

Chuyên đề 8 : Các bài toán về đa thức một ẩn

Bài 1 : Cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a khác 0)

Biết $P(1) = 100$, $P(-1) = 50$, $P(0) = 1$, $P(2) = 120$. Tính $P(3)$

HD : ta có $P(1) = 100 \Rightarrow a + b + c + d = 100$

$P(-1) = 50 \Rightarrow -a + b - c + d = 50$

$P(0) = 1 \Rightarrow d = 1$

$P(2) = 8a + 4b + c + d = 120$

Từ đó tìm được c, d , và a và XĐ được $P(x)$

Bài 2 : Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ.

Chứng tỏ rằng: $f(-2).f(3) \leq 0$. Biết rằng $13a + b + 2c = 0$

HD : $f(-2) = 4a - 2b + c$ và $f(3) = 9a + 3b + c \Rightarrow f(-2).f(3) = (4a - 2b + c)(9a + 3b + c)$

Nhận thấy $(4a - 2b + c) + (9a + 3b + c) = 13a + b + 2c = 0$

$\Rightarrow (4a - 2b + c) = -(9a + 3b + c)$

Vậy $f(-2).f(3) = -(4a - 2b + c).(4a - 2b + c) = -(4a - 2b + c)^2 \leq 0$

Bài 3 Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết rằng $f(0); f(1); f(2)$ có giá trị nguyên. Chứng minh rằng $2a, 2b$ có giá trị nguyên.

HD : $f(0) = c$, $f(1) = a + b + c$, $f(2) = 4a + 2b + c$

Do $f(0), f(1), f(2)$ nguyên $\Rightarrow c, a + b + c$ và $4a + 2b + c$ nguyên

$\Rightarrow a + b$ và $4a + 2b = 2(a + b) + 2a = 4(a + b) - 2b$ nguyên $\Rightarrow 2a, 2b$ nguyên

Bài 4 Chứng minh rằng: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có giá trị nguyên với mọi x nguyên khi và chỉ khi $6a, 2b, a + b + c$ và d là số nguyên

HD : $f(0) = d$, $f(1) = a + b + c + d$, $f(2) = 8a + 4b + c + d$

Nếu $f(x)$ có giá trị nguyên với mọi $x \Rightarrow d, a + b + c + d, 8a + 4b + c + d$ là các số nguyên . Do d nguyên $\Rightarrow a + b + c$ nguyên và $(a + b + c + d) + (a + b + c + d) + 2b$ nguyên $\Rightarrow 2b$ nguyên $\Rightarrow 6a$ nguyên . Chiều ngược lại cm tương tự.

Bài 5 : Tìm tổng các hệ số của đa thức nhận được sau khi bỏ dấu ngoặc trong biểu thức: $A(x) = (3 - 4x + x^2)^{2004} \cdot (3 + 4x + x^2)^{2005}$

HD : Giả sử $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{4018}x^{4018}$

Khi đó $A(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{4018}$

do $A(1) = 0$ nên $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{4018} = 0$

Bài 6 : Cho $x = 2011$. Tính giá trị của biểu thức:

$x^{2011} - 2012x^{2010} + 2012x^{2009} - 2012x^{2008} + \dots - 2012x^2 + 2012x - 1$

HD : Đặt $A = x^{2011} - 2012x^{2010} + 2012x^{2009} - 2012x^{2008} + \dots - 2012x^2 + 2012x - 1$

$x^{2010}(x - 2011) - x^{2009}(x - 2011) - x^{2008}(x - 2011) + \dots - x(x - 2011) + x - 1$

\Rightarrow tại $x = 2012$ thì $A = 2011$