

## Chuyên đề 2: Bài toán về tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

### 1. Kiến thức vận dụng :

$$- \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$$

- Nếu  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$  thì  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a \pm b \pm e}{b \pm d \pm f}$  với gt các tỉ số đều có nghĩa

- Có  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$  Thì  $a = bk, c = dk, e = fk$

### 2. Bài tập vận dụng

Dạng 1 Vận dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau để chứng minh đẳng thức

**Bài 1:** Cho  $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$

**HD:** Từ  $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$  suy ra  $c^2 = ab$

$$\begin{aligned} \text{khi đó } \frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} &= \frac{a^2 + ab}{b^2 + ab} \\ &= \frac{a(a+b)}{b(a+b)} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

**Bài 2:** Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$  và  $a, b, c \neq 0$  thỏa mãn  $b^2 = ac$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{c} = \frac{(a+2012b)^2}{(b+2012c)^2}$$

**HD: Ta có**  $(a+2012b)^2 = a^2 + 2.2012.ab + 2012^2.b^2 = a^2 + 2.2012.ab + 2012^2.ac$   
 $= a(a+2.2012.b+2012^2.c)$   
 $(b+2012c)^2 = b^2 + 2.2012.bc + 2012^2.c^2 = ac + 2.2012.bc + 2012^2.c^2$   
 $= c(a+2.2012.b+2012^2.c)$

**Suy ra :**  $\frac{a}{c} = \frac{(a+2012b)^2}{(b+2012c)^2}$

**Bài 3:** Chứng minh rằng nếu  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  thì  $\frac{5a+3b}{5a-3b} = \frac{5c+3d}{5c-3d}$

**HD : Đặt**  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = kb, c = kd$ .

**Suy ra :**  $\frac{5a+3b}{5a-3b} = \frac{b(5k+3)}{b(5k-3)} = \frac{5k+3}{5k-3}$  và  $\frac{5c+3d}{5c-3d} = \frac{d(5k+3)}{d(5k-3)} = \frac{5k+3}{5k-3}$

$$\text{Vậy } \frac{5a+3b}{5a-3b} = \frac{5c+3d}{5c-3d}$$

**Bài 4:** Biết  $\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{ab}{cd}$  với  $a, b, c, d \neq 0$  Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ hoặc } \frac{a}{b} = \frac{d}{c}$$

HD : Ta có  $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{ab}{cd} = \frac{2ab}{2cd} = \frac{a^2+2ab+b^2}{c^2+2cd+d^2} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} = \left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2$  (1)

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{ab}{cd} = \frac{2ab}{2cd} = \frac{a^2-2ab+b^2}{c^2-2cd+d^2} = \frac{(a-b)^2}{(c-d)^2} = \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2$$
 (2)

Từ (1) và (2) suy ra :  $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d} \\ \frac{a+b}{c+d} = \frac{b-a}{d-c} \end{cases}$

Xét 2 TH đi đến đpcm

**Bài 5 :** Cho tỉ lệ thức  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  . Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{cd} = \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} \quad \text{và} \quad \left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$$

**HD :** Xuất phát từ  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  biến đổi theo các

hướng làm xuất hiện  $\frac{ab}{cd} = \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2$

**Bài 6 :** Cho dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

Tính  $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$

HD : Từ  $\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra : } \frac{2a+b+c+d}{a} - 1 &= \frac{a+2b+c+d}{b} - 1 = \frac{a+b+2c+d}{c} - 1 = \frac{a+b+c+2d}{d} - 1 \\ &\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d} \end{aligned}$$

Nếu  $a+b+c+d = 0 \Rightarrow a+b = -(c+d) ; (b+c) = -(a+d)$

$$\Rightarrow M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = -4$$

Nếu  $a+b+c+d \neq 0 \Rightarrow a=b=c=d \Rightarrow M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = 4$

**Bài 7 : a)** Chứng minh rằng:

Nếu  $\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4a-4b+c}$

Thì  $\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{2x+y-z} = \frac{c}{4x-4y+z}$

b) Cho:  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ .

Chứng minh:  $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a}{d}$

HD : a) Từ  $\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4a-4b+c} \Rightarrow \frac{a+2b+c}{x} = \frac{2a+b-c}{y} = \frac{4a-4b+c}{z}$

$\Rightarrow \frac{a+2b+c}{x} = \frac{2(2a+b-c)}{2y} = \frac{4a-4b+c}{z} = \frac{a}{x+2y+z}$  (1)

$\frac{2(a+2b+c)}{2x} = \frac{(2a+b-c)}{y} = \frac{4a-4b+c}{z} = \frac{b}{2x+y+z}$  (2)

$\frac{4(a+2b+c)}{4x} = \frac{4(2a+b-c)}{4y} = \frac{4a-4b+c}{z} = \frac{c}{4x-4y+z}$  (3)

Từ (1);(2) và (3) suy ra :  $\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{2x+y-z} = \frac{c}{4x-4y+z}$

**Bài 8:** Cho  $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$

chứng minh rằng biểu thức sau có giá trị nguyên.

$P = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$

**HD**

Từ

$\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z} \Rightarrow$

$\frac{y+z+t}{x} = \frac{z+t+x}{y} = \frac{t+x+y}{z} = \frac{x+y+z}{t}$

$\Rightarrow \frac{y+z+t}{x} + 1 = \frac{z+t+x}{y} + 1 = \frac{t+x+y}{z} + 1 = \frac{x+y+z}{t} + 1$

$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{x} = \frac{z+t+x+y}{y} = \frac{t+x+y+z}{z} = \frac{x+y+z+t}{t}$

Nếu  $x + y + z + t = 0$  thì  $P = -4$

Nếu  $x + y + z + t \neq 0$  thì  $x = y = z = t \Rightarrow P = 4$

**Bài 9 :** Cho 3 số  $x, y, z$  khác 0 thỏa mãn điều kiện :  $\frac{y+z-x}{x} = \frac{z+x-y}{y} = \frac{x+y-z}{z}$

Hãy tính giá trị của biểu thức :  $B = \left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right)$

**Bài 10 :** a) Cho các số  $a, b, c, d$  khác 0 . Tính

$T = x^{2011} + y^{2011} + z^{2011} + t^{2011}$

Biết  $x, y, z, t$  thỏa mãn:

$\frac{x^{2010} + y^{2010} + z^{2010} + t^{2010}}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \frac{x^{2010}}{a^2} + \frac{y^{2010}}{b^2} + \frac{z^{2010}}{c^2} + \frac{t^{2010}}{d^2}$

b) Tìm số tự nhiên  $M$  nhỏ nhất có 4 chữ số thỏa mãn điều kiện:

$M = a + b = c + d = e + f$

Biết a,b,c,d,e,f thuộc tập  $\mathbb{N}^*$  và  $\frac{a}{b} = \frac{14}{22}; \frac{c}{d} = \frac{11}{13}; \frac{e}{f} = \frac{13}{17}$

b) Cho 3 số a, b, c thỏa mãn :  $\frac{a}{2009} = \frac{b}{2010} = \frac{c}{2011}$  .

Tính giá trị của biểu thức :  $M = 4(a - b)(b - c) - (c - a)^2$

### Một số bài tương tự

**Bài 11:** Cho dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{2012a+b+c+d}{a} = \frac{a+2012b+c+d}{b} = \frac{a+b+2012c+d}{c} = \frac{a+b+c+2012d}{d}$$

$$\text{Tính } M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$$

**Bài 12:** Cho 3 số x, y, z, t khác 0 thỏa mãn điều kiện :

$$\frac{y+z+t-nx}{x} = \frac{z+t+x-ny}{y} = \frac{t+x+y-nz}{z} = \frac{x+y+z-nt}{t} \quad (n \text{ là số tự nhiên})$$

và  $x + y + z + t = 2012$  . Tính giá trị của biểu thức  $P = x + 2y - 3z + t$

### Dạng 2 : Vận dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau để tìm x,y,z,...

**Bài 1:** Tìm cặp số (x;y) biết :  $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x}$

**HD :** Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x} = \frac{1+7y-1-5y}{4x-5x} = \frac{2y}{-x} = \frac{1+5y-1-3y}{5x-12} = \frac{2y}{5x-12}$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{-x} = \frac{2y}{5x-12} \text{ với } y = 0 \text{ thay vào không thỏa mãn}$$

Nếu y khác 0

$$\Rightarrow -x = 5x - 12$$

$\Rightarrow x = 2$ . Thay  $x = 2$  vào trên ta được:

$$\frac{1+3y}{12} = \frac{2y}{-2} = -y \Rightarrow 1 + 3y = -12y \Rightarrow 1 = -15y \Rightarrow y = \frac{-1}{15}$$

Vậy  $x = 2, y = \frac{-1}{15}$  thỏa mãn đề bài

**Bài 3 :** Cho  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$  và  $a + b + c \neq 0; a = 2012$ .

Tính b, c.

$$\text{HD : từ } \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1 \Rightarrow a = b = c = 2012$$

**Bài 4 :** Tìm các số x,y,z biết :

$$\frac{y+x+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$$

**HD:** Áp dụng t/c dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{y+x+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{2(x+y+z)}{(x+y+z)} = 2 = \frac{1}{x+y+z} \quad (\text{vì } x+y+z \neq 0)$$

Suy ra :  $x + y + z = 0,5$  từ đó tìm được  $x, y, z$

**Bài 5 : Tìm x, biết rằng:**  $\frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x}$

**HD :** Từ  $\frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x} = \frac{2(1+2y)-(1+4y)}{2 \cdot 18 - 24} = \frac{1+2y+1+4y-(1+6y)}{18+24-6x}$

**Suy ra :**  $\frac{1}{6} = \frac{1}{6x} \Rightarrow x=1$

**Bài 6:** Tìm x, y, z biết:  $\frac{x}{z+y+1} = \frac{y}{x+z+1} = \frac{z}{x+y-2} = x+y+z \quad (x, y, z \neq 0)$

**HD :** Từ  $\frac{x}{z+y+1} = \frac{y}{x+z+1} = \frac{z}{x+y-2} = x+y+z = \frac{x+y+z}{2(x+y+z)} = \frac{1}{2}$

Từ  $x + y + z = \frac{1}{2} \Rightarrow x + y = \frac{1}{2} - z, y + z = \frac{1}{2} - x, z + x = \frac{1}{2} - y$  thay vào đẳng thức ban đầu để tìm x.

**Bài 7 :** Tìm x, y, z biết  $\frac{3x}{8} = \frac{3y}{64} = \frac{3z}{216}$  và  $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$

**Bài 8 :** Tìm x, y biết :  $\frac{2x+1}{5} = \frac{4y-5}{9} = \frac{2x+4y-4}{7x}$