Đề bài:

Câu 1: (2điểm **)**

So sánh $\frac{99^{2008}+1}{99^{2009}+1}$ với $\frac{99^{2009}+1}{99^{2010}+1}$

Câu 2**:** (3 điểm)

Cho x + y = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức M = $x^3 + y^3$

Câu 3: (3 điểm)

Cho $(x + \sqrt{x^2+1})(y + \sqrt{y^2+1}) = 1$

Tính giá trị của biểu thức $A = x^{2009} + y^{2009}$

Câu 4 :(3 điểm)

Giải phương trình sau

$\sqrt{4x^2+5x+1} - \sqrt{4x^2-4x+4} = 9x - 3$

Câu 5:(2 điểm)

Cho a,b,c là số đo ba cạnh tam giác , chứng minh rằng :

$a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \le a^3 + b^3 + c^3 + 3abc$

Câu 6: (7 điểm)

Cho đường tròn (O;R) và hai đường kính bất kì AB và CD sao cho tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt các đường thẳng BC và BD tại hai điểm tương ứng là E và F .Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng EA và AF .

a. Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác BPQ là trung điểm của đoạn thẳng OA .

b. Hai đường kính AB và CD có vị trí tương đối như thế nào thì tam giác BPQ có diện tích nhỏ nhất .

Chứng minh các hệ thức sau : CE.DF.EF = CD^3 và $\frac{BE^3}{BF^3} = \frac{CE}{DF}$

Lời giải:

Câu 1:(2điểm)

Đặt $99^{2008} = a$, xét hiệu A của hai phân thức :

$A = \frac{a+1}{99a+1} - \frac{99a+1}{99^2a+1}$ (0,25 điểm)

$A = \frac{99^2a^2 + 99^2a + a + 1 - 99^2a^2 - 198a - 1}{(99a+1)(99^2a+1)}$ (0,5 điểm)

$A = \frac{99^2a - 197a}{(99a+1)(99^2a+1)}$ (0,5 điểm)

Vì a > 0 nên $99^2a - 197a > 0$ (0,5 điểm)

Vậy $\frac{99^{2008}+1}{99^{2009}+1} > \frac{99^{2009}+1}{99^{2010}+1}$ (0,25 điểm)

Câu 2: (3 điểm)

Ta có $M = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^2 - xy + y^2$ (vì x + y = 1) (0,25điểm)

$$M = \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}-xy+\frac{y^2}{2}=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}})^2$$

(0,5điểm)

Suy ra $M \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

(0,25điểm)

Mặt khác : x + y =1 $\Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 1 \Rightarrow 2(x^2 + y^2) - (x - y)^2 = 1$ (0,5điểm)

$\Rightarrow 2(x^2 + y^2) \geq 1$ (0,25điểm
)

Do đó : $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$ (0,25
điểm)

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$ (0,25
điểm)

Ta có $M \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ và $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow M \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ (0,5
điểm)

Vậy $M \geq \frac{1}{4}$, nên giá trị nhỏ nhất của biểu thức M bằng $\frac{1}{4}$ khi x = y = $\frac{1}{2}$
(0,25điểm)

Câu 3 (3 điểm)

Ta có $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

Do đó : $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=x-\sqrt{x^2+1}\\ \left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)=y-\sqrt{y^2+1}\end{cases}$ (0,75 điểm)

$\Rightarrow \begin{cases}-y-\sqrt{y^2+1}=x-\sqrt{x^2+1}\\ -x-\sqrt{x^2+1}=y-\sqrt{y^2+1}\end{cases}$ (0,25điểm)

$\Rightarrow$ - (x + y) = (x + y) (0,25 điểm)

$\Leftrightarrow$ x = - y (0,75điểm)

Do đó : $A = x^{2009} + y^{2009} = (- y)^{2009} + y^{2009} = - y^{2009} + y^{2009} = 0$ (0,75 điểm)

Vậy : $A = x^{2009} + y^{2009} = 0$ (0,25 điểm)

Câu 4: (3 điểm)

Đặt $a = \sqrt{4x^2+5x+1}$, $b = \sqrt{4x^2-4x+4}$ ($a \geq 0$, $b = \sqrt{(2x-1)^2+3} \geq 1$) (0,25điểm)

Ta có $\begin{cases} a-b=9x-3 \\ a^2-b^2=4x^2+5x+1-4x^2+4x-4=9x-3 \end{cases}$ (0,5 điểm)

$\Rightarrow (a^2 - b^2) - (a - b) = 0 \Rightarrow (a - b)(a + b - 1) = 0$ (0,25 điểm)

$a \geq 0$; $b > 1$nên $a + b - 1 > 0$ (0,25điểm)

Do đó : $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$ (0,25điểm)

$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+5x+1} = \sqrt{4x^2-4x+4}$ (0,5điểm)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-4x+4 \geq 0 \\ 4x^2+5x+1=4x^2-4x+4 \end{cases}$ (0,5điểm)

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)^2+3 \geq 0 \\ 5x+4x=4-1 \end{cases}$ (0,25điểm)

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{1}{3}$ (0,25điểm

Câu 5: (2 điểm)

Giả sử $a \geq b \geq c > 0$

$a^2(b + c) + b^2(c + a) +c^2(a + b) \leq a^3 + b^3 + c^3 + 3abc$

$\Leftrightarrow 3abc + a^3 + b^3 +c^3 - a^2(b + c) - b^2 (c + b) - c^2(a + b) \geq 0$ (1) (0,25 điểm)

Biến đổi vế trái của (1) ta có

$VT = 3abc + a^3 + b^3 +c^3 - a^2b - b^2a - a^2c - b^2c - c^2a - c^2b$ (0,25 điểm)

VT = $a^2(a - b) + b^2(b - a) + c(2ab - a^2 - b^2) + c(c^2 - bc + ab - a)$ (0,25 điểm)

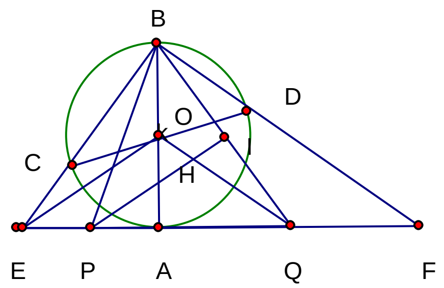
VT = $(a - b)(a^2 - b^2) - c(a - b)^2 + (c - a)(c - b)$ (0,25 điểm)

VT = $(a - b)(a + b - c) + c(b - c)(a - c) \geq 0$ (0,5 điểm)

(vì $a \geq b$, $a + b > c$, $a \geq c$, $b \geq c$, $c > 0$)

Do đó ta có (1) (0,25 điểm)

Vậy $a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \leq a^3 + b^3 + c^3 + 3abc$ (0,25điểm)



Câu 6: (7điểm)

Vẽ hình đúng (0,5điểm)

a. (2,5 điểm)

Vẽ PI $\perp$ BQ . PI cắt BA tại H (0,5điểm)

Ta có H là trực tâm của $\triangle$BPQ. (0,25điểm)

Q,O lần lượt là trung điểm các cạnh AF, AB của $\triangle$ABF.

$\Rightarrow$OQ là đường trung bình của $\triangle$ABF $\Rightarrow$OQ // FB (0,25điểm)

$\widehat{CBD} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) (0,25điểm)

OQ // FB , BE $\perp$FB $\Rightarrow$ QO $\perp$BE (0,25điểm)

$\triangle$BEQ có BA VÀ QO là hai đường cao cắt nhau tại O

$\Rightarrow$O là trực tâm $\triangle$BEQ $\Rightarrow$EO $\perp$BQ (0,25điểm)

EO $\perp$BQ , PI$\perp$BQ $\Rightarrow$EO //PI (0,25 điểm)

$\triangle$AEO có P là trung điểm của EA và EO // PH $\Rightarrow$H là trung điểm của OA. (0,5điểm)

b. (2 điểm)

$\triangle$BEF vuông tại B, BA là đường cao nên AE $\cdot$ AF =BA^2 = 4R^2 (0,25điểm)

$$S_{BPQ} = \frac{1}{2}BA \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \frac{AE+AF}{2} = R \cdot \frac{AE+AF}{2} \geq R \cdot \sqrt{AE \cdot AF} = 2R^2$$

(1điểm)

Dấu “ = “ xảy ra $\Leftrightarrow$ AE = AF $\Leftrightarrow$ $\vartriangle$BEF vuông cân tại B

(0,25điểm)

$\Leftrightarrow$ AB $\perp$ CD (0,25 điểm)

Vậy khi AB $\perp$ CD thì S_{BPQ} nhỏ nhất .

(0,25điểm)

c. (2 điểm)

AB = CD(= 2R)

$CD^2 = AB^2$ = AE . AF

(0,25điểm)

$\Rightarrow$ $CD^4 = AB^4 = AE^2 . AF^2$ = CE .DF .EF .AB

(0,5điểm)

Suy ra AB^2 = CE . DF .EF

(0,25điểm)

CD^3 = CE . DF .EF

(0,25điểm)

Ta có : $\frac{BE^2}{BF^2} = \frac{EA \cdot EF}{FA \cdot EF} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{BE^4}{BF^4} = \frac{AE^2}{AF^2} = \frac{CE \cdot BE}{DF \cdot BF}$

(0,5điểm)

Suy ra $\frac{BE^3}{BF^3} = \frac{CE}{DF}$

(0,25điểm)