

## Chuyên đề 4: Giá trị nguyên của biến, giá trị của biểu thức

### 1. Các kiến thức vận dụng:

- Dấu hiệu chia hết cho 2, 3, 5, 9
- Phân tích ra TSNT, tính chất của số nguyên tố, hợp số, số chính phương
- Tính chất chia hết của một tổng, một tích
- ƯCLN, BCNN của các số

### 2. Bài tập vận dụng:

\* **Tìm x, y dưới dạng tìm nghiệm của đa thức**

**Bài 1: a)** Tìm các số nguyên tố x, y sao cho:  $51x + 26y = 2000$

b) Tìm số tự nhiên x, y biết:  $7(x - 2004)^2 = 23 - y^2$

c) Tìm x, y nguyên biết:  $xy + 3x - y = 6$

d) Tìm mọi số nguyên tố thỏa mãn:  $x^2 - 2y^2 = 1$

HD: a) Từ  $51x + 26y = 2000 \Rightarrow 17.3.x = 2.(1000 - 13y)$  do 3, 17 là số NT nên x :2 mà x NT  $\Rightarrow x = 2$ . Lại có  $1000 - 13y : 51$ ,  $1000 - 13y > 0$  và y NT  $\Rightarrow y =$

b) Từ  $7(x - 2004)^2 = 23 - y^2$  (1)

do  $7(x - 2004)^2 \geq 0 \Rightarrow 23 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 23 \Rightarrow y \in \{0, 2, 3, 4\}$

Mặt khác 7 là số NT  $\Rightarrow 13 - y^2 : 7$  vậy  $y = 3$  hoặc  $y = 4$  thay vào (1)

suy ra:  $x = 2005, y = 4$  hoặc  $x = 2003, y = 4$

b) Ta có  $xy + 3x - y = 6 \Leftrightarrow (x - 1)(y + 3) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 1 \\ y + 3 = 3 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x - 1 = -1 \\ y + 3 = -3 \end{cases}$

hoặc  $\begin{cases} x - 1 = 3 \\ y + 3 = 1 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x - 1 = -3 \\ y + 3 = -1 \end{cases}$

c)  $x^2 - 2y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2y^2 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 2y^2$

do VP =  $2y^2$  chia hết cho 2 suy ra  $x > 2$ , mặt khác y nguyên tố  $\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 2y \\ x - 1 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

**Bài 2** a) Tìm các số nguyên thỏa mãn:  $x - y + 2xy = 7$

b) Tìm  $x, y \in \mathbb{N}$  biết:  $25 - y^2 = 8(x - 2012)^2$

HD: a) Từ  $x - y + 2xy = 7 \Leftrightarrow 2x - 2y + 2xy = 7 \Leftrightarrow (2x - 1)(2y + 1) = 13$

b) Từ  $25 - y^2 = 8(x - 2012)^2 \Rightarrow y^2 \leq 25$  và  $25 - y^2$  chia hết cho 8, suy ra  $y = 1$  hoặc  $y = 3$  hoặc  $y = 5$ , từ đó tìm x

**Bài 3** a) Tìm giá trị nguyên dương của x và y, sao cho:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$

b) Tìm các số a, b, c nguyên dương thỏa mãn:

$$a^3 + 3a^2 + 5 = 5^b \text{ và } a + 3 = 5^c$$

HD: a) Từ  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5(x + y) = xy (*) \Rightarrow xy : 5 \Rightarrow \begin{cases} x : 5 \\ y : 5 \end{cases}$

+ Với x chia hết cho 5, đặt  $x = 5q$  (q là số tự nhiên khác 0) thay vào (\*) suy ra:

$5q + y = qy \Rightarrow 5q = (q - 1)y$ . Do  $q = 1$  không thỏa mãn, nên với  $q$  khác 1 ta có  $y = \frac{5q}{q-1} = 5 + \frac{5}{q-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow q-1 \in U(5)$ , từ đó tìm được  $y, x$

b)  $a^3 + 3a^2 + 5 = 5^b \Rightarrow a^2(a+3) = 5^b - 5$ , mà  $a+3 = 5^c \Rightarrow a^2 \cdot 5^c = 5(5^{b-1} - 1) \Rightarrow a^2 = \frac{5^{b-1} - 1}{5^{c-1}}$  Do  $a, b, c$  nguyên dương nên  $c = 1$  (vì nếu  $c > 1$  thì  $5^{b-1} - 1$  không

chia hết cho 5 do đó  $a$  không là số nguyên.) Với  $c = 1 \Rightarrow a = 2$  và  $b = 2$

**Bài 4:** Tìm các cặp số nguyên tố  $p, q$  thỏa mãn:

$$5^{2p} + 2013 = 5^{2p^2} + q^2$$

HD:  $5^{2p} + 2013 = 5^{2p^2} + q^2 \Rightarrow 2013 - q^2 = 5^{2p^2} - 5^{2p} \Rightarrow 2013 - q^2 = 25^p(25^p - 1)$

Do  $p$  nguyên tố nên  $2013 - q^2 : 25^2$  và  $2013 - q^2 > 0$  từ đó tìm được  $q$

**Bài 5:** Tìm tất cả các số nguyên dương  $n$  sao cho:  $2^n - 1$  chia hết cho 7

HD: Với  $n < 3$  thì  $2^n$  không chia hết cho 7

Với  $n \geq 3$  khi đó  $n = 3k$  hoặc  $n = 3k + 1$  hoặc  $n = 3k + 2$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ )

Xét  $n = 3k$ , khi đó  $2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = 8^k - 1 = (7 + 1)^k - 1 = 7.A + 1 - 1 = 7.A : 7$

Xét  $n = 3k + 1$  khi đó  $2^n - 1 = 2^{3k+1} - 1 = 2 \cdot 8^{3k} - 1 = 2 \cdot (7A + 1) - 1 = 7A + 1$  không chia hết cho 7

Xét  $n = 3k + 2$  khi đó  $2^n - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4 \cdot 8^{3k} - 1 = 4(7A + 1) - 1 = 7A + 3$  không chia hết cho 7. Vậy  $n = 3k$  với  $k \in \mathbb{N}^*$

**\* Tìm  $x, y$  để biểu thức có giá trị nguyên, hay chia hết:**

**Bài 1** Tìm số nguyên  $m$  để:

a) Giá trị của biểu thức  $m - 1$  chia hết cho giá trị của biểu thức  $2m + 1$ .

b)  $|3m - 1| < 3$

HD: a) Cách 1: Nếu  $m > 1$  thì  $m - 1 < 2m + 1$ , suy ra  $m - 1$  không chia hết cho  $2m + 1$

Nếu  $m < -2$  thì  $|m - 1| < |2m + 1|$ , suy ra  $m - 1$  không chia hết cho  $2m + 1$

Vậy  $m \in \{-2; -1; 0; 1\}$

Cách 2: Để  $m - 1 : 2m + 1 \Rightarrow 2(m - 1) : 2m + 1 \Rightarrow (2m + 1) - 3 : 2m + 1 \Rightarrow 3 : 2m + 1$

b)  $|3m - 1| < 3 \Rightarrow -3 < 3m - 1 < 3 \Rightarrow \frac{-2}{3} < m < \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$  vì  $m$  nguyên

**Bài 2** a) Tìm  $x$  nguyên để  $6\sqrt{x} + 1$  chia hết cho  $2\sqrt{x} - 3$

b) Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để  $A \in \mathbb{Z}$  và tìm giá trị đó.

$$A = \frac{1 - 2x}{x + 3}. \text{ HD: } A = \frac{1 - 2x}{x + 3} = \frac{1 - 2(x + 3) + 6}{x + 3} = \frac{7}{x + 3} - 2$$

**Bài 3:** Tìm  $x$  nguyên để  $\frac{2012\sqrt{x} + 5}{1006\sqrt{x} + 1}$

HD:  $\frac{2012\sqrt{x} + 5}{1006\sqrt{x} + 1} = \frac{2(1006\sqrt{x} + 1) + 2009}{1006\sqrt{x} + 1} = 2 + \frac{2009}{1006\sqrt{x} + 1}$

để  $\frac{2012\sqrt{x} + 5}{1006\sqrt{x} + 1} \Rightarrow 2009 : 1006\sqrt{x} + 1 \Rightarrow x$  là số CP.

**Với  $x > 1$  và  $x$  là số CP thì  $1006\sqrt{x} + 1 > 2012 > 2009$  suy ra 2009 không chia hết cho  $1006\sqrt{x} + 1$**

**Với  $x = 1$  thay vào không thỏa mãn**

**Với  $x = 0$  thì  $2009 : 1006\sqrt{x} + 1 = 2009$**