,

Vậy với n = 4k + 2 (k ∈N) thì ƯCLN (9n + 24; 3n + 4) = 2

Với n = 4k (k ∈N) thì ƯCLN (9n + 24; 3n + 4) = 4

Với n = 2k + 1 với (k ∈N) thì ƯCLN (9n + 24; 3n + 4) = 1

Bài 6: Chứng minh rằng với mọi n ∈N thì các số sau ngyên tố cùng nhau

a) 7n + 10 và 5n + 7 b) 2n + 3 và 4n + 8

Lời giải

a) Gọi d = ƯCLN (7n + 10; 5n + 7) $\rightarrow d \in N^*$

Khi đó ta có: $\begin{cases}7n+10 \vdots d\\ 5n+7 \vdots d\end{cases}$ => $\begin{cases}5(7n+10) \vdots d\\ 7(5n+7) \vdots d\end{cases}$ => $\begin{cases}35n+50 \vdots d\\ 35n+49 \vdots d\end{cases}$ => $(35n+50)-(35n+49) \vdots d$ => $1 \vdots d$

Do đó d = 1

Vậy hai số 7n + 10 và 5n + 7 là hai số nguyên tố cùng nhau

b) Gọi d=UCLN(2n+3 ; 4n+8) $\rightarrow d \in N^*$

Khi đó ta có: $\begin{cases}2n+3 \vdots d\\ 4n+8 \vdots d\end{cases}$ => $\begin{cases}2(2n+3) \vdots d\\ 4n+8 \vdots d\end{cases}$ => $\begin{cases}4n+6 \vdots d\\ 4n+8 \vdots d\end{cases}$ => $(4n+8)-(4n+6) \vdots d$ => $2 \vdots d$ => $d \in \{1;2\}$

Vì 2n + 3 ⋮ d, mà 2n + 3 là 1 số lẻ nên d = 2 (loại)

Khi đó d = 1, Vậy hai số 2n + 3 và 4n + 8 là hai số nguyên tố cùng nhau

Bài 7: Cho 2 số 3n + 1 và 5n + 4 là hai số không nguyên tố cùng nhau. Tìm UCLN (3n + 1; 5n + 4)

Lời giải

Gọi ƯCLN (3n + 1; 5n + 4) = d => 7 ⋮ d => d = 7 hoặc d = 1

Mà d # 1 nên d = 7

Bài 8: Tìm số chia và thương của 1 phép chia, có số bị chia là 145, số dư là 12 biết rằng thương khác 1

Lời giải

Gọi x là số chia, a là thương, ta có: 145 = a.x + 12 (x > 12) => 145 - 12 = 133 = a.x => x là Ư(133)

Lại có 133 = 7. 19 => x∈ U(133) = $\{1;7;19;133\}$ mà x > 12 => x = 19 hoặc 133

- Nếu $x = 19 \rightarrow thuong. = 7$

- Nếu $x = 133 \rightarrow thuong. = 1 (loai)$

Bài 9: Cho ƯCLN(a, b) = 1, tìm ƯCLN (11a + 2b; 18a + 5b)

Lời giải

Gọi d = ƯCLN (11a + 2b; 18a + 5b) nên $\begin{cases} 11a+2b \vdots d \\ 18a+5b \vdots d \end{cases} \to \begin{cases} 18(11a+2b) \vdots d \\ 11(18a+5b) \vdots d \end{cases} \to 19b \vdots d$

Và $5(11a+2b)-2(18a+5b) \vdots d \to 19a \vdots d \to \left[\begin{array}{l} d=1 \\ d=19 \end{array}\right.$

Bài 10: Cho n là số tự nhiên, Tìm ƯCLN của

a) 21n + 5 và 14n + 3 b) 18n + 2 và 30n + 3 c) 24n + 7 và 18n + 5

Lời giải

a) Gọi d = ƯCLN (21n + 5; 14n + 3) $\to d \in N^*$

Khi đó ta có: $\begin{cases} 14n+3 \vdots d \\ 21n+4 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(14n+3) \vdots d \\ 2(21n+4) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 42n+9 \vdots d \\ 42n+8 \vdots d \end{cases} \Rightarrow (42n+9)-(42n+8) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d$

Vậy ƯCLN (21n; 14n + 3) = 1

b) Gọi ƯCLN (18n + 2, 30n + 3) $\to d \in N^*$

Khi đó ta có: $\begin{cases} 18n+2 \vdots d \\ 30n+3 \vdots d \end{cases} \to \begin{cases} 5(18n+2) \vdots d \\ 3(30n+3) \vdots d \end{cases} \to \begin{cases} 90n+10 \vdots d \\ 90n+9 \vdots d \end{cases} \to 1 \vdots d$

Vậy ƯCLN (18n + 2, 30n + 3) = 1

c) Gọi d = ƯCLN (24n + 7, 18n + 5) $\to d \in N^*$

Khi đó ta có: $\begin{cases} 24n+7 \vdots d \\ 18n+5 \vdots d \end{cases} \to \begin{cases} 3(24n+7) \vdots d \\ 4(18n+5) \vdots d \end{cases} \to \begin{cases} 72n+21 \vdots d \\ 72n+20 \vdots d \end{cases} \to 1 \vdots d$ => d=1

Vậy ƯCLN (21n, 14n + 3) = 1

Bài 11: Cho m là số tự nhiên lẻ, n là số tự nhiên. CMR: m và m.n + 4 là hai số nguyên tố cùng nhau

Lời giải

Giả sử m và (m.n + 4) cùng chia hết cho số tự nhiên d, khi đó ta có:

$\begin{cases} m \vdots d \\ m.n+4 \vdots d \end{cases} \to \begin{cases} m.n \vdots d \\ m.n+4 \vdots d \end{cases} \to 4 \vdots d \to d \in \{2;4;1\}$, do $m \vdots d$ và m lẻ => d = 2 hoặc d = 4 loại

Vậy d = 1

Khi đó m và m.n + 4 là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 12: Cho (a,b) = 1. Chứng tỏ rằng (8a + 3) và (5b + 1) là nguyên tố cùng nhau

Lời giải

Gọi ƯCLN(8a + 3; 5b + 1) = d $\to d \in N^*$

$$\begin{cases} 8a+3b \vdots d \\ 5a+b \vdots d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5(8a+3b) \vdots d \\ 8(5a+b) \vdots d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 40a+15b \vdots d \\ 40a+8b \vdots d \end{cases} \rightarrow 7b \vdots d$$

và $\begin{cases} 8a+3b \vdots d \\ 3(5a+b) \vdots d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8a+3b \vdots d \\ 15a+3b \vdots d \end{cases} \rightarrow (15a+3b)-(8a+3b) \vdots d \rightarrow 7a \vdots d$

Vì (a, b) =1 nên d = 1 hoặc d = 7

Bài 13: Biết (a, b) = 95. Tìm (a + b, a - b)

Lời giải

Gọi ƯCLN(a+ b, a - b) = d $\rightarrow d \in N^*$

$\begin{cases} a+b \vdots d \\ a-b \vdots d \end{cases} \rightarrow 2b \vdots d \rightarrow$ d $\in$Ư(2) hoặc d$\in$Ư(b)

và $\begin{cases} a+b \vdots d \\ a-b \vdots d \end{cases} \rightarrow 2a \vdots d \rightarrow$d$\in$U (2) hoặc d$\in$Ư(a)

mà ƯCLN(a, b) = 95, nên d = 95 hoặc d = 2

Vậy ƯCLN (a + b; a - b) = 2 hoặc 95

Bài 14: Tìm n để 9n + 24 và 3n + 4 là hai số nguyên tố cùng nhau (n$\in$N)

Lời giải

Gọi ƯCLN(9n + 24; 3n + 4) = d, Khi đó ta có:

$\begin{cases} 9n+24 \vdots d \\ 3n+4 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9n+24 \vdots d \\ 9n+12 \vdots d \end{cases} \Rightarrow (9n+24)-(9n+12) = d \Rightarrow 12 \vdots d$

$\Rightarrow d \in U(12) = \{\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm12\}$

Do 3n + 4 $\vdots$ d, mà 3n + 4 không chia hết cho 3, nên d = 3, 6, 13 (loại)

Do đó d = 1; 2; 4

Để d = 2 thì n phải chẵn

Để d = 4 thì n phải chia hết cho 4

Để d = 1 thì n là số lẻ,

Vậy để 9n + 24 và 3n + 4 là hai số nguyên tố cùng nhau thì n lẻ

Bài 15: Tìm n để: 18n + 3 và 21n + 7 là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải

Gọi ƯCLN (18n + 3, 21n + 7) = d $\rightarrow d \in N^*$

Khi đó ta có: $\begin{cases} 18n+3 \vdots d \\ 21n+7 \vdots d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7(18n+3) \vdots d \\ 6(21n+7) \vdots d \end{cases} \rightarrow (126n+42)-(126n+21) \vdots d \rightarrow 21 \vdots d$

$\rightarrow d \in U(21) = \{\pm1; \pm3; \pm7; \pm21\}$

Do 21n + 7 $\vdots$ d, mà 21n + 7 không chia hết cho 3, nên d = 1 hoặc d = 7

Để hai số 18n+3 và 21n+7 là hai số nguyen tố thì d khác 7 hay

18n+3 $\not\vdots$ 7 =>18n+3-21 $\not\vdots$ 7=>18n-18 $\not\vdots$ 7=>18(n-1) $\not\vdots$ 7=>n-1 $\not\vdots$ 7=>n-1 ≠ 7k=>n ≠ 7k+1

Vậy n ≠ 7k +1 với k là số tự nhiên thì 18n+3 và 21n+7 là hai số nguyên tố

Bài 16: Tìm số tự nhiên n để các số sau nguyên tố cùng nhau

a. 4n + 3 và 2n + 3 b. 7n + 13 và 2n + 4

c. 9n + 24 và 3n + 4 d. 18n + 3 và 21n + 7

Lời giải

a) Gọi ƯCLN(4n + 3, 2n + 3) = d $\to d \in N^*$

$$\begin{cases} 4n+3 \vdots d \\ 2n+3 \vdots d \end{cases} \to \begin{cases} 4n+3 \vdots d \\ 4n+6 \vdots d \end{cases} => (4n+6)-(4n+3) \vdots d => 3 \vdots d => d \in \{1;3\}$$

Để 4n + 3 và 2n + 3 là hai số nguyê tố cùng nhau thì d khác 3 hay

$2n+3 \not\vdots 3 => 2n \not\vdots 3 => n \not\vdots 3 => n \neq 3k (k \in N)$

Vậy $n \neq 3k (k \in N)$ thì 4n + 3 và 2n + 3 là hai số nguyên tố cùng nhau

b, Gọi ƯCLN(4n + 3, 2n + 3) = d $\to d \in N^*$

$$\begin{cases} 4n+3 \vdots d \\ 2n+3 \vdots d \end{cases} \to \begin{cases} 4n+3 \vdots d \\ 4n+6 \vdots d \end{cases} => (4n+6)-(4n+3) \vdots d => 3 \vdots d => d \in \{1;3\}$$

Để 4n + 3 và 2n + 3 là hai số nguyê tố cùng nhau thì d khác 3 hay

$2n+3 \not\vdots 3 => 2n \not\vdots 3 => n \not\vdots 3 => n \neq 3k (k \in N)$

Vậy $n \neq 3k (k \in N)$ thì 4n + 3 và 2n + 3 là hai số nguyên tố cùng nhau

c, Gọi $d = UCLN(9n+24; 3n+4) => \begin{cases} 9n+24 \vdots d \\ 3n+4 \vdots d \end{cases} => 12 \vdots d => d \in \{\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm12\}$

Nếu $d \in \{\pm2;\pm4;\pm6;\pm12\} => 9n+24$ chẵn và, $3n+4$ chẵn $=> d \in \{\pm2;\pm4;\pm6;\pm12\}$ loại

Nếu $d = \pm3 => 3n+4 \vdots 3$ Vô lý => d = 3(loại)

Nếu d = 1=> $9n+24, 3n+4$ là số lẻ => 9n + 24 lẻ=> n lẻ và 3n + 4 lẻ => n lẻ

Vậy n lẻ

Bài 17: Cho m,n là hai số tự nhiên, Gọi A là tập hợp các ước số chung của m và n, B là tập hợp các ước số chung của $11m+5n$ và $9m+4n$, CMR: A = B

Lời giải

Gọi d = UCLN(11m + 5n, 9m + 4n) $\to d \in N^*$

Khi đó ta có : $\begin{cases} 11m+5n \vdots d \\ 9m+4n \vdots d \end{cases} => \begin{cases} 9(11m+5n) \vdots d \\ 11(9m+4n) \vdots d \end{cases} => \begin{cases} 99m+45n \vdots d \\ 99m+44n \vdots d \end{cases} => n \vdots d$ (1)

Tương tự ta có : $\begin{cases} 11m+5n \vdots d \\ 9m+4n \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(11m+5n) \vdots d \\ 5(9m+4n) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 44m+20n \vdots d \\ 45m+20n \vdots d \end{cases} \Rightarrow m \vdots d$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : d$\in UC(m; n) \to d \in U(A)$

và B$\in$U(d) = U(A), Vậy A = B

Bài 18: Cho n là số tự nhiên, Tìm ƯCLN và BCNN của: n và n + 2

Lời giải

Gọi d = ƯCLN (n; n+2) => $\to d \in N^*$

$\begin{cases} n \vdots d \\ n+2 \vdots d \end{cases} \to (n+2) - n \vdots d \to 2 \vdots d \to \left[\begin{array}{l} d=1 \\ d=2 \end{array}\right.$

Để d = 2 thì n $\vdots$ 2 => n chẵn, d = 1 thì n lẻ

Ta có: ƯCLN (a; b). BCNN (a, b) = a.b

TH1: Nếu d = 1 thì BCNN (n ;n+2) =n(n+2)

TH2: Nếu d = 2 thì BCNN(n; n+2) = $\frac{n(n+2)}{2}$

Bài 19: Cho 2 số 3n + 1 và 5n + 4 là hai số không nguyên tố cùng nhau, tìm ƯCLN (3n + 1; 5n + 4)

Lời giải

Gọi ƯCLN (3n + 1, 5n + 4) = d $\to d \in N^*$

$\begin{cases} 3n+1 \vdots d \\ 5n+4 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(3n+1) \vdots d \\ 3(5n+4) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15n+5 \vdots d \\ 15n+12 \vdots d \end{cases} \Rightarrow (15n+12)-(15n+5) \vdots d \to 7 \vdots d \to \left[\begin{array}{l} d=1 \\ d=7 \end{array}\right.$

Vì 3n + 1 và 5n + 4 là hai số không nguyên tố cùng nhau nên ƯCLN của chúng là 7

Vậy ƯCLN(3n + 1, 5n + 4) = 7

BÀI 3: CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM ƯCLN, BCNN

A. Lý thuyết

1. Phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử: Muốn tìm ƯCLN, BCNN của hai hay nhiều số ta làm như sau

- Bước 1: Phân tích các số ra thừa số nguyên tố với số mũ tương ứng
- Bước 2: Tìm các thừa số chung và riêng
- Bước 3: ƯCLN là tích các thừa số nguyên tố chung với số mũ nhỏ nhất

BCNN là tích của các thừa số nguyên tố chung và riêng với số mũ lớn nhất

2. Thuật toán EUCLIDE để tìm ƯCLN

Muốn tìm ƯCLN của a và B (giả sử $a \geq b$)

- Bước 1: Chia a cho b có số dư là r
- Bước 2:

+) Nếu r = o thì (a, b) = b

+) Nếu $r \neq 0$ tat hay thế a bởi b, b bởi r và thực hiện phép chia trong bước 1: $[a,b] = \dfrac{ab}{(a,b)}$

Bài 1: Cho a = 24, b = 70, c = 112. Tìm (a, b), (a, b, c), [a, b], [a, b, c]. từ đó kiểm tra công thức $UCLN(a,b,c) = UCLN\ (UCLN\ (a,b),c); BCNN\ (a,b,c) = BCNN\ (BCNN\ (a,b),c)$

Lời giải

$a = 24 = 2^3.3; b = 70 = 2.5.7; c = 112 = 24.7; (a,b) = 2; (a,b,c) = 2; [a,b] = 2^3.35.7 = 840; [a,b,c] = 2^4.3.5.7 = 1680$

$UCLN(a,b,c) = 2; UCLN(a,b) = 2 \rightarrow UCLN(UCLC(a,b),c) = UCLN(2,112) = 2$

$BCNN(a,b,c) = 1680;\ BCNN(BCNC(a,b),c) = BCNN(840,112) = 1680$

Bài 2: Tìm ƯCLN, BCNN của các số sau

a) 793016,308,3136

b) 1323,19845,1287,315

Lời giải

a. $\left.\begin{array}{l} 793016 = 2^3.7^3.17^2 \\ 308 = 2^2.7.11 \\ 3136 = 2^6.7^2 \end{array}\right\} \rightarrow UCLN = 2^2.7 = 28;\ BCNN = 2^6.7^3.11 = 17^2$

b. $\left.\begin{array}{l} 1323 = 3^3.7^2 \\ 19845 = 3^4.5.7^2 \\ 1287 = \quad ^2 \\ 315 = 3^2.5.7 \end{array}\right\} \rightarrow UCLN = 3^2 = 9;\ BCNN = 3^4 5.7^2 11.13$

Bài 3: Tìm ƯCLN của (58005, 2835) bằng thuật toán Euclide

Lời giải

Có:

$58005 = 20.2835 + 1305 \to (58005, 2835) = (2835, 1305); 2835 = 2.1305 + 225; 1305 = 5.225 + 180$

$225 = 1.180 + 45; 180 = 4.45 \to UCLN = 45$

Bài 4: Bằng thuật toán Euclide, hãy tìm ƯCLN của các số sau

a) $252, 4068$ b) $345, 13225$ c) $286, 10530$

Lời giải

a) 36 b) 115 c) 26

Bài 5: Biết số A gồm 2015 chữ số 2 và B gồm 8 chữ số 2. Hãy tìm ƯCLN (A, B)

Lời giải

$A = \underbrace{22...2}_{2015} = \underbrace{2.2.....2}_{2008}\underbrace{0....0}_{7} + \underbrace{2.2......2}_{7.chu.so.2}$

Vì $\underbrace{2.2.....2}_{2008}\underbrace{0....0}_{7} \vdots \underbrace{2.2.....2}_{8} \to (A, B) = (\underbrace{2.2.....2}_{8}, \underbrace{2.2 .....2}_{7})$

Ta có: $\underbrace{2.2.....2}_{8} = \underbrace{2.2.....2}_{7}0 + 2 \to (\underbrace{2.2.....2}_{8}, \underbrace{2.2.....2}_{7}) = (\underbrace{2.2 ... 2}_{7}, 2) = 2 \to (A, B) = 2$

Bài 6: Số X gồm 2002 chữ số 9, Y gồm 9 chữ số 9. Tìm ƯCLN (X, Y)

Lời giải

Có: $2002 = 222.9 + 4; X = \underbrace{99....9}_{2002} = \underbrace{99....9}_{1998}\underbrace{0000}_{4} + \underbrace{9999}_{4}; X = BS(Y) + 9999(1)$

$Y = \underbrace{9999....9}_{9} = \underbrace{9999....9}_{8}\underbrace{0}_{1} + 9 \to Y = BS(9999) + 9(2); 9999 = BS(9)(3)$

Từ $(1)(2)(3) \to UCLN(X, Y) = 9$

Bài 4: BÀI TOÁN QUY VỀ TÌM ƯCLN, BCNN

Bài 1: Một trường tổ chức cho khoảng 700 và 800 học sinh đi tham quan. Tính số học sinh biết rằng nếu xếp 40 người hoặc 50 người lên xe ô tô thì vừa đủ

Lời giải

Gọi số học sinh của trường là: n ($n \in N^*$)

Theo bài ta có: $700 \le n \le 800$

Vì $n \vdots 45; n \vdots 40 \to n \in BC(40, 45) \to n \in B(BCNN(40, 45))$

Ta có: $40 = 2^3.5; 45 = 3^2.5$

$$BCNN(40, 45) = 2^3.3^2.5 = 360 \to \begin{cases} n \in B(360) \\ 700 \le n \le 800 \end{cases} \to n = 700(hoc.\text{sinh})$$

Bài 2: Tìm số tự nhiên n, biết rằng khi chia 239 và 373 cho n thì số dưlần lượt là 14 và 23

Lời giải

Theo đầu bài ta có:

$$\left.\begin{matrix} 239 - 14 = 225 \vdots n \\ 373 - \quad \vdots \end{matrix}\right\} \to n \in UC(225,350) \to n \in U(UCLN(225,350));\ 225 = 3^2.5^2; 350 = 2.5^2.7$$

$UCLN(225,350) = 25 \to n \in UC(25)$

Vì 373 chia cho n dư 23 $\to \begin{cases} n > 23 \\ n \in U(25) \end{cases} \to n = 25$

Bài 3: Người ta đếm só trứng trog một rổ. Nếu đếm theo từng chục cũng như theo tá hoặc theo từng 15 quả thì lần nào cũng dư 1 quả. Tính số trúng trong rổ, biết rằng số trứng đó lớn hơn 150 và nhỏ hơn 200 quả

Lời giải

Gọi số trứng trong rổ là n ($n \in N^*$)

Ta có: $150 < n < 200 (1); (n-1) \vdots 10,12,15 \to (n-1) \in BC(10,12,15) \to n-1 \in B(60)$

Theo (1) $\to 149 < n-1 < 199 \to n-1 = 180 \to n = 181$

Bài 4: Một trường học có số lượng học sinh không quá 100o. Khi xếp hàng 20, 25, 30 thì đều dư 15. Nhưng khi xếp hàng 41 thì vừa đủ. Tính số học sinh của trường?

Lời giải

Gọi số học sinh của trường là: n ($n \in N^*$)

Theo bài rat a có: $n \le 1000$

Lại có:

$n - 15 \vdots 20, 25, 30; n \vdots 41; n - 15 \in BC(20, 25, 30) \in B(BCNN(20, 25, 30) = 300 \to n - 15 \in B(300)$

Mà

Mà $n-15\le 1000-15=985\to n-1\in\{300,600,900\}\to\begin{cases}n\in\{315,615,915\}\\ n\,\vdots\,41\end{cases}\to n=615$

Bài 5: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng khi chia số đó cho 12, 18, 23 thì số dưu lần lượt là 11, 17, 9

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là: a ($a\in N$)

Theo bài ta có: $a=12k+1=18q+17=2.3.p+9(k,p,q\in N)$

Ta tìm số b sao cho: $a+b\,\vdots\,12,18,23$

Nhận thấy:

$a+37=12k+48\,\vdots\,12; a+37=18q+54\,\vdots\,18; a+37=23p+46\,\vdots\,23\to a+37\in BC(12,18,23)$

Vì a nhỏ nhất

$\to a+37=BCNN(12,18,23); 12=2^2.3; 18=2.3^2; 23=23\to BCNN(12,18,23)=2^2.3^2.23=828$

$\to a=828-37=791$

Bài 6: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho a chia cho 5 dư 4, a chia cho 9 dư 7

Lời giải

$a=5m+4; a=9n+7; a+11=\underbrace{5m+15}_{\vdots 5}=\underbrace{9n+18}_{\vdots 9}\to a+11\in BC(5,9)\to a+11=45\to a=34$

Bài 7: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia cho 11 dư 6, chia cho 4 dư 1, chia cho 19 dư 11

Lời giải

$b=11n+6; b=4m+1; b=19k+11\to b+27\,\vdots\,11,4,19\to b+27\in BCNN(11,4,19)=836\to b=809$

Bài 8: Cho a, b là các số tự nhiên khác 0 sao cho $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ là số tự nhiên. Gọi d là ƯCLN của a, b. Chứng minh rằng: $a+b\ge d^2$

Lời giải

$d=(a,b)$, đặt

$a=dm, b=dn; \frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{a^2+b^2+a+b}{ab}\in N\to\begin{cases}a^2+b^2+a+b\,\vdots\,ab\\ ab=d^2.m.n\,\vdots\,d^2\end{cases}\to a^2+b^2+a+b\,\vdots\,d^2$

$\left.\begin{array}{l}a^2=d^2m^2\,\vdots\,d^2\\ b^2=d^2n^2\,\vdots\,d^2\end{array}\right\}\to a+b\,\vdots\,d^2\to a+b\ge d^2\to dpcm$

Bài 9: Một số tự nhiên chia cho 7 dư 5, chia cho 13 dư 4. Nếu đem số đó chia cho 91 thì dư bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số đó là a

Vì a chia cho 7 dư 5, chia cho 13 dư 4

$\Rightarrow a+9 \vdots 7; a+9 \vdots 13$ mà ƯCLN(7,13) = 1 nên $a+9 \vdots 7.13$

$\Rightarrow$ a+9=91k $\Rightarrow$ a = 91k - 9 = 91k - 91+ 82 = 91(k - 1) + 82 (k$\in$N)

Vậy a chia cho 91 dư 82.

Bài 10: Tìm số tự nhiên a biết rằng khi chia 355 cho a ta được số dư là 13 và khi chia 836 cho a có số dư là 8

Lời giải

Theo đề khi chia 355 cho a ta được số dư là 13 nên ta có $355 = a.m + 13$ với $m \in N^*$ và $a > 13$ hay $a.m = 342 = 18.19$ (1) và khi chia 836 cho a ta được số dư là 8

=> Ta có $836 = a.n + 8 \Rightarrow a.n = 828 = 18.46$ với $n \in N^*$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $a = 18$ là số tự nhiên cần tìm.

Bài 11: Một số chia cho 7 dư 3, chia cho 17 dư 12, chia cho 23 dư 7 . Hỏi số đó chia cho 2737 dư bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số đã cho là A. Theo bài ra ta có: A = 7.a + 3 = 17.b + 12 = 23.c + 7

Mặt khác: A + 39 = 7.a + 3 + 39 = 17.b + 12 + 39 = 23.c + 7 + 39

= 7.(a + 6) = 17.(b + 3) = 23.(c + 2)

Như vậy A+39 đồng thời chia hết cho 7,17 và 23.

Nhưng Ư CLN(7,17,23) = 1 => (A + 39) $\vdots$ 7.17.23 nên (A+39) $\vdots$ 2737

=> A+39 = 2737.k

=> A = 2737.k - 39 = 2737.(k-1) + 2698

Do 2698 < 2737 nên 2698 là số dư của phép chia số A cho 2737

Bài 12: Tìm số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số, sao cho chia nó cho 8 thì dư 7 và chia nó cho 31 thì dư 28.

Lời giải

Gọi số cần tìm là a (a $\in$N,$100 \le a \le 999$)

Vì a chia cho 8 thì dư 7 và chia cho 31 thì dư 28 nên:

$$\begin{cases} a-7 \vdots 8 \\ a-28 \vdots 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-7+8 \vdots 8 \\ a-28+31 \vdots 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1 \vdots 8 \\ a+3 \vdots 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1+64 \vdots 8 \\ a+3+62 \vdots 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+65 \vdots 8 \\ a+65 \vdots 31 \end{cases}$$

Vì (8, 31) = 1 nên a + 65 ⋮ (8.31) hay a + 65 ⋮ 248 ⇔ a = 248k – 65 (k ∈ N^*).

Vì a là số có 3 chữ số lớn nhất nên k = 4, khi đó a = 248.4 – 65 = 927.

Vậy số cần tìm là 927

Bài 13: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có 3 chữ số biết rằng số đó chia cho 4,6,7 đều dư 3.

Lời giải

ọi số cần tìm là a . điều kiện $a \in N, a \geq 100$

Vì a chia cho 4, 6, 7 đều dư 3 $\Rightarrow a - 3 \vdots 4,6,7$

Mà a nhỏ nhất => a – 3 nhỏ nhất => a- 3 = BCNN(4,6,7)

Mà ƯCLN(4, 6, 7) = 1 => BCNN(4,6,7) = 4.7.6 = 168 $\Rightarrow a - 3 = 168 \Rightarrow a = 171$

Vậy số cần tìm là 171.

⇨ **Bài 14:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia cho 11 dư 6, chia cho 4 dư 1và chia cho 19 dư 11.

Lời giải

Gọi số cần tìm là a ta có: (a - 6) ⋮ 11 ; (a - 1) ⋮ 4 ; (a - 11) ⋮ 19.

⇨ => (a - 6 + 33) ⋮ 11 ; (a - 1 + 28) ⋮ 4 ; (a - 11 +38) ⋮ 19.

⇨ => (a +27) ⋮ 11 ; (a +27) ⋮ 4 ; (a +27) ⋮ 19.

⇨ Mà a nhỏ nhất => a + 27 nhỏ nhất => a + 27 = BCNN(11, 4, 9)

⇨ Do ƯCLN (4 ; 11 ; 19) = 1 => BCNN(11, 4, 9) = 11.4.9 = 396

⇨ => a + 27 = 396

⇨ => a = 369

Bài 15: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho: a chia cho 5 thì dư 3, a chia cho 7 thì dư 4.

Lời giải

Ta có: a = 5q + 3 ; a = 7p + 4

Xét a +17 = 5q + 20 = 7p + 21 => $a+17$ chia hết cho cả 5 và 7

=> $a+17$ bội chung của 5 và 7.

Vì a là số tự nhiên nhỏ nhất nên a +17 = BCNN(5,7) = 35 => a = 18

Bài 16: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng số đó khi chia cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 đều dư là 2, còn chia cho 7 thì dư 3.

Lời giải

Gọi số tự nhiên đó là a, ta có $a - 2 = BC(3;4;5;6)$.

Mà $BC(3;4;5;6) = 60; 120; 180; 240; <$

Nên a nhận các giá trị 62; 122; 182; 242 <.

Mặt khác a là số nhỏ nhất chia cho 7 thì dư 3 tức là (a – 3) là số nhỏ nhất chia hết cho 7

=> a = 122 (vì a = 62 thì 62 – 3 = 59 không chia hết cho 7)

Bài 17: Học sinh khối 6 khi xếp hàng; nếu xếp hàng 10, hàng 12, hàng15 đều dư 3 học sinh. Nhưng khi xếp hàng 11 thì vừa đủ. Biết số học sinh khối 6 chưa đến 400 học sinh.Tính số học sinh khối 6?

Lời giải

Gọi số học sinh khối 6 là a (3 < a < 400)

Vì khi xếp hàng 10,hàng 12, hàng 15 đều dư 3

$\Rightarrow a - 3 \vdots 10;12;15$

$\Rightarrow a - 3 \in BC(10,12,15)$ ta có BCNN(10,12,15) = 60

$\Rightarrow a - 3 \in \{60;120;180;240;300;360;420;...\}$

$\Rightarrow a \in \{63;123;183;243;303;363;423;...\}$ mà $a \vdots 11$; $a < 400$

$\Rightarrow$ a = 363

Vậy số học sinh khối 6 là 363 học sinh.

Bài 18: Một người bán năm giỏ xoài và cam. Mỗi giỏ chỉ đựng một loại quả với số lượng là: 65 kg; 71 kg; 58 kg; 72 kg; 93 kg. Sau khi bán một giỏ cam thì số lượng xoài còn lại gấp ba lần số lượng cam còn lại. Hãy cho biết giỏ nào đựng cam, giỏ nào đựng xoài?

Lời giải

Tổng số xoài và cam lúc đầu: 65+ 71+ 58+ 72+ 93 = 359 (kg)

Vì số xoài còn lại gấp ba lần số cam còn lại nên tổng số xoài và cam còn lại là số chia hết cho 4, mà 359 chia cho 4 dư 3 nên giỏ cam bán đi có khối lượng chia cho 4 dư 3.

Trong các số 65; 71; 58; 72; 93 chỉ có 71 chia cho 4 dư 3 .

Vậy giỏ cam bán đi là giỏ 71 kg.

Số xoài và cam còn lại : 359 - 71= 288 (kg)

Số cam còn lại : 288:4 = 72(kg)

Vậy: các giỏ cam là giỏ đựng 71 kg ; 72 kg .

các giỏ xoài là giỏ đựng 65 kg ; 58 kg; 93 kg.

Bài 19: Hai lớp 6A; 6B cùng thu nhặt một số giấy vụn bằng nhau. Lớp 6A có 1 bạn thu được 26 kg còn lại mỗi bạn thu được 11kg. Lớp 6B có 1 bạn thu được 25 kg còn lại mỗi bạn thu được 10kg. Tính số học sinh mỗi lớp biết rằng số giấy mỗi lớp thu được trong khoảng 200kg đến 300kg.

Lời giải

Gọi số giấy mỗi lớp thu được là x (kg) thì (x - 26) $\vdots$ 11 và (x - 25) $\vdots$ 10

Do đó (x - 15) $\in$ BC (10; 11) và 200 < x < 300

=> x - 15 = 220 => x = 235

Số HS lớp 6A là (235 - 26) : 11 + 1 = 20 HS

Số HS lớp 6B là (235 - 25) : 10 + 1 = 22 HS

Bài 20: Số học sinh khối 6 của một tròng cha đến 400 bạn, biết khi xếp hàng 10; 12; 15 đều dư 3 nhưng nếu xếp hàng 11 thì không dư. Tính số học sinh khối 6 của trường đó.

Lời giải

Gọi số học sinh là a ($a \in Z^*$)

Ta có $a - 3 \in BC(10; 12; 15)$

$a - 3 = 60k$ ($k \in N^*$) $\Rightarrow a = 60k + 3$

k	1	2	3	4	5	6	7
a	63	123	183	243	303	363	423

Ta xem với giá trị nào của k thì a < 400 và $a \vdots 11$

Trong các giá trị trên, chỉ có a = 363 < 400 và $a \vdots 11$

Vậy số học sinh cần tìm là 363 học sinh.

Bài 21: Một đơn vị bộ đội khi xếp hàng, mỗi hàng có 20 người, hoặc 25 người, hoặc 30 người đều thừa 15 người. Nếu xếp mỗi hàng 41 người thì vừa đủ (không có hàng nào thiếu, không có ai ở ngoài hàng). Hỏi đơn vị có bao nhiêu người, biết rằng số người của đơn vị chưa đến 1000?

Lời giải

Gọi số người của đơn vị bộ đội là x ($x \in N$)

x : 20 dư 15 $\Rightarrow x - 15 \vdots 20$

x : 25 dư 15 $\Rightarrow x - 15 \vdots 25$

x : 30 dư 15 $\Rightarrow x - 15 \vdots 30$

Suy ra x – 15 là BC(20, 25, 35)

Ta có $20 = 2^2. 5$; $25 = 5^2$; $30 = 2. 3. 5$ => BCNN(20, 25, 30) = $2^2. 5^2. 3 = 300$

BC(20, 25, 35) = 300k ($k \in N$)

$x - 15 = 300k \Leftrightarrow x = 300k + 15$ mà x < 1000 nên

$300k + 15 < 1000 \Leftrightarrow 300k < 985 \Leftrightarrow k < 3\frac{17}{60}$ ($k \in N$) => k = 1; 2; 3

Chỉ có k = 2 thì $x = 300k + 15 = 615 \vdots 41$

Vậy đơn vị bộ đội có 615 người