

Chuyên đề 3: Vận dụng tính chất phép toán để tìm x, y

1. Kiến thức vận dụng :

- Tính chất phép toán cộng, nhân số thực
- Quy tắc mở dấu ngoặc, quy tắc chuyển vế
- Tính chất về giá trị tuyệt đối : $|A| \geq 0$ với mọi A ; $|A| = \begin{cases} A, A \geq 0 \\ -A, A < 0 \end{cases}$
- Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối :

$|A| + |B| \geq |A + B|$ dấu '=' xảy ra khi $AB \geq 0$; $|A - B| \geq |A| - |B|$ dấu '=' xảy ra $A, B > 0$

$$|A| \geq m \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq m \\ A \leq -m \end{cases} (m > 0) ; |A| \leq m \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq m \\ A \geq -m \end{cases} (\text{hay } -m \leq A \leq m) \text{ với } m > 0$$

- Tính chất lũy thừa của 1 số thực : $A^{2n} \geq 0$ với mọi A ; $-A^{2n} \leq 0$ với mọi A

$$A^m = A^n \Leftrightarrow m = n; A^n = B^n \Rightarrow A = B \text{ (nếu n lẻ) hoặc } A = \pm B \text{ (nếu n chẵn)}$$

$$0 < A < B \Leftrightarrow A^n < B^n ;$$

2. Bài tập vận dụng

Dạng 1: Các bài toán cơ bản

Bài 1: Tìm x biết

a) $x + 2x + 3x + 4x + \dots + 2011x = 2012.2013$

b) $\frac{x-1}{2011} + \frac{x-2}{2010} - \frac{x-3}{2009} = \frac{x-4}{2008}$

HD : a) $x + 2x + 3x + 4x + \dots + 2011x = 2012.2013$

$$\Rightarrow x(1 + 2 + 3 + \dots + 2011) = 2012.2013$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{2011 \cdot 2012}{2} = 2012.2013 \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 2013}{2011}$$

b) Nhận xét : $2012 = 2011 + 1 = 2010 + 2 = 2009 + 3 = 2008 + 4$

Từ $\frac{x-1}{2011} + \frac{x-2}{2010} - \frac{x-3}{2009} = \frac{x-4}{2008}$

$$\Rightarrow \frac{(x-2012)+2011}{2011} + \frac{(x-2012)+2010}{2010} + \frac{(x-2012)+2009}{2009} = \frac{(x-2012)+2008}{2008}$$

$$\Rightarrow \frac{x-2012}{2011} + \frac{x-2012}{2010} + \frac{x-2012}{2009} - \frac{x-2012}{2008} = -2$$

$$\Rightarrow (x-2012)\left(\frac{1}{2011} + \frac{1}{2010} + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2008}\right) = -2$$

$$\Rightarrow x = -2 : \left(\frac{1}{2011} + \frac{1}{2010} + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2008}\right) + 2012$$

Bài 2 Tìm x nguyên biết

a) $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$

b) $1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + (-3)^x = \frac{9^{1006} - 1}{4}$

Dạng 2 : Tìm x có chứa giá trị tuyệt đối

- Dạng : $|x+a| = x+b$ và $|x+a| \pm |x+b| = x+c$

Khi giải cần tìm giá trị của x để các GTTĐ bằng không, rồi so sánh các giá trị đó để chia ra các khoảng giá trị của x (so sánh $-a$ và $-b$)

Bài 1 : Tìm x biết :

a) $|x-2011| = x-2012$ b) $|x-2010| + |x-2011| = 2012$

HD : a) $|x-2011| = x-2012$ (1) do VT = $|x-2011| \geq 0, \forall x$

nên VP = $x - 2012 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2012$ (*)

Từ (1) $\Rightarrow \begin{cases} x-2011 = x-2012 \\ x-2011 = 2012-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2011 = 2012 \text{ (vô lý)} \\ x = (2011+2012) : 2 \end{cases}$

Kết hợp (*) $\Rightarrow x = 4023:2$

b) $|x-2010| + |x-2011| = 2012$ (1)

Nếu $x \leq 2010$ từ (1) suy ra : $2010 - x + 2011 - x = 2012 \Rightarrow x = 2009 : 2$ (lấy)

Nếu $2010 < x < 2011$ từ (1) suy ra : $x - 2010 + 2011 - x = 2012$ hay $1 = 2012$ (loại)

Nếu $x \geq 2011$ từ (1) suy ra : $x - 2010 + x - 2011 = 2012 \Rightarrow x = 6033:2$ (lấy)

Vậy giá trị x là : **2009 :2 hoặc 6033:2**

Một số bài tương tự:

Bài 2 : a) Tìm x biết $|x-1| + |x+3| = 4$

b) Tìm x biết: $|x^2 + 6x - 2| = x^2 + 4$

c) Tìm x biết: $|2x+3| - 2|4-x| = 5$

Bài 3 : a) Tìm các giá trị của x để: $|x+3| + |x+1| = 3x$

b) Tìm x biết: $|2x-3| - x = |2-x|$

Bài 4 : tìm x biết :

a) $|x-1| \leq 4$ b) $|x-2011| \geq 2012$

Dạng : Sử dụng BĐT giá trị tuyệt đối

Bài 1 : a) Tìm x nguyên biết : $|x-1|+|x-3|+|x-5|+|x-7|=8$

b) Tìm x biết : $|x-2010|+|x-2012|+|x-2014|=2$

HD : a) ta có $|x-1|+|x-3|+|x-5|+|x-7| \geq |x-1+7-x|+|x-3+5-x|=8$ (1)

Mà $|x-1|+|x-3|+|x-5|+|x-7|=8$ suy ra (1) xảy ra dấu “=”

Hay $\begin{cases} 1 \leq x \leq 7 \\ 3 \leq x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq x \leq 5$ do x nguyên nên $x \in \{3;4;5\}$

b) ta có $|x-2010|+|x-2012|+|x-2014| \geq |x-2010+2014-x|+|x-2012| \geq 2$ (*)

Mà $|x-2010|+|x-2012|+|x-2014|=2$ nên (*) xảy ra dấu “=”

Suy ra: $\begin{cases} x-2012=0 \\ 2010 \leq x \leq 2014 \end{cases} \Rightarrow x=2012$

Các bài tương tự

Bài 2 : Tìm x nguyên biết : $|x-1|+|x-2|+\dots+|x-100|=2500$

Bài 3 : Tìm x biết $|x+1|+|x+2|+\dots+|x+100|=605x$

Bài 4 : Tìm x, y thoả mãn: $|x-1|+|x-2|+|y-3|+|x-4|=3$

Bài 5 : Tìm x, y biết : $|x-2006y|+|x-2012| \leq 0$

HD : ta có $|x-2006y| \geq 0$ với mọi x,y và $|x-2012| \geq 0$ với mọi x

Suy ra : $|x-2006y|+|x-2012| \geq 0$ với mọi x,y mà $|x-2006y|+|x-2012| \leq 0$

$\Rightarrow |x-2006y|+|x-2012|=0 \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x-2012=0 \end{cases} \Rightarrow x=2012, y=2$

Bài 6 : Tìm các số nguyên x thoả mãn.

$2004=|x-4|+|x-10|+|x+101|+|x+990|+|x+1000|$

Dạng chứa lũy thừa của một số hữu tỉ

Bài 1: Tìm số tự nhiên x, biết :

a) $5^x + 5^{x+2} = 650$

b) $3^{x-1} + 5.3^{x-1} = 162$

HD : a) $5^x + 5^{x+2} = 650 \Rightarrow 5^x (1 + 5^2) = 650 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow x = 2$

b) $3^{x-1} + 5.3^{x-1} = 162 \Rightarrow 3^{x-1}(1 + 5) = 162 \Rightarrow 3^{x-1} = 27 \Rightarrow x = 4$

Bài 2 : Tìm các số tự nhiên x, y , biết:

a) $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$

b) $10^x : 5^y = 20^y$

HD : a) $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x \Rightarrow \frac{2^{2x}}{2^{x+1}} = \frac{3^y}{3^x} \Rightarrow 2^{x-1} = 3^{y-x}$

Nhận thấy : $(2, 3) = 1 \Rightarrow x-1 = y-x = 0 \Rightarrow x = y = 1$

b) $10^x : 5^y = 20^y \Rightarrow 10^x = 10^{2y} \Rightarrow x = 2y$

Bài 3 : Tìm m , n nguyên dương thoả mãn :

a) $2^m + 2^n = 2^{m+n}$

b) $2^m - 2^n = 256$

HD: a) $2^m + 2^n = 2^{m+n} \Rightarrow 2^{m+n} - 2^m - 2^n = 0 \Rightarrow 2^m (2^n - 1) - (2^n - 1) = 1$

$$\Rightarrow (2^m - 1)(2^n - 1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2^n - 1 = 1 \\ 2^m - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow m = n = 1$$

$$\text{b) } 2^m - 2^n = 256 \Rightarrow 2^n (2^{m-n} - 1) = 2^8$$

Để thấy $m \neq n$, ta xét 2 trường hợp :

$$+ \text{ Nếu } m - n = 1 \Rightarrow n = 8, m = 9$$

+ Nếu $m - n \geq 2$ thì $2^{m-n} - 1$ là 1 số lẻ lớn hơn 1, khi đó VT chứa TSNT khác 2, mà VT chỉ chứa TSNT 2 suy ra TH này không xảy ra : vậy $n = 8, m = 9$

Bài 4 : Tìm x , biết : $(x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+11} = 0$

HD :

$$(x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+11} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-7)^{x+1} [1 - (x-7)^{10}] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-7)^{(x+1)} [1 - (x-7)^{10}] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)^{x+1} = 0 \\ 1 - (x-7)^{10} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-7=0 \Rightarrow x=7 \\ (x-7)^{10}=1 \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ x=6 \end{cases} \end{cases}$$

Bài 5 : Tìm x, y biết : $|x-2011y| + (y-1)^{2012} = 0$

HD : ta có $|x-2011y| \geq 0$ với mọi x, y và $(y-1)^{2012} \geq 0$ với mọi y

Suy ra : $|x-2011y| + (y-1)^{2012} \geq 0$ với mọi x, y . Mà $|x-2011y| + (y-1)^{2012} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2011y=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Rightarrow x=2011, y=1$$

Các bài tập tương tự :

Bài 6 : Tìm x, y biết :

$$\text{a) } |x+5| + (3y-4)^{2012} = 0$$

$$\text{b) } (2x-1)^2 + |2y-x| - 8 = 12 - 5.2^2$$