CÁC BÀI TOÁN VỀ TỨ GIÁC VÀ ĐA GIÁC ĐẶC SẮC

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC VỀ TỨ GIÁC

1. Tứ giác

Định nghĩa:

- *Tứ giác ABCD là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.*
- *Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của tam giác.*

Tính chất:

- *Tổng các góc của một tứ giác bằng* 360^0.
- *Góc kề bù với một góc của tứ giác gọi là góc ngoài của tứ giác. Tổng các góc ngoài của một tứ giác bằng* 360^0

2. Hình thang

Định nghĩa

- *Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.*
- *Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông.*

Tính chất

- *Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau, hai cạnh đáy bằng nhau.*
- *Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau.*

Hình thang cân

- *Định nghĩa: Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.*
- *Tính chất: Trong hình thang cân hai cạnh bên bằng nhau và hai đường chéo bằng nhau.*
- *Dấu hiệu nhận biết:*

  + Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.

  + Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

Đường trung bình của tam giác

- *Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.*
- *Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.*
- *Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.*

Đường trung bình của hình thang

- *Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.*
- *Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.*
- *Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.*

3. Hình bình hành

Định nghĩa: *Hình bình hành là tứ giác có các cặp cạnh đối song song.*

Tính chất: *Trong hình bình hành:*

- *Các cạnh đối bằng nhau.*
- *Các góc đối bằng nhau.*
- *Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.*

Dấu hiệu nhận biết:

- *Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành.*
- *Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.*
- *Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.*
- *Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.*

4. Hình chữ nhật

Định nghĩa: *Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.*

Tính chất: *Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.*

Dấu hiệu nhận biết:

- *Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.*
- *Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.*
- *Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.*
- *Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.*

Áp dụng vào tam giác:

- *Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.*
- *Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.*

5. Hình thoi

Định nghĩa: *Hình thoi là một tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.*

Tính chất: *Trong hình thoi:*

- *Hai đường chéo vuông góc với nhau.*
- *Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi.*

Dấu hiệu nhận biết:

- *Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.*
- *Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.*
- *Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.*
- *Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.*

6. Hình vuông

Định nghĩa: *Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau.*

Tính chất: *Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.*

Dấu hiệu nhận biết:

- *Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.*
- *Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.*
- *Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông.*
- *Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.*
- *Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.*
- *Một tứ giác vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi thì tứ giác đó là hình vuông.*

7. Đa giác

Định nghĩa

- ***Đa giác lồi*** *là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.*
- ***Đa giác đều*** *là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.*

Một số tính chất

- *Tổng các góc của đa giác n cạnh bằng* $(n-2).180^0$.
- *Mỗi góc của đa giác đều n cạnh bằng* $\dfrac{(n-2).180^0}{n}$.
- *Số các đường chéo của đa giác n cạnh bằng* $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng hai đường chéo của tứ giác ABCD vuông góc với nhau khi và chỉ khi $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$

Phân tích tìm lời giải

Dễ thấy nếu tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc thì $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$, ngược lại nếu có $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$, khi đó để chứng minh AC và BD vuông góc với nhau ta có các hướng sau:

+ Hướng 1: Gọi M là giao điểm của AC và BD. Từ đỉnh B hạ đường thẳng vuông góc với AC tại O. Ta cần chứng minh được M và O trùng nhau. Muốn vậy lấy N trên tia đối của tia OB sao cho $ON = MD$ và ta cần phải chứng minh được hai điểm M và O trùng nhau. Chú ý rằng khi $AB = BC$ thì ta suy ra được $CD = DA$ nên hiển nhiên M và O trùng nhau. Như vậy ta cần xét cho trường hợp $AB \neq BC$. Theo định lí Pitago ta có

$$AB^2 + CD^2 = AM^2 + 2AM.OM + OM^2 + OB^2 + CM^2 + MD^2$$

$$BC^2 + AD^2 = OB^2 + MC^2 - 2MC.OM + OM^2 + MA^2 + MD^2$$

Mà ta lại có $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ nên từ đóta suy ra được $MO\left(AM + MC\right) = 0 \Leftrightarrow MO = 0$

+ Hướng 2: Dựng BK và DH cùng vuông góc với AC. Ta cần chứng minh cho hai điểm K và H trùng nhau. Áp dụng định lí Pitago ta được

$$AB^2 + CD^2 = AK^2 + BK^2 + CH^2 + DH^2;\ BC^2 + AD^2 = CK^2 + BK^2 + AH^2 + DH^2$$

Mà ta có $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ nên ta được $KH = 0$.

Lời giải

+ Điều kiện cần: Xét tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc tại O

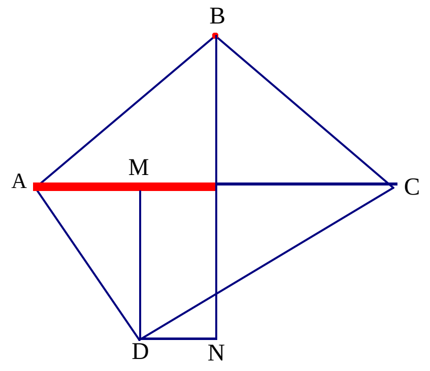
Khi đó áp dụng định lí Pitago ta được

$$AB^2 + CD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2;\ AD^2 + BC^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$$

Từ đó ta được $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

+ Điều kiện đủ: Xét tứ giác ABCD có $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

Cách 1: Ta xét các trường hợp sau



- Nếu $AB = BC$ thì từ $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ ta được $CD = DA$

Từ đó suy ra B, D thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AC, do đó $AC \perp BD$.

- Nếu $AB \neq BC$. Khi đó vẽ BO vuông góc với AC tại O, vẽ DM vuông góc với AC tại M, vẽ DN vuông góc với BO tại N. Khi đó tứ giác DMNO là hình chữ nhật.

Không mất tính tổng quát ta giả sử M nằm giữa O và A.

Khi đó áp dụng định lí Pitago ta được

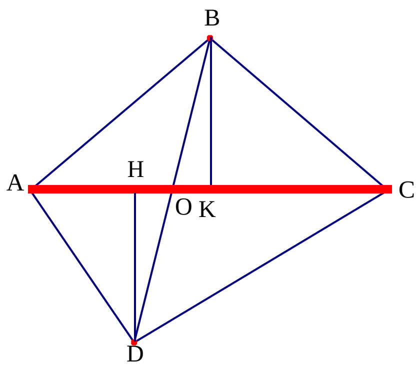
$$AB^2+CD^2=OA^2+OB^2+CM^2+MD^2=(MA+MO)^2+OB^2+CM^2+MD^2$$
$$=AM^2+2AM.OM+OM^2+OB^2+CM^2+MD^2$$
$$BC^2+AD^2=OB^2+OC^2+MA^2+MD^2=OB^2+(MC-OM)^2+MA^2+MD^2$$
$$=OB^2+MC^2-2MC.OM+OM^2+MA^2+MD^2$$

Mà ta lại có $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$ nên ta được

$$2MA.OM=-2MC.OM \Leftrightarrow MO(AM+MC)=0 \Leftrightarrow MO=0$$

Từ đó dẫn đến hai điểm O và M trùng nhau hay ta được $AC \perp BD$.

Cách 2: Vẽ DH vuông góc với AC tại H, BK vuông góc với AC tại K



- Nếu hai điểm K và H trùng nhau thì ta được $AC \perp BD$
- Nếu hai điểm K và H không trùng nhau, khi đó gọi O là giao điểm của AC và BD. Không mất tính tổng quát ta giả sử A, H, O, K, C nằm trên AC theo tứ tự đó.

Áp dụng định lí Pitago ta được

$$AB^2+CD^2=AK^2+BK^2+CH^2+DH^2$$
$$BC^2+AD^2=CK^2+BK^2+AH^2+DH^2$$

Mà ta có $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$ nên ta được

$$AK^2+CH^2=CK^2+AH^2 \Leftrightarrow AH^2-CH^2+CK^2-AK^2=0$$
$$\Leftrightarrow (AH+CH)(AH-CH)+(AK+CK)(CK-AK)=0$$
$$\Leftrightarrow AC(AH-CH+CK-AK)=2AC.KH \Leftrightarrow KH=0$$

Điều này vô lí vì K và H không trùng nhau. Vậy hai điểm K và H trùng nhau hay ta được $AC \perp BD$.

Ví dụ 2. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo bằng nhau. Lấy các điểm E, F, G, H theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CD, DA theo tỉ số 1:2. Chứng minh rằng EG = FH và $EG \perp FH$

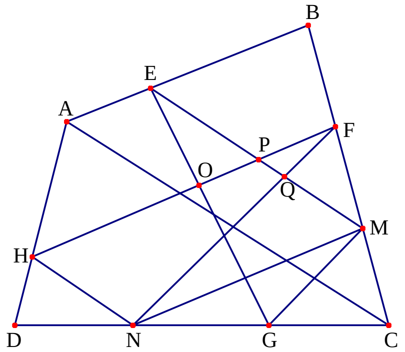
Phân tích tìm lời giải

Từ giả thiết của bài toán ta suy ra được $\frac{BE}{BA}=\frac{BM}{BC}=\frac{1}{3}$ nên EM//AC. Tương tự ta cũng được NF//BD. Từ đó ta được $EM=\frac{2}{3}AC$; $NF=\frac{2}{3}BD$, chú ý đến AC = BD suy ra được ME = NF. Từ các đường thẳng song song ta thấy được $MG=NH=\frac{1}{3}AC$ và

$\widehat{EMG}=\widehat{FNH}=90^0$ nên $\Delta EMG=\Delta FNH$. Từ đó ta suy ra được $EG=FH$. Mặt khác gọi O là giao điểm của EG với FH, P là giao điểm của EM với FH và Q là giao điểm của EM với FN. Khi đó ta thấy $\widehat{EOP}=\widehat{PQF}=90^0$ nên ta được $EO\perp OP\Rightarrow EG\perp FH$

Lời giải

+ Chứng minh EG = FH



Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của CF, DG

Ta có $CM=\frac{1}{2}CF=\frac{1}{3}BC$ nên ta được

$$\frac{BM}{BC}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{BE}{BA}=\frac{BM}{BC}=\frac{1}{3}$$

Do đó theo định lí Talets đảo ta được EM song song với AC. Nên suy ra

$\frac{EM}{AC}=\frac{BM}{BE}=\frac{2}{3}\Rightarrow EM=\frac{2}{3}AC$

Tương tự ta được $\frac{NF}{BD}=\frac{CF}{CB}=\frac{2}{3}\Rightarrow NF=\frac{2}{3}BD$

Mà ta lại có AC = BD nên suy ra được mà ME = NF. Tương tự như trên ta có MG // BD và NH // AC. Lại có $MG=NH=\frac{1}{3}AC$. Mặt khác EM // AC; MG // BD và AC vuông góc với BD nên ta được EM vuông góc với MG. Từ đó ta được $\widehat{EMG}=90^0$. Hoàn toàn tương tự thì ta có $\widehat{FNH}=90^0$. Từ đó ta được $\widehat{EMG}=\widehat{FNH}=90^0$.

Kết hợp với ME = NF và $MG=NH=\frac{1}{3}AC$ ta được $\Delta EMG=\Delta FNH$ nên suy ra EG = FH

+ Chứng minh $EG\perp FH$

Gọi O là giao điểm của EG với FH, P là giao điểm của EM với FH và Q là giao điểm của EM với FN.

Khi đó ta có $\widehat{PQF}=90^0$ nên $\widehat{QPF}+\widehat{QFP}=90^0$. Mà ta lại có $\widehat{QPF}=\widehat{OPE}$ và $\widehat{OEP}=\widehat{QFP}$

Suy ra $\widehat{EOP}=\widehat{PQF}=90^0$ nên ta được $EO\perp OP\Rightarrow EG\perp FH$

Ví dụ 3. Cho tứ giác ABCD và điểm M trên cạnh AD. Qua điểm A và D vẽ lần lượt các đường thẳng song song với MC và MB, hai đường thẳng này cắt nhau tại N. Chứng minh rằng N nằm trên cạnh BC khi và chỉ khi AB song song với CD.

Phân tích tìm lời giải

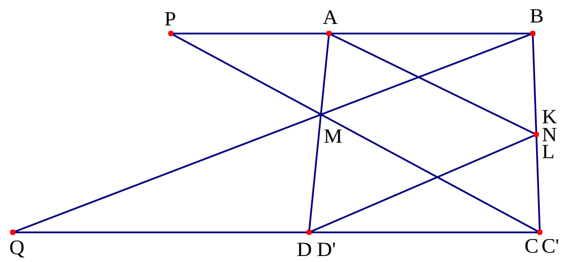
+ Khi N nằm trên cạnh BC thì ta được $\frac{PA}{PB}=\frac{CN}{CB}$ và $\frac{CN}{CB}=\frac{CD}{CQ}$ nên $\frac{PA}{PB}=\frac{CD}{CQ}\Rightarrow\frac{PQ}{CD}=\frac{PB}{CQ}$. Từ Q kẻ đường thẳng song song với PB và cắt AD, PC lần lượt tại

D′ và C′ thì ta được $\frac{PA}{C'D'}=\frac{CD}{CQ}$, từ đó ta được $\frac{CD}{CQ}=\frac{C'D'}{C'Q}$. Từ đó suy ra C và C′, D và D′ trùng nhau. Do đó ta được AB//CD

+ Khi AB song song với CD, khi đó giả sử DN cắt BC tại K và AN cắt BC tại L. Khi đó cần chứng minh ba điểm N, K, L trùng nhau.

Lời giải

Gọi giao điểm của AB và CM là P, giao điểm của BM và CD là Q.



+ Điều kiện cần: Ta chứng minh khi N nằm trên cạnh BC thì AB song song với CD.

Thật vậy, khi N nằm trên cạnh BC thì

Do AN//CP nên theo định lí Talet ta có

$$\frac{PA}{PB}=\frac{CN}{CB}$$

Do DN//BQ nên theo định lí Talet ta có $\frac{CN}{CB}=\frac{CD}{CQ}$. Từ đó ta được $\frac{PA}{PB}=\frac{CD}{CQ}\Rightarrow\frac{PQ}{CD}=\frac{PB}{CQ}$.

Từ Q kẻ đường thẳng song song với PB và cắt AD, PC lần lượt tại D′ và C′. Ta sẽ chứng minh hai điểm C và C′ trùng nhau, hai điểm D và D′ trùng nhau. Vì QC′//BP nên theo định lí Talet ta có $\frac{PA}{C'D'}=\frac{CD}{CQ}$, từ đó ta được $\frac{CD}{CQ}=\frac{C'D'}{C'Q}$. Nếu minh hai điểm C và C′ không trùng nhau, hai điểm D và D′ không trùng nhau thì ta được DD′//CC′. Điều này mâu thuẫn. Do đó ta được PB//CQ hay AB //CD.

+ Ta chứng minh khi AB//CD thì N nằm trên cạnh BC.

Thật vậy, giả sử DN cắt BC tại K và AN cắt BC tại L. Do AB//CD và BM//DK nên theo định lí Talets ta được $\frac{PA}{PB}=\frac{CD}{CQ}=\frac{CK}{CB}$. Từ AL//CM ta có $\frac{PA}{PB}=\frac{CL}{CB}$

Từ đó ta được $\frac{CL}{CB}=\frac{CK}{CB}\Rightarrow CL=CK$ nên ta được $L\equiv K$, do đó $L\equiv K\equiv N$ hay N nằm trên BC.

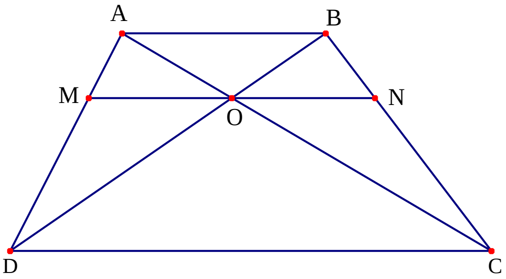
Ví dụ 4. Hình thang ABCD có AB//CD và hai đường chéo cắt nhau tại O. Đường thẳng qua O và song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự ở M và N.

a) Chứng minh rằng $OM=ON$.

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{2}{MN}$.

c) Biết $S_{AOB}=a^2$ và $S_{COD}=b^2$. Tính S_{ABCD} theo a và b.

Lời giải



a) Trong tam giác DAB có OM song song AB nên theo định lí Talets ta có $\frac{OM}{AB}=\frac{OD}{BD}$

Tương tự ta có $\frac{ON}{AB}=\frac{OC}{AC}$

Cũng theo định lí Talets ta có $\frac{OD}{OB}=\frac{OC}{OA}$

Do đó $\frac{OD}{OD+OB}=\frac{OC}{OC+OA}\Rightarrow\frac{OD}{DB}=\frac{OC}{AC}$

Kết hợp các kết quả trên ta được $\frac{OM}{AB}=\frac{ON}{AB}$ nên suy ra $OM=ON$

b) Trong tam giác ABD có OM//AB nên theo định lí Talets ta có $\frac{OM}{AB}=\frac{DM}{AD}$

Trong tam giác ADC có OM//CD nên theo định lí Talets ta có $\frac{OM}{DC}=\frac{AM}{AD}$

Từ đó ta được $OM\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}\right)=\frac{AM+DM}{AD}=\frac{AD}{AD}=1$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng được $ON\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}\right)=1$

Suy ra ta có $\left(OM+ON\right)\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}\right)=2$ hay ta được $\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{2}{MN}$

c) Dễ thấy các tam giác AOB và AOD có cùng đường cao hạ từ A nên $\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}}=\frac{OB}{OD}$

Các tam giác BOC và DOC có cùng đường cao hạ từ C nên $\frac{S_{BOC}}{S_{DOC}}=\frac{OB}{OD}$

Do đó ta được $\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}}=\frac{S_{BOC}}{S_{DOC}}$ suy ra $S_{AOB}.S_{DOC}=S_{BOC}.S_{AOD}$

Mà lai lại có $S_{CAB}=S_{DAB}$ hay $S_{COB}+S_{AOB}=S_{DOA}+S_{AOB}$ nên ta được $S_{AOD}=S_{BOC}$

Do đó suy ra $S_{AOB}.S_{DOC}=\left(S_{AOD}\right)^2$ hay ta được $S^2_{AOD}=a^2.b^2\Rightarrow S_{AOD}=ab$

Từ đó suy ra $S_{ABCD}=a^2+2.ab+b^2=\left(a+b\right)^2$.

Ví dụ 5. Cho hình thang ABCD có đáy nhỏ CD. Từ D vẽ đường thẳng song song với BC, cắt AC tại M và AB tại K, Từ C vẽ đường thẳng song song với AD, cắt AB tại F, qua F ta lại vẽ đường thẳng song song với AC, cắt BC tại P. Chứng minh rằng

a) Hai đường thẳng MP và AB song song với nhau

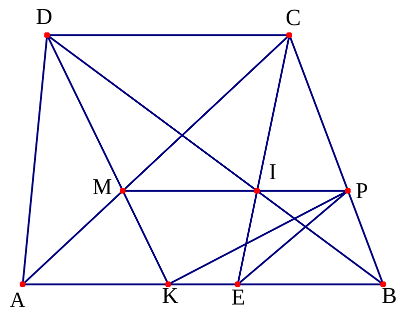
b) Ba đường thẳng MP, CF, DB đồng quy tại một điểm

Phân tích tìm lời giải

+ Để chứng minh MP song song với AB. Ta chứng minh $\frac{CP}{PB}=\frac{CM}{AM}$

+ Để chứng minh ba đường thẳng MP, CF, DB đồng quy tại một điểm. Ta gọi I là giao điểm của BD và CF rồi chứng minh ba điểm P, I, M thẳng hàng

Lời giải



a) Do EP // AC nên theo định lí Talets ta có $\frac{CP}{PB}=\frac{AF}{FB}$

Do AK // CD nên theo địn lí Talets ta có $\frac{CM}{AM}=\frac{DC}{AK}$

Dễ thấy các tứ giác AFCD và DCBK là các hình bình hành nên $AF=DC$ và $BF=AK$. Kết hợp các kết quả trên ta được $\frac{CP}{PB}=\frac{CM}{AM}$ nên theo định lí đảo ta có MP song song với AB.

b) Gọi I là giao điểm của BD và CF, khi đó ta có $\frac{CP}{PB}=\frac{CM}{AM}=\frac{DC}{AK}=\frac{DC}{FB}$

Mà FB song song với CD nên $\frac{DC}{FB}=\frac{DI}{IB}$ suy ra $\frac{CP}{PB}=\frac{DI}{IB}$

Từ đó theo định lí Talets đảo ta có IP // DC // AB

Do đó qua P có hai đường thẳng IP, PM cùng song song với AB nên theo tiên đề Oclít thì ba điểm P, I, M thẳng hàng hay MP đi qua giao điểm của CF và DB. DO đó ba đường thẳng MP, CF, DB đồng quy

Ví dụ 6. Cho hình thang ABCD (AB//CD). Chứng minh rằng nếu AC+CB = AD+ DB thì hình thang ABCD cân.

Phân tích tìm lời giải

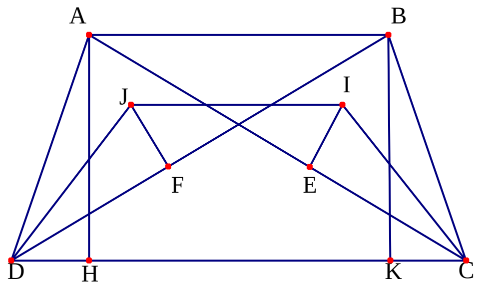
Để chứng minh được hình thang ABCD cân ta có các ý tưởng sau:

+ Ý tưởng thứ nhất ta sẽ chứng minh hai đường chéo AC và BD bằng nhau. Hạ AH và BK cùng vuông góc với CD. Khi đó ta được $AD^2=AH^2+HD^2$; $BC^2=BK^2+CK^2$. Đến đây ta thấy nếu $BD>AC$ thì ta được $DK>CH$, từ đó suy ra $DH>CK$ nên ta được $AD>BC$. Từ đó ta suy ra được $AC+CB<AD+DB$, nhưng điều này lại mâu thuẫn với giả thiết. Nếu $BD<AC$ ta cũng được kết quả tương tự. Do đó ta suy ra được AC và BD bằng nhau hay ABCD là hình thang cân.

+ Ý tưởng thứ hai là chứng minh $ACB = ADB$ để hình thang ABCD nội tiếp đường tròn.

Lời giải

Cách 1: Hạ AH vuông góc với CD và B vuông góc với CD $\left(H,K \in CD\right)$. Ta xét các trường hợp sau:



+ Trường hợp 1: Nếu $BD > AC$, khi đó áp dụng định lí Pitago cho các tam giác vuông AHC và BKD ta có

$$DK^2 = BD^2 - BK^2;\ CH^2 = AC^2 - AH^2$$

Do $BD > AC$ và $AH = BK$ nên ta được $DK > CH$, từ đó suy ra $DH > CK$.

Áp dụng định lí Pitago cho các tam giác vuông AHD và BKC ta có

$$AD^2 = AH^2 + HD^2;\ BC^2 = BK^2 + CK^2$$

Do $AH = CK$ và $DH > CK$ nên ta được $AD > BC$.

Từ $BD > AC$ và $AD > BC$ suy ra $AC + CB < AD + DB$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $AC + CB = AD + DB$. Vậy trường hợp này không xẩy ra.

+ Trường hợp 2: Nếu $BD < AC$, chứng minh tương tự như trên ta cũng được $AC + CB > AD + DB$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $AC + CB = AD + DB$. Vậy trường hợp này không xẩy ra.

Từ đó ta được $AC = BD$ hay hình thang ABCD cân.

Cách 2: Gọi I và J lần lượt là tâm đường trong nội tiếp các tam giác ABC và ABD. Gọi E và F là hình chiếu tương ứng của I và J trên AC và BD.

Do AB//CD nên ta có $S_{ABC} = S_{ABD}$ do đó ta có $IE\left(AB + BC + CA\right) = JF\left(AB + BD + DA\right)$ (1)

Từ $AC + CB = AD + DB$ ta được $AC + CB + AB = AD + DB + AB$.

Kết hợp với (1) ta được $IE = JF$. Mặt khác ta có $2CE = AC + BC - AB = AD + BD - AB = 2DF$

Xét hai tam giác vuông IEC và JFD có $IE = JF$, $CE = DF$ nên ta được $ICE = JDF$

Từ đó suy ra $ACB = ADB$, do đó hình thang ABCD nội tiếp. Suy ra hình thang ABCD là hình thang cân.

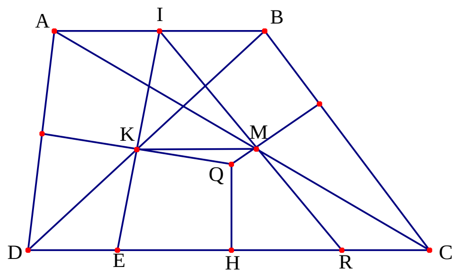
Ví dụ 7. Cho hình thang ABCD (AB//CD, $AB < CD$). Gọi K, M lần lượt là trung điểm của BD, AC. Đường thẳng qua K và vuông góc với AD cắt đường thẳng qua M và vuông góc với BC tại Q. Chứng minh rằng KM song song với AB và $QC = QD$

Phân tích tìm lời giải

+ Gọi I là trung điểm AB, E là giao điểm của IK với CD, R là giao điểm của MI với CD. Để chứng minh KM//AB ta sẽ chứng minh KM//ER. Muốn vậy ta cần chứng minh KM là đường trung bình của tam giác IER. Để có điều này ta cần chứng minh được IK = KE và MI = MR , điều này có thể thực hiện được do $\Delta KIB = \Delta KED$ và $\Delta MIA = \Delta MRC$.

+ Để chứng minh $QC = QD$ ta sẽ chứng minh Q thuộc đường trung trực của CD hay Q thuộc đường trung trực của ER. Muốn vậy ta cần chứng minh Q là giao điểm của hai đường trung trực của tam giác IER.

Lời giải



Gọi I là trung điểm AB, E là giao điểm của IK với CD, R là giao điểm của MI với CD.

Xét hai tam giác KIB và KED có

$ABD = BDC$, $KB = KD$ và $IKB = EKD$

Suy ra $\Delta KIB = \Delta KED \Rightarrow IK = KE$

Chứng minh tương tự có $\Delta MIA = \Delta MRC$

nên suy ra $MI = MR$

Trong tam giác IER có $IK = KE$ và $MI = MR$ nên KM là đường trung bình, do đó KM // CD

Mà ta lại có CD//AB nên ta được KM//AB.

+ Ta có IA = IB; KB = KD nên IK là đường trung bình của tam giác ABD.

Từ đó suy ra IK//AD hay IE//AD. Chứng minh tương tự cho tam giác ABC ta được IM//BC hay IR//BC

Lại có $QK \perp AD$ và IE//AD nên $QK \perp IE$. Tương tự ta cũng có $QM \perp IR$

Từ trên có $IK = KE$ và $QK \perp IE$ nên QK là trung trực ứng với cạnh IE của tam giác IER.

Tương tự QM là trung trực thứ hai của tam giác IER

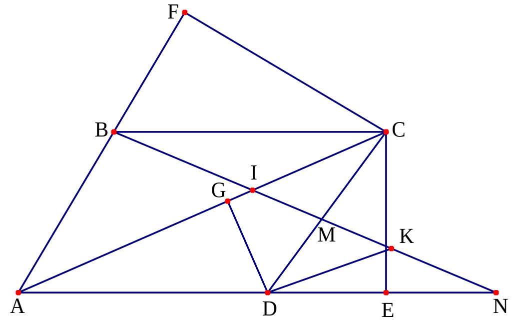
Hạ $QH \perp CD$ suy ra QH là trung trực thứ ba của tam giác. Do đó Q nằm trên trung trực của đoạn CD

Suy ra Q cách đều C và D hay $QC = QD$

Ví dụ 8. Cho hình bình hành ABCD có đường chéo lớn là AC. Tia Dx cắt SC, AB, BC lần lượt tại I, M, N. Vẽ CE vuông góc với AB, CF vuông góc với AD, BG vuông góc với AC. Gọi K là điểm đối xứng với D qua I. Chứng minh rằng

a) $\frac{KM}{KN} = \frac{DM}{DN}$ b) $AB.AE + AD.AF = AC^2$

Lời giải



a) Do AD// CM nên theo định lí Talets ta có

$\frac{IM}{ID}=\frac{CI}{AI}$

Do CD song song với AN nên ta được

$\frac{CI}{AI}=\frac{ID}{IN}$

Từ đó ta được $\frac{IM}{ID}=\frac{ID}{IN}$ hay $ID^2=IM.IN$

Cũng theo định lí Talets ta có $\frac{DM}{MN}=\frac{CM}{MB}$

Nên ta được $\frac{DM}{MN+DM}=\frac{CM}{MB+CM}\Rightarrow\frac{DM}{DN}=\frac{CM}{CB}$

Từ ID = IK và $ID^2=IM.IN$ suy ra $IK^2=IM.\ IN$. Do đó ta được

$$\frac{IK}{IM}=\frac{IN}{IK}\Rightarrow\frac{IK-IM}{IM}=\frac{IN-IK}{IK}\Rightarrow\frac{KM}{IM}=\frac{KN}{IK}\Rightarrow\frac{KM}{KN}=\frac{IM}{IK}$$

Nên suy ra $\frac{KM}{KN}=\frac{IM}{ID}=\frac{CM}{AD}=\frac{CM}{CB}$. Kết hợp với suy ra $\frac{KM}{KN}=\frac{DM}{DN}$

b) Dễ thấy hai tam giác AGB và AEC đồng dạng với nhau nên ta được

$\frac{AE}{AG}=\frac{AC}{AB}\Rightarrow AB.AE=AC.AG$

Từ đó ta được $AB.AE=AG\left(AG+CG\right)$. Ta lại có $\Delta CGB\backsim\Delta AFC$ nên suy ra

$\frac{AF}{AC}=\frac{CG}{CB}=\frac{CG}{AD}$

Từ đó ta được $AF.AD=AC.CG\Rightarrow AF.AD=\left(AG+CG\right).CG$

Cộng vế theo vế hai kết quả trên ta được

$AB.AE+AF.AD=\left(AG+CG\right).AG+\left(AG+CG\right).CG$

Hay ta được $AB.AE+AF.AD=AG^2+2.AG.CG+CG^2=\left(AG+CG\right)^2=AC^2$

Vậy $AB.AE+AD.AF=AC^2$

Ví dụ 9. Cho hình bình hành ABCD. Trên các cạnh BC, CD lấy lần lượt các điểm M, N thỏa mãn điều kiện $\frac{BM}{CM}=\frac{CN}{2DN}=k$ (k là một số cho trước). Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của BD với AM, AN.

Chứng minh rằng $S_{MNPQ}=S_{APQ}$.

Phân tích tìm lời giải

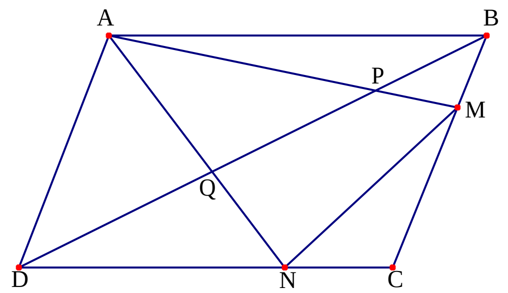
Dễ thấy $\frac{S_{APQ}}{S_{AMN}}=\frac{AP.AQ}{AM.AN}$ do đó để chứng minh $S_{MNPQ}=S_{APQ}$ ta cần chỉ ra được $\frac{S_{APQ}}{S_{AMN}}=\frac{1}{2}$. Từ đó ta tập trung chứng minh $\frac{AP.AQ}{AM.AN}=\frac{1}{2}$. Để ý là $\frac{BM}{CM}=k$ nên

$\frac{BM}{BC}=\frac{k}{k+1}\Rightarrow\frac{BM}{AD}=\frac{k}{k+1}$, từ đó ta được $\frac{PM}{AP}=\frac{k}{k+1}$ nên $\frac{AP}{AM}=\frac{k+1}{2k+1}$. Hoàn toàn tương tự tương tự ta được $\frac{AQ}{AN}=\frac{2k+1}{2\left(k+1\right)}$. Đến đây bài toán được chứng minh.

Lời giải

Dễ thấy $\frac{S_{APQ}}{S_{AMN}}=\frac{\frac{1}{2}AP.AQ.\sin PAQ}{\frac{1}{2}AM.AN.\sin MAN}=\frac{AP.AQ}{AM.AN}$. Mà ta có $\frac{BM}{CM}=\frac{CN}{2DN}=k$.

Nên ta được $\frac{BM}{BM+CM}=\frac{k}{k+1}$ hay $\frac{BM}{BC}=\frac{k}{k+1}\Rightarrow\frac{BM}{AD}=\frac{k}{k+1}$



Trong tam giác PAD có MB//AD nên theo định lí Talets ta có $\frac{BM}{AD}=\frac{PM}{AP}$. Từ đó ta được $\frac{PM}{AP}=\frac{k}{k+1}$ nên suy ra

$\frac{AP}{AP+PM}=\frac{k+1}{2k+1}$ hay $\frac{AP}{AM}=\frac{k+1}{2k+1}$

Lại có $\frac{CN}{2DN}=k$ nên $\frac{DN}{CN}=\frac{1}{2k}$.

Do đó $\frac{DN}{DN+CN}=\frac{1}{2k+1}\Rightarrow\frac{DN}{CD}=\frac{1}{2k+1}$. Từ đó suy ra $\frac{AB}{DN}=2k+1$.

Trong tam giác QAB có DN//AB nên theo định lí Talets ta được $\frac{AQ}{NQ}=\frac{AB}{DN}$

Từ đó ta được $\frac{AQ}{NQ}=2k+1\Rightarrow\frac{\square\square AQ}{AQ+NQ}=\frac{2k+1}{2k+1+1}\Rightarrow\frac{AQ}{AN}=\frac{2k+1}{2\left(k+1\right)}$

Do đó ta được $\frac{AP.AQ}{AM.AN}=\frac{k+1}{2k+1}.\frac{2k+1}{2\left(k+1\right)}\Rightarrow\frac{S_{APQ}}{S_{AMN}}=\frac{1}{2}\Rightarrow S_{APQ}=\frac{1}{2}S_{AMN}$

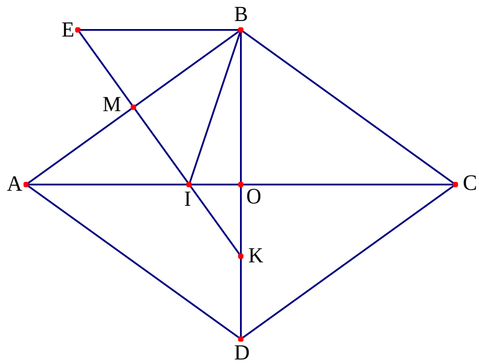
Từ đó suy ra $S_{MNPQ}=\frac{1}{2}S_{AMN}$ nên ta được $S_{MNPQ}=S_{APQ}$.

Ví dụ 10. Cho hình thoi ABCD có cạnh bằng a. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Biết rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng R và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD bằng r. Tính diện tích hình thoi ABCD theo các bán kính R và r.

Phân tích tìm lời giải

Do tứ giác ABCD là hình thoi nên hai đường chéo là đường trung trực của nhau. Khi đó tam đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và ABD lần lượt nằm trên AC và BC. Lúc này vẽ đường trung trực của AB cắt AC, BD lần lượt tại I, K thì I, K là tâm các đường trong ngoại tiếp tam giác ABC, ABD tương ứng. Khi đó ta suy ra được $KB = r$ và $IB = R$. Để tính được diện tích hình thoi ABCD theo R và r ta cần tính được OA và OB theo R và r. Qua B vẽ đường thẳng song song với AC cắt IK tại E khi đó ta thấy tam giác EBK vuông tại B có đường cao BM nên $\frac{1}{R^2}+\frac{1}{r^2}=\frac{4}{a^2}$. Lại có $\Delta AOB \backsim \Delta AMI$ suy ra $\frac{AO}{AB}=\frac{AM}{AI}$ từ đó ta tính được $AO=\frac{AM.AB}{AI}=\frac{AB^2}{2R}$ và tương tự thì $BO=\frac{BM.AB}{BK}=\frac{AB^2}{2r}$. Kết hợp các kết quả trên ta tính được diện tích hình thoi ABCDtheo R và r.

Lời giải



Tứ giác ABCD là hình thoi nên AC là đường trung trực của đoạn thẳng BD và BD là đường trung trực của AC. Do vậy nếu gọi M, I, K là giao điểm của đường trung trực của đoạn thẳng AB với AB, AC, BD thì ta có I, K là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, ABD

Từ đó ta có $KB = r$ và $IB = R$. Lấy một điểm E đối xứng với điểm I qua M , Ta có BEAI là hình thoi (vì có hai đường chéo EI và AB vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường)

Ta có $BAI = EBA$ mà $BAI + ABO = 90^0 \Rightarrow EBA + ABO = 90^0$

Xét Δ EBK có $EBK = 90^0$ và đường cao BM nên ta có $\frac{1}{BE^2}+\frac{1}{BK^2}=\frac{1}{BM^2}$

Mà $BK = r$, $BE = BI = R$; $BM = \frac{a}{2}$ nên ta được $\frac{1}{R^2}+\frac{1}{r^2}=\frac{4}{a^2}$

Xét ΔAOB và ΔAMI có $AOB = AMI = 90^0$ và A chung

Do đó $\Delta AOB \backsim \Delta AMI$ suy ra $\frac{AO}{AB}=\frac{AM}{AI} \Rightarrow AO=\frac{AM.AB}{AI}=\frac{AB^2}{2R}$

Chứng minh tương tự ta được $BO=\frac{BM.AB}{BK}=\frac{AB^2}{2r}$. Ta có $S_{ABCD}=2.AO.OB=2.\frac{AB^4}{4Rr}$. Mà theo định lí Pitago ta có $AB^2=OA^2+OB^2=\frac{1}{4}AB^4\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{r^2}\right) \Rightarrow AB^2=\frac{4R^2r^2}{R^2+r^2}$

Từ đó ta có $S_{ABCD}=\frac{8R^3r^3}{\left(R^2+r^2\right)^2}$.

Ví dụ 11. Cho hình vuông ABCD có AC cắt BD tại O. Lấy M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC (M khác B, C). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE = CM$.

a) Chứng minh rằng tam giác OEM vuông cân.

b) Chứng minh rằng ME song song với BN.

c) Từ C kẻ CH vuông góc với BN với H thuộc BN. Chứng minh rằng ba điểm O, M, H thẳng hàng.

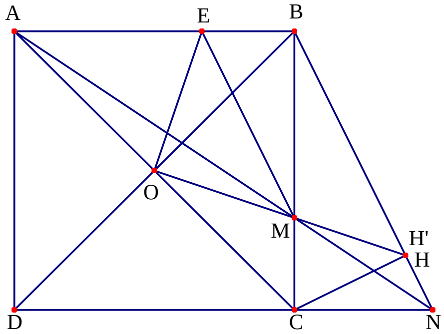
Phân tích tìm lời giải

a) Dễ thấy $\Delta OEB = \Delta OMC$ nên ta suy ra được $OE = OM$ và $BOM + BOE = EOM = 90^0$ nên tam giác EOM vuông cân.

b) Theo định lí Talets ta nhận thấy $\dfrac{AM}{MN} = \dfrac{AE}{EB}$. Từ đó suy ra ME // BN.

c) Để chứng minh ba điểm O, M, H thẳng hàng ta có thể gọi giao điểm của MO với BN là H′ và chứng minh đi H′ trùng với H.

Lời giải



a) Xét hai tam giác OEB và OMC. Vì ABCD là hình vuông nên ta có $OB = OC$ và

$ABD = BCA = 45^0$

Lại có $BE = CM$ nên suy ra $\Delta OEB = \Delta OMC$.

Do đó ta được $OE = OM$ và $BOE = COM$

Lại có $BOM + MOC = BOC = 90^0$ vì tứ giác ABCD là hình vuông

Nên ta được $BOM + BOE = EOM = 90^0$, kết hợp với $OE = OM$suy ra ΔOEM vuông cân tại O

b) Vì tứ giác ABCD là hình vuông nên $AB = CD$và AB // CD.

Do AB // CD nên AB // CN, áp dụng định lí Talet ta được $\dfrac{AM}{MN} = \dfrac{BM}{MC}$

Mà $BE = CM$ và $AB = CD$ nên $AE = BM$. Do đó suy ra $\dfrac{AM}{MN} = \dfrac{AE}{EB}$, nên ta được ME // BN.

c) Gọi H′ là giao điểm của OM và BN. Từ ME // BN $\Rightarrow OME = OH'B$ (cặp góc đồng vị)

Mà $OME = 45^0$ vì ΔOEM vuông cân tại O. Nên ta được $MH'B = 45^0 = BCA$

Do đó ta được $\Delta OMC \backsim \Delta BMH'$. Suy ra $\dfrac{OM}{BM} = \dfrac{MC}{MH'}$, kết hợp $OMB = CMH'$ (hai góc đối đỉnh)

Nên ta được $\Delta OMB \backsim \Delta CMH'$ suy ra $OBM = MH'C = 45^0$.

Vậy $BH'C = BH'M + MH'C = 90^0 \Rightarrow CH' \perp BN$

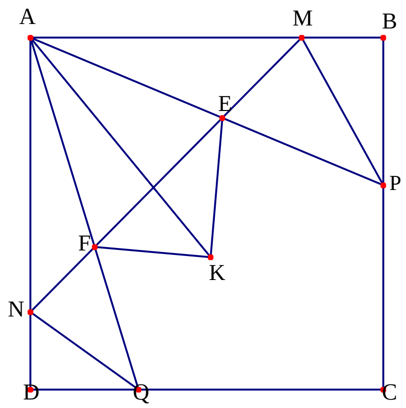
Mà $CH \perp BN\left(H \in BN\right)$ suy ra $H \equiv H'$ hay 3 điểm O, M, H thẳng hàng.

Ví dụ 12. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC và CD lấy các điểm P và Q sao cho $PAQ = 45^0$. Kẻ PM song song với $AQ\left(M \in AB\right)$ và QN song song với $AP\left(N \in AD\right)$. Đường thẳng MN cắt AP, AQ lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng $EF^2 = ME^2 + NF^2$.

Phân tích tìm lời giải

Quan sát hệ thức cần chứng minh ta liên tưởng đến định lí Pitago cho tam giác vuông. Do đó một ý tưởng hoang toàn tự nhiên là tạo ra một tam giác EFK vuông tại K sao cho $NF = FK; ME = EK$. Vấn đề là điểm K được xác định như thế nào. Ta có thể lấy điểm K đối xứng với N qua AQ, từ đó ta đi chứng minh K đối xứng với M qua AP và $EKF = 90^0$.

Lời giải



Theo giả thiết ta có PM//AQ và QN//AP nên ta có

$$MPA = PAQ = NQA = 45^0$$

Do đó ta được $PAB = NQD$, suy ra hai tam giác APB và QDN đồng dạng với nhau. Suy ra

$$\frac{ND}{QD} = \frac{PB}{AB} \Rightarrow ND = \frac{PB.QD}{AB}$$

Lại có $BPM = DAQ$ nên hai tam giác BPM và DAQ đồng dạng với nhau. Suy ra

$$\frac{BM}{BP} = \frac{QD}{AD} \Rightarrow BM = \frac{QD.BP}{AD}$$

Từ đó ta được $BM = DN$ nên ta có $AM = AN$

Gọi K là điểm đối xứng với M qua AP, khi đó ta được $AK = AM = AN$ và $MAP = KAP$

Mặt khác ta lại có $MAP + QAN = KAP + QAK = 45^0$ nên ta được $QAK = QAN$

Suy ra hai điểm K và N đối xứng với nhau qua AQ, do đó $EN = EK, EN = FK$

Từ đó ta được $KEF + KFE = 180^0 - KEM + 180^0 - KFN = 360^0 - 2\left(MEP + NFQ\right) = 90^0$

Suy ra $EKF = 90^0$ hay tam giác EKF vuông tại K. Do đó theo định lí Pitago ta có $EF^2 = KE^2 + KF^2$

Mà ta có $EN = EK, EN = FK$, từ đó suy ra $EF^2 = ME^2 + NF^2$.

Ví dụ 13. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh CB, CD lấy lần lượt các điểm E và F sao cho $\frac{EB}{BC} = k$ và $\frac{DF}{DC} = \frac{1-k}{1+k}$ với $0 < k < 1$. Đoạn thẳng BD cắt AE, AF lần lượt tại H, G. Đường thẳng vuông góc với EF kẻ từ A cắt BD tại P. Chứng minh rằng $\frac{PG}{PH} = \frac{DG}{BH}$.

Phân tích tìm lời giải

Để vẽ hình được chính xác ta có thể chọ một giá trị cụ thể của k, chẳng hạn $k = \frac{1}{3}$ (chú ý là khi chứng minh bài toán không được dùng đến giá trị $k = \frac{1}{3}$ này). Quan sát hình vẽ ta nhận thấy khá giống với một số bài toán về hình vuông nâng cao lớp 8. Nên ta ta thử đi theo hướng đó xem sao. Trước hết ta lấy T trên tia CD sao cho $DT = BE$. Khi đó ta có $\Delta ADM = \Delta ABE$ nên ta được $TAE = 90^0$ và suy ra được $AE = AT$. Bây giờ ta sẽ biến đổi để tìm mối liên hệ giữa các tỉ số bài toán cho như sau

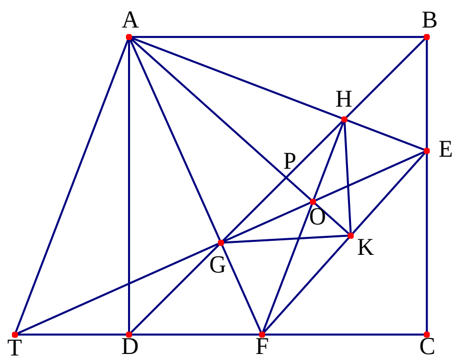
$$\frac{EB}{BC} = k \Leftrightarrow \frac{BE}{CD} = k \Leftrightarrow 1 - \frac{BE}{CD} = 1 - k \Leftrightarrow \frac{CD - BE}{CD} = 1 - k \Leftrightarrow \frac{CE}{CD} = 1 - k$$

Và lại có $\frac{EB}{BC} = k \Leftrightarrow 1 + \frac{BE}{CD} = 1 + k$ nên ta được $\frac{CD + BE}{CD} = 1 + k \Leftrightarrow \frac{CT}{CD} = 1 + k$

Từ đó suy ra $\frac{CE}{CT} = \frac{1-k}{1+k}$ nên $\frac{DF}{DC} = \frac{CE}{CT}$ hay $\frac{DF}{DA} = \frac{CE}{CT}$, với kết quả này thì $AFD = TEC$

Đến đây ta nhận thấy tam giác AEF có ba đường cao AK, EG, FH đồng quy tại điểm O, khi đó ta thu được các kết quả như $\Delta AFT = \Delta AFE$ nên $FT = EF$ và $\Delta AFD = \Delta AFK$ nên suy ra $DF = KF$. Từ đó ta được $BE = DT = EK$ và $DG = GK$. Mặt khác ta lại có $\Delta HEK = \Delta HEB$ nên $HK = HB$. Như vậy để chứng minh $\frac{PG}{PH} = \frac{DG}{BH}$ ta cần chỉ ra được $\frac{PG}{PH} = \frac{KG}{KH}$. Tuy nhiên điều này hoàn toàn có thể được do KP là đường phân giác của tam giác GKH.

Lời giải



Trên tia CD lấy điểm T sao cho $DT = BE$. Khi đó ta có $\Delta ADM = \Delta ABE$ nên ta được $TAE = 90^0$

Từ đó ta suy ra tam giác TAE vuông cân nên $AE = AT$.

Từ giả thiết ta có

$$\frac{EB}{BC} = k \Leftrightarrow \frac{BE}{CD} = k \Leftrightarrow 1 - \frac{BE}{CD} = 1 - k$$

$$\Leftrightarrow \frac{CD - BE}{CD} = 1 - k \Leftrightarrow \frac{CE}{CD} = 1 - k$$

Lại có $\frac{EB}{BC} = k \Leftrightarrow 1 + \frac{BE}{CD} = 1 + k$

Nên ta được $\frac{CD+BE}{CD} = 1+k \Leftrightarrow \frac{CT}{CD} = 1+k$

Từ đó ta suy ra $\frac{CE}{CT} = \frac{1-k}{1+k}$. Do đó ta được $\frac{DF}{DC} = \frac{CE}{CT}$ hay $\frac{DF}{DA} = \frac{CE}{CT}$

Từ đó ta được hai tam giác DAF và CTE đồng dạng với nhau, nên suy ra $AFD = TEC$.

Giả sử ET cắt AF tại G′, khi đó ta có $G'EC + G'FC = 180^0$ nên tứ giác G′ECF nội tiếp đường tròn. Từ đó suy ra $EG'F = 90^0$. Tam giác TAE vuông có G′ là trung điểm của ME nên $G'C = AG' = \frac{1}{2}TE$. Điều này chứng tỏ hai điểm G và G′ trùng nhau. Để ý là tứ giác ABEG nội tiếp đường tròn nên ta được $AEG = ABD = EAF = 45^0 = BDC$. Suy ra tứ giác AHFD nội tiếp đường tròn, nên ta được $AHF = 90^0$ hay $FH \perp AE$. Từ đó ta được các đường cao AK, EG, FH đồng quy tại O.

Các tứ giác OGFK, OHEK, FGHE nội tiếp, suy ra $GKP = GFH = GEH = PKH$

Do đó KP là đường phân giác của tam giác GKH, nên ta được $\frac{PG}{PH} = \frac{KG}{KH}$

Lại có $\Delta AFT = \Delta AFE$ nên $FT = EF$ và $AFT = AFE$, $ATF = AEF = AEB$

Do đó ta được $AFD = AFK$ nên ta được $\Delta AFD = \Delta AFK$, suy ra $DF = KF$

Từ đó ta được $BE = DT = EK$ và $DG = GK$. Mặt khác ta lại có $\Delta HEK = \Delta HEB$ nên $HK = HB$

Từ các điều trên ta được $\frac{PG}{PH} = \frac{DG}{BH}$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

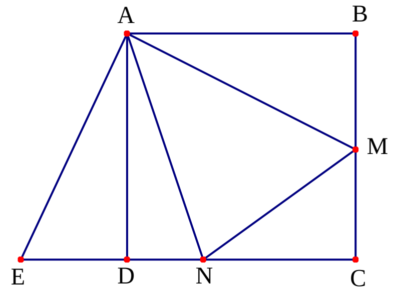
Ví dụ 14. Cho hình vuông ABCD có cạnh a. Trên các cạnh BC, CD lấy lần lượt các điểm M và N thay đổi sao cho $MAN = 45^0$. Chứng minh rằng chu vi tam giác CMN không phụ thuộc vào vị trí điểm M, N. Từ đó xác định vị trí của M và N để diện tích tam giác CMN lớn nhất.

Phân tích tìm lời giải

+ Để chứng minh chu vi tam giác CMN không phụ thuộc vị trí điểm M ta đi chứng minh chu vi của tam giác CMN bằng $C_{CMN} = CM + MN + CN = BC + CD = 2a$.

+ Đặt CM = x, CN = y, ta có $S_{CMN} = \frac{1}{2}x.y$. Chú ý là theo định lí Pitago ta có $MN^2 = x^2 + y^2$ nên ta được $MN = \sqrt{x^2 + y^2}$ do đó $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2a$. Bài toán quy về tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S_{CMN} = \dfrac{1}{2}x.y$ với điều kiện $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2a$. Dự đoán dấu bằng xẩy ra tại x = y và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có thể giả được bài toán.

Lời giải



Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với AM, đường thẳng này cắt đường thẳng CD tại E.

Khi đó ta có $EAD = MAB$.

Xét hai tam giác vuông ADE và ABM có

$EAD = MAB$ và $AD = AB$

Do đó $\Delta ADE = \Delta ABM$, suy ra $DE = BM$, $AM = AE$

và $DAE = MAB$. Từ đó ta được $EAN = 45^0$.

Xét hai tam giác AMN và AEN có $AM = AE$, $MAN = EAN = 45^0$ và AN là cạnh chung

Suy ra $\Delta AMN = \Delta AEN$ nên ta được $MN = NE$

Gọi C_{CMN} là chu vi tam giác CMN, khi đó ta có

$$C_{CMN} = CM + MN + CN = CM + EN + CN = CM + CN + BM + CN = BC + CD = 2a$$

Do đó chu vi tam giác CMN không đổi.

Đặt $CM = x$, $CN = y$, theo định lí Pitago ta có $MN^2 = x^2 + y^2$ nên ta được $MN = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ta có $S_{CMN} = \dfrac{1}{2}x.y$ với $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2a$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $x + y \ge 2\sqrt{xy}$ và $\sqrt{x^2 + y^2} \ge \sqrt{2xy}$

Do đó ta được $2a = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \ge \sqrt{xy}\left(2 + \sqrt{2}\right) \Rightarrow \sqrt{xy} \le a\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$

Do đó ta được $xy \le 2a^2\left(\sqrt{2} - 1\right)^2$ nên $S_{CMN} \le a^2\left(\sqrt{2} - 1\right)^2$

Dấu bằng xẩy ra khi $x = y = a\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$ hay $BM = CN = a\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$

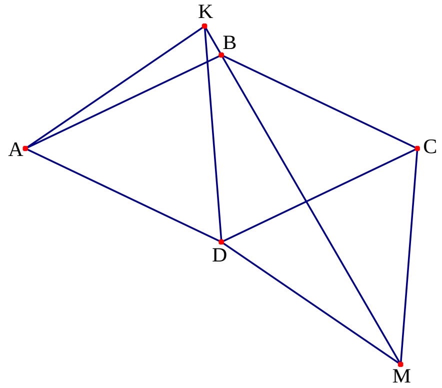
Ví dụ 15. Cho hình thoi ABCD. Dựng các tam giác đều AKD và CDM sao cho K, B thuộc nửa mặt phẳng bờ AD và M thuộc nửa nửa mặt phẳng bờ CD không chứa điểm B. Chứng minh rằng ba điểm B, K, M cùng nằm trên một đường thẳng.

Lời giải

Đặt $BAD = \alpha$. Khi đó ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Nếu $\alpha < 60^0$. Khi đó từ tam giác ADK ta tính được $KAB = 60^0 - \alpha$. Tam giác ABK cân tại A nên suy ra

$$AKB = \frac{180^0 - \left(60^0 - \alpha\right)}{2} = 60^0 + \frac{\alpha}{2}.$$



Mặt khác dễ thấy các điểm A, K, C, M cùng nằm trên đường tròn tâm D bán kính AD. Do đó ta có

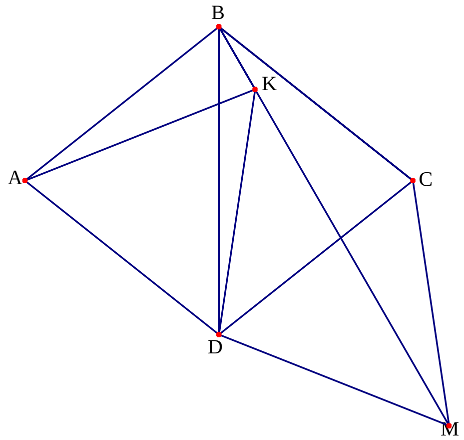
$$ADM = 360^0 - ADC - CDM$$
$$= 360^0 - \left(180^0 - \alpha\right) - 60^0 = 120^0 + \alpha$$

Từ đó suy ra được $ADM = 2AKB$, từ đây ta được ba điểm K, M, B thẳng hàng.

+ Trường hợp 2: Nếu $\alpha > 60^0$. Khi đó dễ thấy tam giác ABK cân tại A

Do đó ta được

$$ABK = AKB = \frac{180^0 - \left(\alpha - 60^0\right)}{2} = 120^0 - \frac{\alpha}{2}$$



Ta cần chứng minh được

$$BAK + AKD + DKM = 180^0$$

Hay ta cần chứng minh

$$120^0 - \frac{\alpha}{2} + 60^0 + DKM = 180^0 \Leftrightarrow DKM = \frac{\alpha}{2}.$$

Thật vậy, ta có $KDC = 180^0 - \alpha - 60^0 = 120^0 - \alpha$

Nên suy ra $KDM = 120^0 - \alpha + 60^0 = 180^0 - \alpha$

Tam giác KDM cân tại D nên $DKM = \dfrac{180^0 - \left(180^0 - \alpha\right)}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$

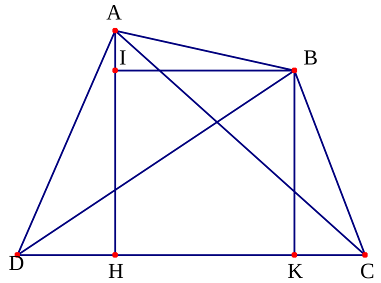
Từ đó ta được $BKM = 180^0$ hay ba điểm B, K, M thẳng hàng.

Vậy ta luôn có ba điểm B, K, M cùng thuộc một đường thẳng.

Ví dụ 16. Chứng minh rằng với mọi tứ giác ABCD ta luôn có

$$AC^2 + BD^2 \le AD^2 + BC^2 + 2AB.CD$$

Lời giải



Vẽ AH và BK vuông góc với CD với H, K thuộc CD. Không mất tính tổng quát ta giả sử $AH \ge BK$. Khi đó vẽ BI vuông góc AH tại I. Khi đó HIBK là hình chữ nhật. Áp dụng định lí Pitago ta được

$AD^2 = HD^2 + HA^2$ và $AC^2 = AH^2 + HC^2$.

Từ đó ta được

$$AC^2 - AD^2 = \left(AH^2 + HC^2\right) - \left(HD^2 + HA^2\right) = HC^2 - HD^2$$
$$= \left(HC + HD\right)\left(HC - HD\right) = CD\left(HC - HD\right)$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $BD^2 - BC^2 = CD\left(KD - KC\right)$

Do đó ta được $AC^2 - AD^2 + BD^2 - BC^2 = CD\left(HC - HD\right) + CD\left(KD - KC\right)$

Suy ra

$$AC^2 + BD^2 - \left(AD^2 + BC^2\right) = CD\left[\left(HC - HD\right) + \left(KD - KC\right)\right] = CD\left(HK + HK\right) = 2CD.HK$$

Hay ta được $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2CD.HK$

Mà ta có $HK \le AB$. Do đó ta được $AC^2 + BD^2 \le AD^2 + BC^2 + 2AB.CD$.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi tứ giác ABCD là hình thang.

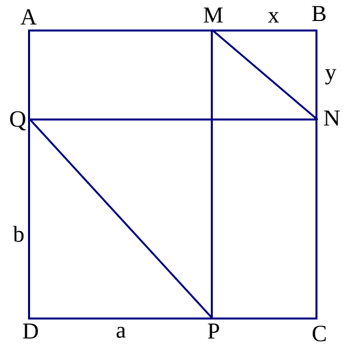
Ví dụ 17. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1. Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt trên các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho chu vi tam giác BMN là 1 và MP//AD, NQ//AB. Tính khoảng giá trị mà chu vi của tam giác DPQ có thể nhận được.

Phân tích tìm lời giải

Bài toán quy về tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác DPQ. Theo bài ra ta có $BM + BN + MN = 1$ và chu vi của tam giác PDQ là $DP + DQ + PQ$.

Đặt $BM = x$; $BN = y$; $DP = a = 1 - x$; $DQ = b = 1 - y$ và gọi p là chu vi tam giác DPQ. Khi đó ta có $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ và $p = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$. Để tìm được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của p ta cần tìm điều kiện của a và b. Ta sẽ tìm điều kiện của a, b từ $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 1$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\sqrt{x^2 + y^2} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + y\right)$ nên ta được $x + y \le \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = 2 - \sqrt{2}$ từ đó suy ra $a + b \ge \sqrt{2}$. Lại có $\sqrt{x^2 + y^2} \le x + y$ nên $1 \le 2\left(x + y\right) \Rightarrow x + y \ge \frac{1}{2}$ suy ra $a + b \le \frac{3}{2}$. Kết hợp hai kết quả ta được $\sqrt{2} \le a + b \le \frac{3}{2}$. Ta cần tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $p = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$ với điều kiện của biến là $\sqrt{2} \le a + b \le \frac{3}{2}$.

Lời giải



Đặt $BM = x;\ BN = y;\ DP = a = 1 - x;\ DQ = b = 1 - y$. Gọi p là chu vi tam giác DPQ. Vì chu vi của tam giác BMN bằng 1 nên ta có $BM + BN + MN = 1$.

Theo định lí Pitago ta suy ra được $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$\sqrt{x^2 + y^2} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$

Do đó ta được $1 \ge \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(x + y)$

Hay ta được $x + y \le \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)}{1} = 2 - \sqrt{2}$. Ta lại có $a + b = 1 - x = 1 - y = 2 - (x + y)$

nên suy ra $a + b \ge \sqrt{2}$. Ta có chu vi tam giác DPQ là $p = DP + DQ + PQ = a + b + PQ$

Theo định lí Pitago ta được $p = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} \ge (a + b)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \ge \sqrt{2} + 1$.

Từ đó suy ra $p \ge \sqrt{2} + 1$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{2\ \sqrt{2}}{2}$.

Ta lại có $x^2 + y^2 \le (x + y)^2$ nên ta được $\sqrt{x^2 + y^2} \le x + y$.

Từ đó suy ra $1 \le 2\,(x + y) \Rightarrow x + y \ge \frac{1}{2}$. Từ đó dẫn đến $a + b \le \frac{3}{2}$.

Từ $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ ta có $(1 - x - y)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow -x - y + xy = -\frac{1}{2}$

Do đó ta được $(1 - x)(1 - y) = \frac{1}{2}$ hay ta được $ab = \frac{1}{2}$.

Từ $a + b \le \frac{3}{2}$ ta được $4(a + b)^2 \le 9 \Rightarrow 4(a + b)^2 - 4 \le 5$.

Kết hợp với $ab = \frac{1}{2}$ ta được $4(a + b)^2 - 8ab \le 5 \Rightarrow 4\left(a^2 + b^2\right) \le 5 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \le \frac{\sqrt{5}}{2}$

Từ các kết quả trên ta thu được $p = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} \le \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3\ \sqrt{5}}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(x; y) = \left(0; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; 0\right)$. Vậy ta được $\sqrt{2} + 1 \le p \le \frac{3\ \sqrt{5}}{2}$.

Bài 18. Cho hình bình hành ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường chéo của hình bình hành cắt các cạnh AD, AB, BC, CD lần lượt tại M, N, K, L. Tính tỉ số diện tích của MNKL và hình bình hành ABCD biết $AC = a;\ BD = b$

Phân tích tìm lời giải

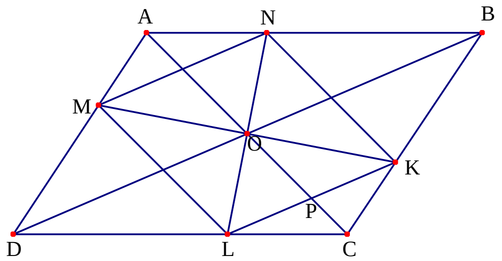
Dễ thấy $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$ và $S_{MNKL} = 2S_{NKL} = 2.\frac{1}{2}NK.KL.\sin\alpha$.

Nên để tính được tỉ số diện tích hình bình hành ABCD và tứ giác MNPQ ta cần tính được NK và KL theo a, b.

Lời giải

Giả sử $BOC = \alpha$ khi đó ta được

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha = \frac{1}{2}ab\sin\alpha.$$



Dễ dàng chứng minh được tứ giác MNKL là hình thoi và theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta có

$$\frac{AN}{BN} = \frac{AO}{BO} = \frac{CO}{BO} = \frac{CK}{BK} \text{ và}$$

$$\frac{AM}{DM} = \frac{AO}{DO} = \frac{OC}{OD} = \frac{CL}{DL}$$

Áp dụng định lí Talets đảo ta suy ra được KN//AC và MN//BC, từ đó suy ra $NKL = \alpha$.

Đặt MN = x khi đó ta được $S_{MNKL} = 2S_{NKL} = 2.\frac{1}{2}NK.KL.\sin\alpha$. Từ đó ta được $\frac{S_{MNKL}}{S_{ABCD}} = \frac{2x^2}{ab}$

Gọi P là giao điểm của KL và CA, khi đó $LOD = PLO$ và $POL = LOD$ nên $POL = PLO$. Điều này dẫn đến tam giác OPL cân tại P. Chứng minh tương tự ta được tam giác OPK cân tại P.

Từ đó suy ra $KP = PL = PO$ hay $OP = \frac{1}{2}KL = \frac{x}{2}$.

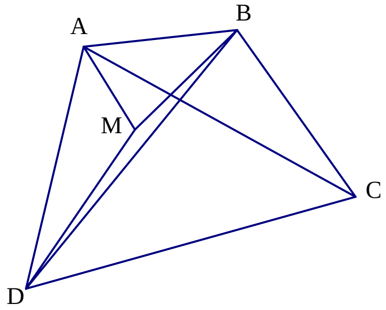
Mặt khác do KL//BD nên ta có $\frac{KP}{BO} = \frac{PL}{OD} = \frac{CP}{CO}$ suy ra $\frac{CP}{CO} = \frac{KP + PL}{BO + OD}$

Hay ta được $\frac{CP}{CO} = \frac{KL}{BD} \Rightarrow \frac{\frac{a}{2} - \frac{x}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = \frac{ab}{a+b}$. Từ đó suy ra $\frac{S_{MNKL}}{S_{ABCD}} = \frac{2ab}{(a+b)^2}$

Ví dụ 19. Cho thất giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ và một điểm M bất kì. Chứng minh rằng:

$$MA_1 + MA_3 + MA_5 + MA_7 \ge MA_2 + MA_4 + MA_6$$

Lời giải



Trước hết ta phát biểu và chứng minh định lí Ptoleme dưới dạng bổ đề: Cho tứ giác ABC và một điểm D nằm khác phía với B so với AC, khi đó ta luôn có $AB.CD + AD.BC \geq AC.BD$

Thật vậy, xác định điểm M trong tứ giác sao cho

$MDA = ACB$ và $MAD = BAC$.

Khi đó $\Delta ADM \backsim \Delta ACB$ suy ra $AD.BC = AC.MD$

Từ kết quả trên có $\Delta ABM \backsim \Delta ADC$ suy ra

$AB.CD = AC.BM$

Do đó ta có

$AB.CD + AD.BC = (BM + MD)AC \geq AC.BD$

Trở lại bài toán: Đặt $A_1A_2 = a$; $A_1A_3 = b$; $A_1A_4 = c$.

Áp dụng bổ đề trên cho tam giác $A_1A_2A_3$ và điểm M ta được $(A_1M + A_3M).a \geq MA_2.b$

Áp dụng bổ đề trên cho tam giác $A_5A_6A_7$ và điểm M ta được $(A_5M + A_7M).a \geq MA_6.b$

Từ đó ta được $(A_1M + A_3M + A_5M + A_7M).a \geq (MA_2 + A_6M).b$

Áp dụng bổ đề trên cho tam giác $A_2A_4A_6$ và điểm M ta được $(A_2M + A_6M).b \geq MA_4.c$

Từ đó ta lại có $(A_1M + A_3M + A_5M + A_7M).a \geq A_4M.c$

Từ đó ta suy ra $(A_1M + A_3M + A_5M + A_7M).a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq A_2M + A_4M + A_6M$

Áp dụng bổ đề trên cho tứ giác $A_1A_3A_4A_5$ nội tiếp ta được $ab + ac = bc \Rightarrow a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1$

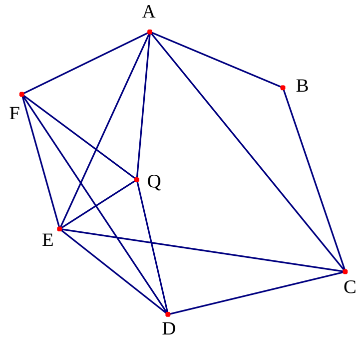
Do đó ta được $MA_1 + MA_3 + MA_5 + MA_7 \geq MA_2 + MA_4 + MA_6$

Dấu đẳng thức xảy ra khi tất cả các bất đẳng thức trên đồng thời xảy ra, tức là M nằm trên cung nhỏ A_1A_7 của đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$.

Ví dụ 20. Cho đa giác ABCDEF có $CAB = CED = 30^0$, $ACB = ECD = 20^0$, $FEA = FAE = 40^0$. Chứng minh rằng tam giác BDF là tam giác đều.

Lời giải

Vẽ tam giác đều AFQ sao cho FQ cắt đường thẳng AE.



Ta có $EAQ = FAQ - FAE = 60^0 - 40^0$

Và lại có $QFE = AFE - AFQ = 100^0 - 60^0 = 40^0$.

Tam giác EFQ có $EF = FA = AQ$ nên ta được

$$EQF = QEF \quad \frac{180^0 - QFE}{2} \quad \frac{180^0 - 40^0}{2} \quad 70 \ (1)$$

Do đó ta được $QEA = QEF - FEA = 70^0 - 40^0 = 30^0$

Xét ba tam giác ABC, EDC và EQA có

$$BAC = DEC = QEA = 30^0 \text{ và } BCA = DCE = QAE = 20^0$$

Nên ta được $\Delta ABC \backsim \Delta EDC \backsim \Delta EQA$, suy ra $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{ED}{CE} = \dfrac{EQ}{EA}$ (2)

Xét hai tam giác ACE và QED có $ACE = QEC + 30^0 = QED$ và $\dfrac{AE}{CE} = \dfrac{EQ}{ED}$

Do đó ta được $\Delta ACE \backsim \Delta QED$ nên ta được $\dfrac{QD}{AC} = \dfrac{ED}{EC}$ (3)

Từ (2) và (3) ra được $QD = AB$. Ta có $FAB = EAC + 70^0 = EQD + 70^0 = FQD$

Ta có $\Delta AFB = \Delta QFD$ vì có $AB = QD$, $AF = QF$ và $FAB = FQD$

Từ đó ta được $FB = FD$ và $QFD = AFB$. Mà ta lại có $DFB = QFD + QFB = AFB + QFB = 60^0$

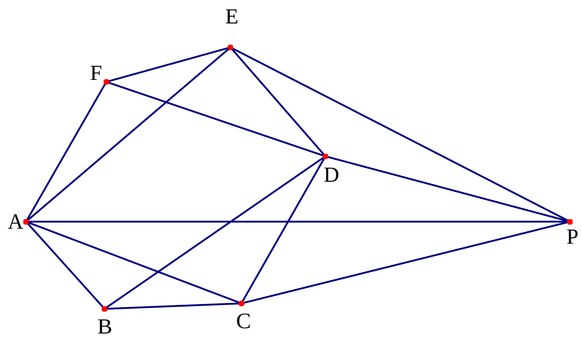
Do đó tam giác BDF là tam giác đều.

Ví dụ 21. Cho đa giác ABCDEF thỏa mãn các điều kiện $B + D + F = 360^0$ và $\dfrac{AB}{BC}.\dfrac{AE}{EF}.\dfrac{FD}{AF} = 1$. Chứng minh rằng: $\dfrac{BC}{CA}.\dfrac{AE}{EF}.\dfrac{FD}{DB} = 1$.

Lời giải

Lấy điểm P nằm ngoài đa giác sao cho

$$FEA = DEP \text{ và } AFE = EDP$$



Khi đó ta được $\Delta FEA \backsim \Delta DEP$, suy ra ta được

$$\frac{FA}{EF} = \frac{DP}{DE}; \frac{EF}{ED} = \frac{EA}{EP}$$

Từ giả thiết $\dfrac{AB}{BC}.\dfrac{AE}{EF}.\dfrac{FD}{AF} = 1$ ta được

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{CD}.\frac{AF}{FE} = \frac{DE}{DC}.\frac{DP}{DE} = \frac{DP}{DC}$$

Từ giả thiết $B + D + F = 360^0$ ta được $ABC = CDP$

Lại có $\frac{AB}{BC} = \frac{DP}{DC}$ nên ta được $\Delta ABC \backsim \Delta PDC$ suy ra $\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CP}$

Từ $FEA = DEP$ ta được $FED = AEP$, lại có $\frac{EF}{ED} = \frac{EA}{EP}$ nên ta được $\Delta FED \backsim \Delta AEP$

Do đó ta được $\frac{FD}{FE} = \frac{AP}{AE}$. Mặt khác ta có $\Delta ABC \backsim \Delta PDC$ nên $BCA = DCP \Rightarrow BCD = PCA$

Do đó ta được $\Delta BCD \backsim \Delta ACP$, suy ra $\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AP}$

Từ đó suy ra $\frac{FD}{FE} . \frac{BC}{BD} = \frac{AP}{AE} . \frac{AC}{AP} = \frac{AC}{AE}$ hay $\frac{BC}{CA} . \frac{AE}{EF} . \frac{FD}{DB} = 1$.

Ví dụ 22. Cho đa giác $A_1A_2A_3A_4A_3A_6A_7A_8$ có các cạnh là các số hữu tỉ và các góc của đa giác bằng nhau. Chứng minh rằng các cặp cạnh đối diện song song và bằng nhau.

Phân tích tìm lời giải

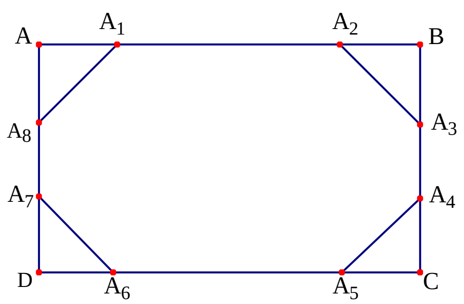
Nhận thấy các tam giác AA_1A_8, BA_2A_3, CA_4A_5, DA_6A_7 là các tam giác vuông cân nên ta tính được $AA_1 = \frac{A_1A_8}{\sqrt{2}}$; $BA_2 = \frac{A_2A_3}{\sqrt{2}}$; $CA_5 = \frac{A_4A_5}{\sqrt{2}}$; $DA_6 = \frac{A_6A_7}{\sqrt{2}}$. Do đó tứ giác ABCD là hình chữ nhật nên các cạnh đối diện của đa giác $A_1A_2A_3A_4A_3A_6A_7A_8$. Ta cần chứng minh được $A_1A_2 = A_5A_6$ và áp dụng tương tự. Ta tính được

$$AB = \frac{A_1A_8}{\sqrt{2}} + A_1A_2 + \frac{A_2A_3}{\sqrt{2}} \text{ và } CD = \frac{A_4A_5}{\sqrt{2}} + A_5A_6 + \frac{A_6A_7}{\sqrt{2}}$$ nên suy ra

$$A_1A_2 - A_5A_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_1A_8 + A_2A_3 - A_4A_5 - A_6A_7\right).$$ Chú ý là các cạnh của đa giác là các số hữu tỉ nên $A_1A_2 - A_5A_6 = 0$ hay $A_1A_2 = A_5A_6$. Đến đây ta trình bày lời giải như sau.

Lời giải

Do đa giác có các góc ở các đỉnh bằng nhau nên mỗi góc có số đo là $\frac{(n-2).180^0}{n} = \frac{6.180^0}{8}$ 135.



Kéo dài các cạnh của đa giác, chúng cắt nhau tại các điểm A, B, C, D như hình vẽ.

Khi đó ta có $AA_1A_8 = 45^0$, hoàn toán tương tự ta được các góc ngoài của đa giác đều có số đo là 45^0.

Nên các tam giác AA_1A_8, BA_2A_3, CA_4A_5, DA_6A_7 là các tam giác vuông cân. Từ đó ta được tứ giác ABCD là hình chữ nhật. Suy ra các cạnh đối diện của đa giác $A_1A_2A_3A_4A_3A_6A_7A_8$ song song với nhau.

Xét tam giác AA_1A_8 ta có $AA_1 = \frac{A_1A_8}{\sqrt{2}}$. Tương tự ta có

$BA_2 = \frac{A_2A_3}{\sqrt{2}}; CA_5 = \frac{A_4A_5}{\sqrt{2}}; DA_6 = \frac{A_6A_7}{\sqrt{2}}$

Khi đó ta được $AB = AA_1 + A_1A_2 + A_2B = \frac{A_1A_8}{\sqrt{2}} + A_1A_2 + \frac{A_2A_3}{\sqrt{2}}$

Tương tự ta cũng có $CD = \frac{A_4A_5}{\sqrt{2}} + A_5A_6 + \frac{A_6A_7}{\sqrt{2}}$

Do $AB = CD$ nên ta được $\frac{A_1A_8}{\sqrt{2}} + A_1A_2 + \frac{A_2A_3}{\sqrt{2}} = \frac{A_4A_5}{\sqrt{2}} + A_5A_6 + \frac{A_6A_7}{\sqrt{2}}$

Suy ra $A_1A_2 - A_5A_6 = \frac{A_1A_8}{\sqrt{2}} + \frac{A_2A_3}{\sqrt{2}} - \frac{A_4A_5}{\sqrt{2}} - \frac{A_6A_7}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_1A_8 + A_2A_3 - A_4A_5 - A_6A_7\right)$

Do các cạnh của đa giác $A_1A_2A_3A_4A_3A_6A_7A_8$ là các số hữu tỉ nên $A_1A_2 - A_5A_6$ là số hữu tỉ

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_1A_8 + A_2A_3 - A_4A_5 - A_6A_7\right)$ là số hữu tỉ.

Do đó $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_1A_8 + A_2A_3 - A_4A_5 - A_6A_7\right) = 0$, nên ta được $A_1A_2 - A_5A_6 = 0$ hay

$A_1A_2 = A_5A_6$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $A_2A_3 = A_6A_7$; $A_3A_4 = A_7A_8$; $A_4A_5 = A_8A_1$

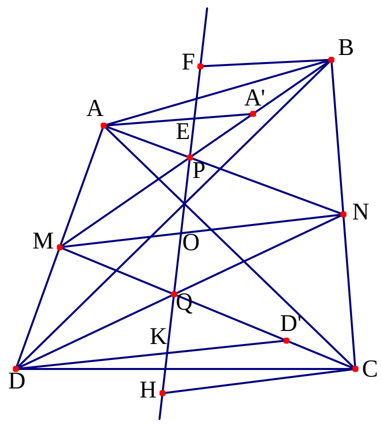
Vậy bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 23. Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Gọi P là giao điểm của AN và BM, Q là giao điểm của DN và CM. Chứng minh rằng $\frac{PA}{PN} + \frac{PB}{PM} + \frac{QC}{QM} + \frac{QD}{QN} \ge 4$.

Lời giải

Cách 1: Ta có nhận xét như sau: Nếu hai tam giác có cạnh đáy hoặc chiều cao bằng nhau thì tỉ số diện tích bằng tỉ số chiều cao hoặc cạnh đáy tương ứng.

Từ nhận xét đó và do M, N là trung điểm của AD và BC nên ta được $S_{BAD}+S_{CAD}=2S_{NAD}$ và $S_{ABC}+S_{DBC}=2S_{MBC}$



Từ đó ta được

$$\frac{PA}{PN}+\frac{PB}{PM}+\frac{QC}{QM}+\frac{QD}{QN}=\frac{2S_{ABM}}{2S_{NBM}}+\frac{2S_{ABN}}{2S_{MAN}}+\frac{2S_{CDN}}{2S_{MDN}}+\frac{2S_{CDM}}{2S_{CNM}}$$

$$=\frac{S_{ABD}}{S_{MBC}}+\frac{S_{ABC}}{S_{NAD}}+\frac{S_{DBC}}{S_{NAD}}+\frac{S_{CAD}}{S_{MBC}}=2\left(\frac{S_{NAD}}{S_{MBC}}+\frac{S_{MBC}}{S_{NAD}}\right)\geq 4$$

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $S_{NAD}=S_{MBC}\Leftrightarrow\begin{cases}2S_{MAN}=2S_{MBN}\\2S_{NDM}=2S_{MCN}\end{cases}$ hay AB//MN//CD.

Cách 2: Gọi giao điểm của MN và PQ là O. Các đường thẳng qua A, B, C, D song song với MN cắt PQ lần lượt tại E, F, H, K. Theo định lí Talets ta có

$$\frac{PA}{PN}+\frac{PB}{PM}+\frac{QC}{QM}+\frac{QD}{QN}=\frac{AE}{ON}+\frac{BF}{OM}+\frac{CH}{OM}+\frac{DK}{ON}=\frac{AE+DK}{ON}+\frac{BF+CH}{OM}$$

$$=\frac{2OM}{ON}+\frac{2ON}{OM}=2\left(\frac{OM}{ON}+\frac{ON}{OM}\right)\geq 4$$

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi

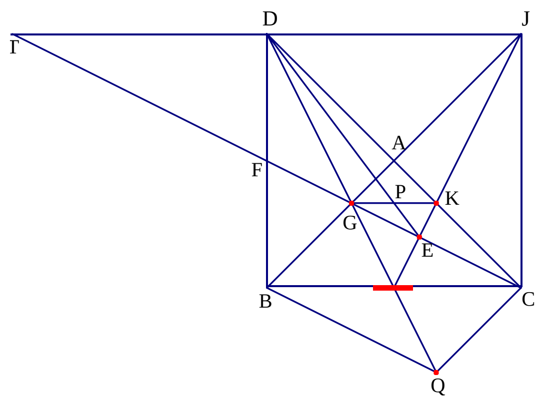
$$AB//MN//CD\ OM=ON\Leftrightarrow\begin{cases}AE=AE'\\DK=KD'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}BF=AE'\\CH=KD'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B\equiv A'\\C\equiv D'\end{cases}\text{ hay } AB//MN//CD$$

Ví dụ 24. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC, gọi G là điểm trên cạnh AB sao cho $GB=2GA$. Các đường thẳng GM và CA cắt nhau tại D. Đường thẳng qua M vuông góc với CG tại E và cắt AC tại K. Gọi P là giao điểm của DE và GK. Chứng minh rằng $DE=BC$ và $PG=PE$.

Lời giải

Lấy điểm Q đối xứng với G qua M. Khi đó tứ giác BQCG là hình bình hành. Suy ra CQ//AB.

Mà ta có $AG=\frac{1}{2}BG=\frac{1}{2}QC$ nên AG là đường trung bình của tam giác DQC. Do đó A là trung điểm của DC và G là trọng tâm của tam giác BCD.



Gọi J là điểm đối xứng với B qua A. Khi đó tứ giác BCJD là hình vuông. Đường thẳng CG cắt BD tại F và cắt đường thẳng JD tại T. Dễ thấy F là trung điểm của BD, từ đó suy ra $BC = DT = DJ$.

Mặt khác hai tam giác vuông JMC và CFB bằng nhau nên ta được $MJ \perp FC$. Do đó ba điểm M, E, J thẳng hàng. Do đó tam giác TEJ vuông tại E và D là trung điểm của TJ, nên ta được TD = DJ = DE.

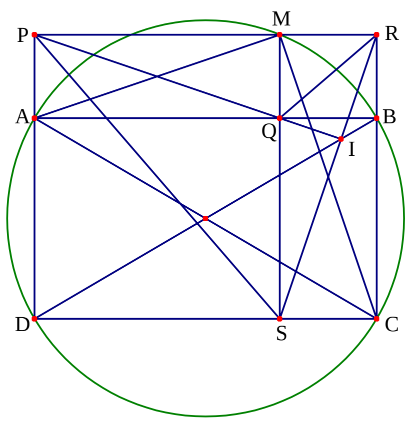
Suy ra $DE = BC$. Hơn nữa do K là trọng tâm tam giác BCJ nên ta được $AK = \frac{1}{2}KC$.

Do đó ta được GK//BC//TJ. Nên theo định lí Talets ta được $\frac{GP}{TD} = \frac{EP}{ED} = \frac{PK}{DJ}$

Do đó ta được $PG = PK$, suy ra PG = PK = PE. Vậy ta được $DE = BC$ và $PG = PE$.

Ví dụ 25. Trên cung AB của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD, lấy điểm M khác A và B. Gọi P, Q, R và S là hình chiếu của điểm M trên các đường thẳng AD, AB, BC và CD. Chứng minh rằng đường thẳng PQ và RS vuông góc với nhau và giao điểm của chúng nằm trên một trong hai đường chéo hình chữ nhật.

Lời giải



Trước hết ta phát biểu không chứng minh bổ đề sau: Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$$

Từ giả thiết dễ thấy các tứ giác APMQ, MRBQ, MRCS, PMSD là các hình chữ nhật và P, M, R cũng như M, Q, S là các cặp điểm thẳng hàng.

Đặt

$AQ = PM = a; MQ = RB = x; BC = QS = b; MR = QB = y$

Ta có $MAB = MCB$ do đó $\Delta AQM \backsim \Delta CRM$

Suy ra $\frac{AQ}{CR} = \frac{QM}{RM} \Rightarrow \frac{a}{b+x} = \frac{x}{y} \Rightarrow ay = x^2 + bx$

Sử dụng định lý Pytago ta có

$$PS^2 + QR^2 = \left(MS^2 + PM^2\right) + \left(RB^2 + QB^2\right) = \left(b+x\right)^2 + a^2 + x^2 + y^2$$
$$= b^2 + 2bx + x^2 + a^2 + x^2 + y^2 = a^2 + b^2 + y^2 + 2\left(x^2 + bx\right)$$

$$PR^2+QS^2=(a+y)^2+b^2=a^2+2ay+y^2+b^2=a^2+b^2+y^2+2ay$$

Từ đó ta được $PS^2+QR^2=PR^2+QS^2$. Như vậy theo bổ đề trên ta được $PQ\perp RS$.

Gọi giao điểm của PQ và RS là I. Do PQ vuông góc với RS nên năm điểm M, R, B, I, Q thuộc đường tròn đường kính QR. Suy ra $BIR=BQR$. Tương tự năm điểm P, M, I, S, D thuộc đường tròn đường kính PS nên $DIS=PSM$. Do $MS\perp PR$ tại M nên Q là trực tâm của ΔPSR. Do đó ta được $QR\perp PS$, từ đó suy ra $PSM=BQR$ Nên ta được $BIR=DIS$. Do đó D, I, B thẳng hàng hay I thuộc đường chéo BD.

Ví dụ 26. Cho hình thang ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi M và M lần lượt là trung điểm của BD và AC. Điểm K đối xứng với O qua MN. Đường thẳng qua K và song song với MN cắt AD, BC, BD, CA lần lượt tại P, Q, E, F. Chứng minh rằng PE = QF.

Phân tích tìm lời giải

Qua O kẻ đường thẳng song song với MN cắt AD, BC lần lượt tại I và H. Ta có K và O đối xứng với nhau qua MN nên ta có $MO=ME$ và $ON=NF$. Lại có $MB=MD$ và $NA=NC$ do đó $OB=DE$ và $OA=FC$. Từ đó ta được $\frac{PE}{OI}=\frac{DE}{DO}=\frac{OB}{OD}\Rightarrow PE=\frac{OB.OI}{OD}$ và tương tự thì $QF=\frac{OA.OH}{OC}$. Như vậy để chứng minh được PE = QF ta cần phải chỉ ra được $\frac{OB}{OD.OH}=\frac{OA}{OC.OI}$. Chú ý theo định lí Talets ta thu được $\frac{MG}{OI}=\frac{DM}{DO}=\frac{BD}{2OD};\ \frac{OG}{OI}=\frac{AN}{AO}=\frac{AC}{2AO}$ nên $\frac{MN}{OI}=\frac{1}{2}\left(\frac{AC}{AO}-\frac{BD}{BO}\right)$. Tương tự ta cũng được $\frac{MN}{OH}=\frac{1}{2}\left(\frac{BD}{BO}-\frac{AC}{OC}\right)$. Do đó ta được

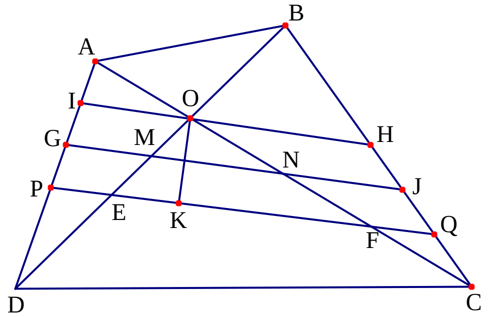
$$\frac{OB}{OD.OH}=\frac{OA}{OC.OI}\Leftrightarrow\frac{OB.MN}{OD.OH}=\frac{OA.MN}{OC.OI}\Leftrightarrow\frac{OB}{OD}\left(\frac{BD}{OB}-\frac{AC}{OC}\right)=\frac{OA}{OC}\left(\frac{AC}{OA}-\frac{BD}{OD}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{BD}{OD}+\frac{OA.BD}{OC.OD}=\frac{AC}{OC}+\frac{OB.AC}{OC.OD}\Leftrightarrow\frac{BD(OA+OC)}{OC.OB}=\frac{AC(OB+OD)}{OC.OD}=\frac{BD.AC}{OC.OD}$$

Đến đây bài toán xem như được chứng minh.

Lời giải

Qua O kẻ đường thẳng song song với MN cắt AD, BC lần lượt tại I và H. Ta có K và O đối xứng với nhau qua MN nên ta có $MO = ME$ và $ON = NF$. Lại có $MB = MD$ và $NA = NC$ do đó ta được $OB = DE$ và $OA = FC$



Suy ra $\dfrac{PE}{OI} = \dfrac{DE}{DO} = \dfrac{OB}{OD} \Rightarrow PE = \dfrac{OB.OI}{OD}$.

Chứng minh tương tự ta được $QF = \dfrac{OA.OH}{OC}$.

Đường thẳng MN cắt AD và BC lần lượt tại G và J.

Theo định lí Talet ta có $\dfrac{MG}{OI} = \dfrac{DM}{DO} = \dfrac{BD}{2OD}; \dfrac{OG}{OI} = \dfrac{AN}{AO} = \dfrac{AC}{2AO}$

Trừ theo vế hai đẳng thức trên ta được $\dfrac{MN}{OI} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{AC}{AO} - \dfrac{BD}{BO}\right)$. Tương tự ta được $\dfrac{MN}{OH} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{BD}{BO} - \dfrac{AC}{OC}\right)$.

Ta có $\dfrac{BD.AC}{OC.OD} = \dfrac{BD(OA+OC)}{OC.OB} = \dfrac{AC(OB+OD)}{OC.OD}$. Do đó ta được

$$\dfrac{BD}{OD} + \dfrac{OA.BD}{OC.OD} = \dfrac{AC}{OC} + \dfrac{OB.AC}{OC.OD} \Leftrightarrow \dfrac{BD}{OD} - \dfrac{OB.AC}{OC.OD} = \dfrac{AC}{OC} - \dfrac{OA.BD}{OC.OD}$$

$$\Leftrightarrow \dfrac{OB}{OD}\left(\dfrac{BD}{OB} - \dfrac{AC}{OC}\right) = \dfrac{OA}{OC}\left(\dfrac{AC}{OA} - \dfrac{BD}{OD}\right) \Leftrightarrow \dfrac{OB.MN}{OD.OH} = \dfrac{OA.MN}{OC.OI} \Leftrightarrow \dfrac{OB}{OD.OH} = \dfrac{OA}{OC.OI}$$

Vậy ta được $PE = QF$.

Ví dụ 28. Cho tứ giác ABCD, trên các cạnh AB, BC, CD, DA lấy lần lượt các điểm M, N, P, Q sao cho $\dfrac{AM}{MB} = m; \dfrac{BN}{NC} = n; \dfrac{CP}{PD} = p; \dfrac{DQ}{QA} = q$ thỏa mãn điều kiện $(1-mp)(1-nq) \le 0$.

Chứng minh rằng:

$$S_{MNPQ} \le Max\{S_{ABC}; S_{BCD}; S_{CDA}; S_{DAB}\}$$

Phân tích tìm lời giải

Nhận thấy $S_{MNPQ} = S_{ABCD} - (S_{AQM} + S_{BMN} + S_{CNP} + S_{DPQ})$. Từ yêu cầu cần phải chứng minh ta đi tìm mối liên hệ tính diện tích các tam giác AQM, BMN, CNP, DPQ với các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB. Dễ dàng tính được

$$\dfrac{S_{BMN}}{S_{BAC}} = \dfrac{\square n}{(m+1)(n+1)}; \dfrac{S_{CNP}}{S_{CBD}} = \dfrac{\square p}{(p+1)(n+1)}; \dfrac{S_{PDQ}}{S_{DCA}} = \dfrac{\square p}{(p+1)(q+1)}; \dfrac{S_{AQM}}{S_{ADB}} = \dfrac{\square m}{(q+1)(m+1)}$$

Đặt $S=Max\{S_{ABC}; S_{BCD}; S_{CDA}; S_{DAB}\}$; $s=Min\{S_{ABC}; S_{BCD}; S_{CDA}; S_{DAB}\}$, do đó ta được $S+s=S_{ABCD}$, từ đó ta cần chứng minh $S_{MNPQ}\le S_{ABCD}-s=S$.

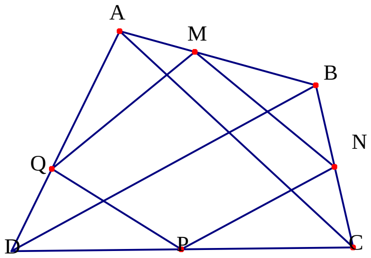
Nhận thấy $S_{AQM}+S_{BMN}+S_{CNP}+S_{DPQ}\ge s\left(\frac{S_{BMN}}{S_{BAC}}+\frac{S_{CNP}}{S_{CBD}}+\frac{S_{PDQ}}{S_{DCA}}+\frac{S_{AQM}}{S_{ADB}}\right)$ nên bài toán sẽ được chứng minh khi ta chỉ ra được $\frac{S_{BMN}}{S_{BAC}}+\frac{S_{CNP}}{S_{CBD}}+\frac{S_{PDQ}}{S_{DCA}}+\frac{S_{AQM}}{S_{ADB}}\ge 1$. Điều này tương đương với

$$\frac{n}{(m+1)(n+1)}+\frac{p}{(p+1)(n+1)}+\frac{p}{(p+1)(q+1)}+\frac{m}{(q+1)(m+1)}\ge 1$$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được $(1-mp)(1-nq)\le 0$ tức là bài toán được chứng minh.

Lời giải

Ta có



$$\frac{S_{BMN}}{S_{BAC}}=\frac{BM}{BA}\cdot\frac{BN}{BC}=\frac{BM}{BM+MA}\cdot\frac{BN}{BN+NC}=\frac{1}{1+m}\cdot\frac{n}{1+n}$$

Do đó ta được $\frac{S_{BMN}}{S_{BAC}}=\frac{n}{(m+1)(n+1)}$.

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{S_{CNP}}{S_{CBD}}=\frac{p}{(p+1)(n+1)};\ \frac{S_{PDQ}}{S_{DCA}}=\frac{p}{(p+1)(q+1)};\ \frac{S_{AQM}}{S_{ADB}}=\frac{m}{(q+1)(m+1)}$$

Do đó ta được

$$\frac{S_{BMN}}{S_{BAC}}+\frac{S_{CNP}}{S_{CBD}}+\frac{S_{PDQ}}{S_{DCA}}+\frac{S_{AQM}}{S_{ADB}}=\frac{n}{(m+1)(n+1)}+\frac{p}{(p+1)(n+1)}+\frac{p}{(p+1)(q+1)}+\frac{m}{(q+1)(m+1)}$$

Ta đi chứng minh $\frac{n}{(m+1)(n+1)}+\frac{p}{(p+1)(n+1)}+\frac{p}{(p+1)(q+1)}+\frac{m}{(q+1)(m+1)}\ge 1$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$n(p+1)(q+1)+p(m+1)(q+1)+q(m+1)(n+1)+m(n+1)(p+1)$$
$$\ge (m+1)(n+1)(p+1)(q+1)\Leftrightarrow (1-mp)(1-nq)\le 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Do đó bất đẳng thức trên đúng.

Đặt $S=Max\{S_{ABC}; S_{BCD}; S_{CDA}; S_{DAB}\}$; $s=Min\{S_{ABC}; S_{BCD}; S_{CDA}; S_{DAB}\}$

Do đó ta được $S+s=S_{ABCD}$, từ đó suy ra

$$S_{MNPQ}=S_{ABCD}-(S_{AQM}+S_{BMN}+S_{CNP}+S_{DPQ})\le S_{ABCD}-s\left(\frac{S_{BMN}}{S_{BAC}}+\frac{S_{CNP}}{S_{CBD}}+\frac{S_{PDQ}}{S_{DCA}}+\frac{S_{AQM}}{S_{ADB}}\right)$$
$$=S_{ABCD}-s\left(\frac{n}{(m+1)(n+1)}+\frac{p}{(p+1)(n+1)}+\frac{p}{(p+1)(q+1)}+\frac{m}{(q+1)(m+1)}\right)$$
$$\le S_{ABCD}-s=S$$

Do đó ta được $S_{MNPQ}\le Max\{S_{ABC}; S_{BCD}; S_{CDA}; S_{DAB}\}$.

Ví dụ 29. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng:

$$\text{Min}\{AB,BC,CD,DA\} \le \frac{\sqrt{AC^2+BD^2}}{2} \le \text{Max}\{AB,BC,CD,DA\}$$

Phân tích tìm lời giải

+ Để chứng minh $\frac{\sqrt{AC^2+BD^2}}{2} \le \text{Max}\{AB, BC, CD, DA\}$ ta cần biểu diễn AC^2+BD^2 theo AB, BC, CD, DA.

Điều này làm ta liên tưởng đến định lí Pitago hoặc công thức đường trung tuyến, tuy nhiên ở đây ta chọn sử dụng công thức đường trung tuyến hơn vì để tính được AC^2 và BD^2 là chỉ cần xác định M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD và áp dụng công thức. Ngoài ra để sử dụng định lí Pitago ta cần có tam giác vuông, mà trong trường hợp này ta không biết nên kẻ đường vuông góc từ điểm nào cả.

Như phân tích ở trên khi áp dụng công thức đường trung tuyến ta được

$4BM^2 = 2(AB^2+BC^2) - AC^2$ và $4DM^2 = 2(AD^2+DC^2) - AC^2$ nên

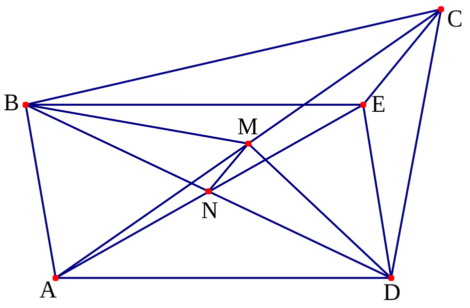
$2(BM^2+DM^2) = AB^2+BC^2+AD^2+DC^2-AC^2$. Lại áp dụng công thức đường trung tuyến thì ta được $4MN^2 = 2(BM^2+DM^2) - BD^2$. Đến đây thì ta thu được

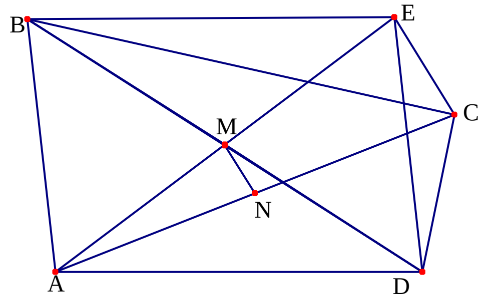
$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 = AC^2+BD^2+4MN^2 \ge AC^2+BD^2$ từ đó suy ra

$$\frac{\sqrt{AC^2+BD^2}}{2} \le \frac{\sqrt{AB^2+BC^2+CD^2+DA^2}}{2} \le \text{Max}\{AB, BC, CD, DA\}$$

+ Để chứng minh $\text{Min}\{AB, BC, CD, DA\} \le \frac{\sqrt{AC^2+BD^2}}{2}$ ta áp dụng công thức về đường trung tuyến. Để chứng minh $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 \le AC^2+BD^2$ và chú ý là khi M, N trùng nhau thì bất đẳng thức xẩy ra dấu bằng nên ta sẽ chứng minh $AC^2+BD^2 = AB^2+AD^2+CD^2+BC^2-kMN^2$. Để được như vậy ta lấy điểm E sao cho ABED là hình bình hành, khi đó có hai trường hợp xẩy ra là E nằm trong hoặc E nằm ngoài tứ giác ABCD. Với E nằm trong tứ giác ABCD, khi đó đó trong tam giác BDE ta cần có $BC^2 \ge BE^2+EC^2 \Rightarrow BC^2-2MN^2 \ge BE^2 = AD^2$ điều này hoàn toàn xẩy ra nếu $BEC \ge 90^0$. Tất nhiên không mất tính tổng quát ta có thể chọn $BEC \ge 90^0$. Hoàn toàn tương tự với E nằm ngoài tứ giác ABCD. Đến đây bài toán được giải quyết.

Lời giải





+ Trước hết ta chứng minh $\dfrac{\sqrt{AC^2+BD^2}}{2} \le \text{Max}\left\{AB, BC, CD, DA\right\}$

Trong tứ giác ABCD ta lấy M và N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Trong tam giác ABC có BM là đường trung tuyến nên $4BM^2 = 2\left(AB^2 + BC^2\right) - AC^2$

Trong tam giác ADC có DM là đường trung tuyến nên $4DM^2 = 2\left(AD^2 + DC^2\right) - AC^2$

Do đó ta được

$$4BM^2 + 4DM^2 = 2\left(AB^2 + BC^2 + AD^2 + DC^2\right) - 2AC^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(BM^2 + DM^2\right) = AB^2 + BC^2 + AD^2 + DC^2 - AC^2$$

Trong tam giác MBD có MN là đường trung tuyến nên $4MN^2 = 2\left(BM^2 + DM^2\right) - BD^2$

Do đó ta được $4MN^2 = 2\left(BM^2 + DM^2\right) - BD^2 = AB^2 + BC^2 + AD^2 + DC^2 - AC^2 - BD^2$

Hay $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2 \ge AC^2 + BD^2$

Do đó ta được $\dfrac{\sqrt{AC^2+BD^2}}{2} \le \dfrac{\sqrt{AB^2+BC^2+CD^2+DA^2}}{2} \le \text{Max}\left\{AB, BC, CD, DA\right\}$

+ Chứng minh $\text{Min}\left\{AB, BC, CD, DA\right\} \le \dfrac{\sqrt{AC^2+BD^2}}{2}$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $DAB + ABC \ge 180^0$; $DAB \ge 90^0$

Dựng hình bình hành ABED, khi đó có hai trường hợp xẩy ra

+ Trường hợp 1: Điểm E nằm trong tứ giác ABCD, khi đó N là giao điểm của hai đường chéo AE và BD và NM là đường trung bình của tam giác ACE. Trong hai góc BEC và CED tồn tại một góc không nhỏ hơn 90^0. Giả sử đó là $BEC \ge 90^0$. Ta có

$BC^2 \ge BE^2 + EC^2 \Rightarrow BC^2 - 2MN^2 \ge BE^2 = AD^2$

Do đó ta được

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + AD^2 + CD^2 + \left(BC^2 - 4MN^2\right) \ge AB^2 + AD^2 + CD^2 + AD^2$$

$$\ge 4\left[\text{Min}\left\{AB, BC, CD, DA\right\}\right]^2$$

Suy ra $\text{Min}\left\{AB, BC, CD, DA\right\} \le \dfrac{\sqrt{AC^2+BD^2}}{2}$

+ Trường hợp 2: Điểm E nằm ngoài tứ giác ABCD, khi đó khi đó M là giao điểm của hai đường chéo AE và BD và NM là đường trung bình của tam giác ACE. Ta có

$BEC \geq BED = DAB \geq 90^0$, do đó ta được

Do đó ta được

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + AD^2 + CD^2 + \left(BC^2 - 4MN^2\right) \geq AB^2 + AD^2 + CD^2 + AD^2$$

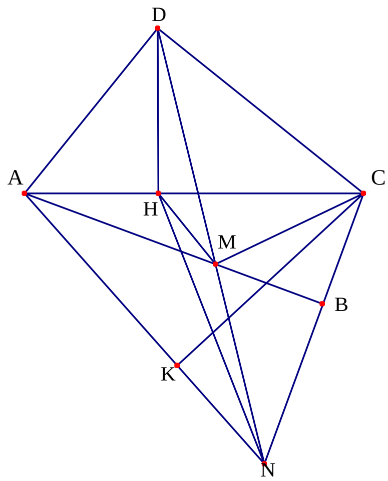
$$\geq 4\left[\mathrm{Min}\left\{AB, BC, CD, DA\right\}\right]^2$$

Suy ra $\mathrm{Min}\left\{AB, BC, CD, DA\right\} \leq \dfrac{\sqrt{AC^2 + BD^2}}{2}$

Vậy ta luôn có $\mathrm{Min}\left\{AB, BC, CD, DA\right\} \leq \dfrac{\sqrt{AC^2 + BD^2}}{2}$. Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 31. Cho tứ giác ABCD có $B = D = 90^0$. Lấy điểm M trên đoạn thẳng AB sao cho $AM = AD$. Đường thẳng DM cắt BC tại N. Gọi H là hình chiếu của D trên AC và K là hình chiếu của C trên AN. Chứng minh rằng $MHN = MCK$

Lời giải



Trong tam giác ADC có $ADC = 90^0$ và DH là đường cao nên ta được $AD^2 = AH.AC$

Mà theo giả thiết ta có AM = AD nên ta được

$$AM^2 = AH.AC \Rightarrow \frac{AM}{AH} = \frac{AC}{AM}$$

Xét hai tam giác AMH và ACM có $MAH = CAM$ và $\dfrac{AM}{AH} = \dfrac{AC}{AM}$. Suy ra $\Delta AMH \backsim \Delta ACM$, do đó ta được

$AHN = AMC$ nên $MHC = CMB$

Tam giác ADM có AM = AD nên cân tại A, suy ra

$ADM = AMD = BMN$

Mà ta có $MDC = 90^0 - ADM$; $MNB = 90^0 - BMN$ nên $MDC = MNB$, suy ra tam giác CDN cân tại C. Do đó ta được $CD = CN$. Trong tam giác vuông ADC có DH là đường cao nên $CD^2 = CH.CA$

Từ đó ta được $CN^2 = CH.CA \Leftrightarrow \dfrac{CN}{CH} = \dfrac{CA}{CN}$. Xét hai tam giác CNH và CAN có $\dfrac{CN}{CH} = \dfrac{CA}{CN}$ và ACN chung nên $\Delta CNH \backsim \Delta CAN$. Do đó ta được $CHN = CNA$

Từ $MHC = CMB$ và $CHN = CNA$ ta được $MHN = CHN - MHC = CNA - CMB$

Mà ta có $CK \perp AN$ và $B = 90^0$ nên ta được $MCK = CNA - CMB$

Do đó ta được MHN = MCK . Điều phải chứng minh.

Ví dụ 32. Cho hình vuông ABCD có cạnh a và M là một điểm tùy ý trên cạnh AB $(M \neq A, B)$. Nối MC cắt BD tại P, MD cắt AC tại Q. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MPQ và giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác CPQD.

Phân tích tìm lời giải

Để ý ta thấy $\frac{S_{MCD}}{S_{MPQ}} = \frac{MD}{MQ}.\frac{MC}{MP}$ và $S_{MCD} = \frac{1}{2}a^2$ không đổi nên tam giác MPQ có diện tích lớn nhất thì tứ giác CPQD có diện tích nhỏ nhất. Do đó ta chỉ cần tìm vị trí M để tam giác MPQ có diện tích lớn nhất là được. Dư đoán tam giác MPQ có diện tích lớn nhất khi AM = MB nên ta cần biểu diễn tỉ số diện tích của hai tam giác MPQ và MCD theo AM và BM. Chú ý theo định lí Talets ta có

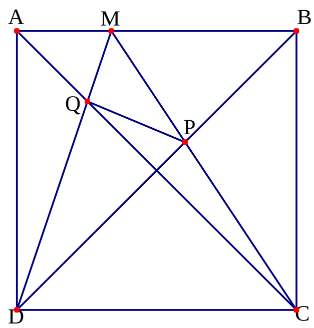
$$\frac{MD}{MQ} = 1 + \frac{QD}{MQ} = 1 + \frac{CD}{AM} = \frac{AM + a}{AM} \text{ và } \frac{MC}{MP} = 1 + \frac{PC}{PM} = 1 + \frac{CD}{MB} = \frac{MB + a}{MB}$$

Đến đây ta được $\frac{S_{MCD}}{S_{MPQ}} = \frac{AM.BM + a\left(AM + BM\right) + a^2}{AM.BM} = 1 + \frac{2a^2}{AM.BM} \geq 1 + \frac{2a^2.4}{\left(AM + BM\right)^2} = 9$

Như vậy bài tam xem như được giải quyết xong.

Lời giải

Ta thấy $S_{MCD} = \frac{1}{2}a^2$ và $\frac{S_{MCD}}{S_{MPQ}} = \frac{MD}{MQ}.\frac{MC}{MP}$ (*)



Do AB song song với CD nên theo định lí Talet ta có các kết quả sau

$$\frac{MD}{MQ} = 1 + \frac{QD}{MQ} = 1 + \frac{CD}{AM} = \frac{AM + a}{AM}$$

$$\frac{MC}{MP} = 1 + \frac{PC}{PM} = 1 + \frac{CD}{MB} = \frac{MB + a}{MB}$$

Khi đó ta được

$$\frac{S_{MCD}}{S_{MPQ}} = \frac{\left(AM + a\right)\left(BM + a\right)}{AM.BM} = \frac{AM.BM + a\left(AM + BM\right) + a^2}{AM.BM}$$

$$= 1 + \frac{2a^2}{AM.BM} \geq 1 + \frac{2a^2.4}{\left(AM + BM\right)^2} = 9$$

Do đó $S_{MPQ} \leq \frac{1}{9}S_{MCD} = \frac{1}{9}.\frac{1}{2}a^2 = \frac{a^2}{18}$. Ta lại có $S_{CPQD} = S_{MCD} - S_{MPQ} \geq \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{18}a^2 = \frac{4}{9}a^2$. Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi MA = MB.

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MPQ là $\frac{a^2}{18}$ và giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác CPQD là $\frac{4a^2}{9}$, các giá trị này đạt được tại $MA = MB$.

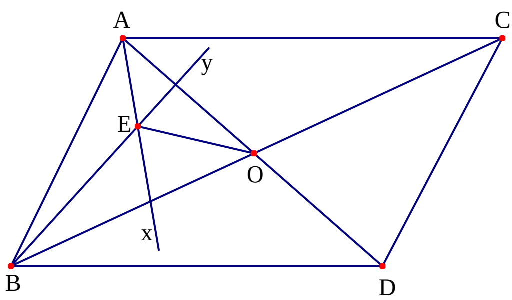
Ví dụ 33. Cho hình bình hành ABCD và O là giao điểm của hai đường chéo. Vẽ tia Ax đối xứng với ta AD qua AC và tia By đối xứng với tia BC qua BD. Gọi giao điểm của hai tia Ax và By là E.

Chứng minh rằng $\frac{AE}{BE} = \left(\frac{AC}{BD}\right)^2$

Phân tích tìm lời giải

Chú ý là $\frac{AC}{BD} = \frac{OA}{OB}$ nên để chứng minh $\frac{AE}{BE} = \left(\frac{AC}{BD}\right)^2$ ta sẽ đi chứng minh $\frac{AE}{BE} = \left(\frac{OA}{OB}\right)^2$. Chú ý đến giả thiết của bài toán ta thấy được $\Delta OEA \backsim \Delta BEO$ nên $\frac{EA}{EO} = \frac{OE}{EB} = \frac{OA}{OB}$, từ đó ta suy ra được điều cần phải chứng minh. Tuy nhiên để ý là điểm E có thể nằm trong hoặc ngoài hình bình hành nên ta cần chia trường hợp để chứng minh bài toán.

Lời giải



Do giao điểm E của hai tia Ax và By có thể nằm trong hình bình hành và cũng có thể nằm bên ngoài hình bình hành. Do đó ta cần xét cả hai trường hợp.

+ Trường hợp 1: Điểm E nằm trong hình bình hành ABCD.

Vì AC là trục đối xứng của hai tia AD và Ax nên AC là tia phân giác của góc DAx

Tương tự ta có BD là tia phân giác của góc CBy

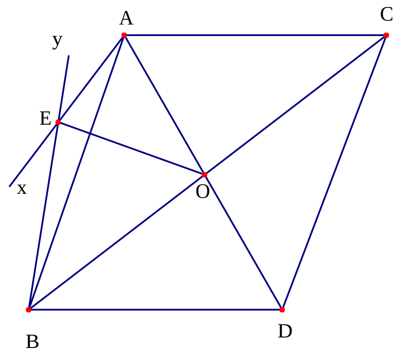
Do đó OE là phân giác của góc xEy nên ta được $AEO = BEO$

Mà ta có $AOE + EOB = OAD + ADO = AOE + ADO$ và $AOE = OBE$

Do đó hai tam giác OEA và BEO đồng dạng với nhau.

Suy ra $\frac{EA}{EO}=\frac{OE}{EB}=\frac{OA}{OB}\Rightarrow\frac{EA}{EO}\cdot\frac{OE}{EB}=\left(\frac{OA}{OB}\right)^2=\left(\frac{AC}{BD}\right)^2$. Do đó ta được $\frac{AE}{BE}=\left(\frac{AC}{BD}\right)^2$.

+ Trường hợp 2: Điểm E nằm ngoài hình bình hành ABCD.



Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được OE là phân giác của góc AEB. Từ đó lập luận như trên ta được $\Delta AEO \backsim \Delta OEB$

Suy ra $\frac{EA}{EO}=\frac{OE}{EB}=\frac{OA}{OB}\Rightarrow\frac{EA}{EO}\cdot\frac{OE}{EB}=\left(\frac{OA}{OB}\right)^2=\left(\frac{AC}{BD}\right)^2$

Hay $\frac{AE}{BE}=\left(\frac{AC}{BD}\right)^2$.

Vậy trong cả hai trường hợp ta luôn có $\frac{AE}{BE}=\left(\frac{AC}{BD}\right)^2$

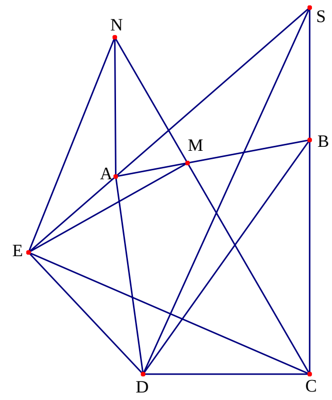
Ví dụ 34. Cho đa giác ABCDE có DC = DE và $E = C = 90^0$. Trên AB lấy M sao cho $\frac{BC}{BM}=\frac{AE}{AM}$. Chứng minh rằng MCE = ADE

Phân tích tìm lời giải

Bài toán cho biết $\frac{BC}{BM}=\frac{AE}{AM}$ nên từ A kẻ đường thẳng song song với BC và cắt tia BM tại N thì ta sẽ được $\frac{BC}{BM}=\frac{AN}{AM}$, điều này dẫn đến AE = AN và NEA = AEN. Để chứng minh MCE = ADE ta cần chứng minh được $\frac{AE}{NE}=\frac{CD}{CE}=\frac{DE}{CE}$, tức là ta cần chỉ ra $\Delta AEN \backsim \Delta DCE$. Giả sử AE cắt BC tai S, khi đó ta được SD là đường trung trực của CE nên suy ra NEA = ESD hay $\Delta AEN \backsim \Delta DCE$.

Đến đấy ta có thể trình bày lại lời giải bài toán như sau.

Lời giải



Từ A kẻ đường thẳng song song với BC và cắt tia BM tại N,

Theo định lí Talet ta có $\frac{BC}{BM} = \frac{AN}{AM}$, mà theo giả thiết ta lại có $\frac{BC}{BM} = \frac{AE}{AM}$. Do đó ta được

$$\frac{BC}{BM} = \frac{AE}{AM} = \frac{AN}{AM} \Rightarrow AE = AN$$

Do đó tam giác AEN cân tại A, nên ta được $NEA = AEN$

Kéo dài AE cắt BC tại S. Ta có $AED = BCD = 90^0$ mà lại có $DC = DE$ và DS là cạnh chung nên hai tam giác SED và SCD bằng nhau, từ đó suy ra $SE = SC$

Do vậy SD là đường trung trực của CE nên $SD \perp CE$

Ta có AN//SC nên ta được $ASC = SAN = 2NEA = 2ESD$. Suy ra $NEA = ESD$ nên ta được NE//SD, mà lại có $SD \perp CE$ nên ta được $NE \perp EC$. Từ đó ta được $AEN = DCE$, suy ra $\Delta AEN \backsim \Delta DCE$

Nên ta được $\frac{AE}{NE} = \frac{CD}{CE} = \frac{DE}{CE}$, điều này dẫn đến hai tam giác vuông EDA và ECN đồng dạng

Do đó ta được $MCE = ADE$.

Ví dụ 35. Chứng minh rằng trong một tứ giác nếu hai đường chéo và hai đường thẳng nối hai trung điểm của hai cạnh đối diện đồng quy tại một điểm thì tứ giác đó là hình bình hành

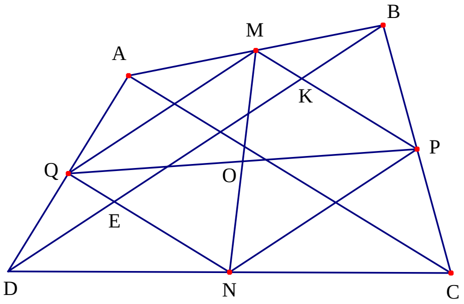
Phân tích tìm lời giải

Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, BC, DA. Khi đó nhận thấy tứ giác MPNQ là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của MN và PQ. Do đó O là giao điểm của AC và BD. Khi đó ta cần chứng minh được $OB = OD$ và $OA = OC$. Chú ý là $\Delta OMK = \Delta ONE$ nên ta suy ra được MP là đường trung bình của tam giác ABC nên $DE = EO$, đến đây thì ta thấy được $OB = OD$. Như vậy bài toán xem như được chứng minh.

Lời giải

Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, BC, DA.

Theo giả thiết ta có AC, BD, MN, PQ đồng quy tại O.



Vì M và P lần lượt là trung điểm của AB và BC nên ta được MP//AC và $MP = \frac{1}{2}AC$

Tương tự ta cũng có NQ//AC và $NQ = \frac{1}{2}AC$

Do đó MP//NQ và $MP = NQ$ nên tứ giác MPNQ là hình bình hành. Nên ta được $OM = ON; OP = OQ$.

Gọi K và E lần lượt là giao điểm của BD với MP và NQ.

Xét hai tam giác OMK và ONE có $OM = ON$, $MOK = NOE$ và $OMK = ONE$

Suy ra $\Delta OMK = \Delta ONE$ nên ta được $OK = OE$. Mặt khác do MP là đường trung bình của tam giác ABC nên ta được BK = KO. Tương tự ta được DE = EO, từ đó suy ra OB = OD và OA = OC. Như vậy tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên ABCD là hình bình hành.

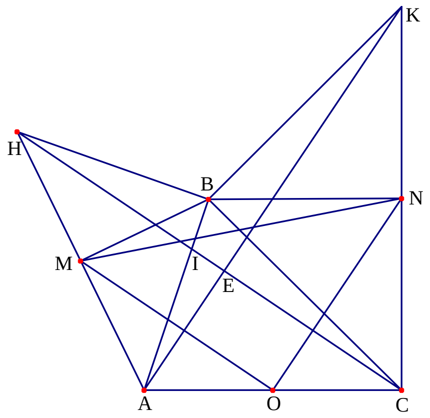
Ví dụ 36. Cho tứ giác ABCD. Dựng về phía ngoài tứ giác các tam giác AMB, BNC, CPD, DQA vuông cân lần lượt tại M, N, P, Q. Chứng minh rằng MP và NQ vuông góc với nhau và bằng nhau.

Phân tích tìm lời giải

Để chứng minh được MP và NQ vuông góc với nhau và bằng nhau ta cần chỉ ra được hai tam giác MOP và NOQ bằng nhau. Muốn vậy ta cần chứng minh được các tam giác MON và POQ vuông cân. Ta có thể phát biểu điều cần chứng minh trên dưới dạng bổ đề: Cho tam giác ABC, về phía ngoài tam giác ABC dựng các tam giác MAB và NBC lần lượt vuông cân tại M và N. Gọi O là trung điểm của AC. Khi đó ta được tam giác MON vuông cân.

Lời giải

Trước hết ta phát biểu và chứng minh bài toán sau: Cho tam giác ABC, về phía ngoài tam giác ABC dựng các tam giác MAB và NBC lần lượt vuông cân tại M và N. Gọi O là trung điểm của AC. Khi đó ta được tam giác MON vuông cân.



Thật vậy, từ điểm B vẽ các đương thẳng vuông góc với AB và BC, cắt AM và CN lần lượt tại H và K.

Do AB vuông góc với BH nên ta được $MBH = 45^0$ nên tam giác MBH vuông cân tại M, suy ra M là trung điểm của AH. Từ đó ta được OM là đường trung binhd của tam giác ACH

Suy ra OM//CH và $OM = \frac{1}{2}CH$.

Chứng minh tương tự ta được ON//AK và $ON = \frac{1}{2}AK$. Gọi I là giao điểm của AB và CH.

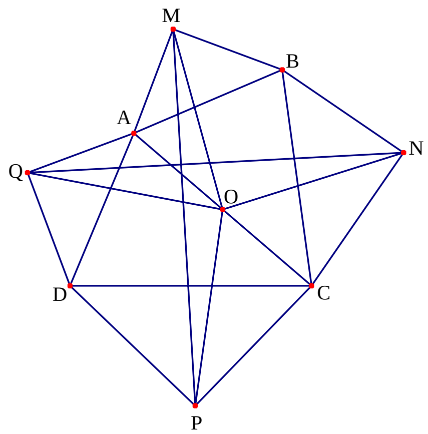
Xét hai tam giác ABK và BCH có $AB = BH$, $BC = BK$ và $ABH = CBK = 90^0 + ABC$

Do đó ta được $\Delta ABH = \Delta CBK$. Từ đó ta được $AK = CH$ nên ta suy ra $OM = ON$

Mặt khác ta cũng có $BHC = BAK$.

Hai tam giác BHI và AIE có $BHC = BAK$ và $HIB = EIA$ nên $HBA = IEA = 90^0$

Do đó $AK \perp CH$, suy ra $OM \perp ON$. Vậy tam giác OMN vuông cân tại O.



Trở lại bài toán: Gọi O là trung điểm của AC, áp dụng kết quả bài toán trên cho tam giác ABC ta được $OM = ON$ và $OM \perp ON$

Tương tự áp dụng kết quả bài toán trên cho tam giác DAC ta được $OP = OQ$ và $OP \perp OQ$

Xét hai tam giác OMP và ONQ có $OM = ON$, $OP = OQ$ và $MOP = MOQ + 90^0 = NOQ$

Do đó ta được $\Delta MOP = \Delta NOQ$, suy ra $MN = PQ$ và $ONQ = OMP$

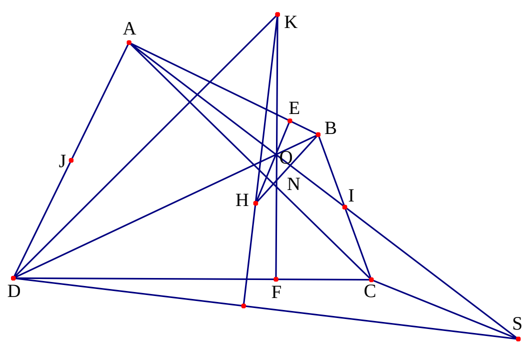
Mà ta có $MON = 90^0$ do đó ta được $MP \perp NQ$.

Ví dụ 37. Cho tứ giác ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng đường thẳng nối trọng tâm của hai tam giác OAD và OBC vuông góc với đường thẳng nối trực tâm của hai tam giác OAB và OCD.

Phân tích tìm lời giải

Gọi G, P lần lượt là trọng tâm các tam giác OAD, OBC. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm tam giác AOB, COD. Ta cần chứng minh HK vuông góc với GP. Trước hết gọi I, J lầng lượt là trung điểm của BC, AD thì ta được IJ song song với GP nên ta sẽ chứng minh HK song song với IJ. Chí ý là I, J là các trung điểm nên ta chọn điểm S sao cho IJ là đường trung bình của tam giác ADS. Ta có thể lấy điểm S trên tia AI sao cho I là trung điểm của AS hoặc vẽ đường thẳng qua C song song với AB và cắt AI tại S, cả hai cánh lấy này đều cho ta hình bình hành ABSC. Khi đó ta được IJ song song với DS và ta cần chứng minh DS vuông góc với HK. Chú ý đến $KO \perp CD$ nên để chứng minh được $HK \perp DS$ ta cần chứng minh được hai tam giác OHK và CSD đồng dạng. Lại có $HOK = SCD$ nên ta cần chỉ ra được $\frac{OH}{OK} = \frac{CS}{CD}$ hay $\frac{OH}{OK} = \frac{AB}{CD}$. Ta thấy $\Delta OHN \backsim \Delta OAE$ nên $OH.OE = OA.ON$ và $\Delta OMK \backsim \Delta OFC$ nên $OK.OF = OC.OM$ do đó ta được $\frac{OH.OE}{OK.OF} = \frac{ON}{OM}.\frac{OA}{OC}$. Mặt khác ta có $\frac{S_{OAB}}{S_{OCD}} = \frac{OA.OB}{OC.OD} = \frac{OE.AB}{OF.CD}$ và $\Delta OMD \backsim \Delta ONB$ suy ra $\frac{OM}{ON} = \frac{OB}{OD}$ nên suy ra được $\frac{OH.OE}{OK.OF} = \frac{OE.AB}{OF.CD} \Rightarrow \frac{OH}{OK} = \frac{AB}{CD}$. Đến đây ta có thể trình bày lời giải như sau.

Lời giải



Gọi H là trực tâm tam giác AOB, khi đó ta có $OH \perp AB$ tại E và $BH \perp OA$ tại N.

Tam giác ONH và tam giác OEA là hai tam giác vuông có $HON = AOE$ nên $\Delta OHN \backsim \Delta OAE$

Từ đó suy ra

$$\frac{OH}{OA} = \frac{ON}{OE} \Rightarrow OH.OE = OA.ON$$

Gọi K là trực tâm của tam giác OCD, khi đó $OK \perp CD$ tại F và $DK \perp AC$ tại M.

Khi đó hoàn toàn tương tự ta được $\Delta OMK \backsim \Delta OFC$ nên ta được

$$\frac{OK}{OC} = \frac{OM}{OF} \Rightarrow OK.OF = OC.OM$$

Từ đó ta được $\frac{OH.OE}{OK.OF}=\frac{ON}{OM}.\frac{OA}{OC}$

Hai tam giác vuông OMD và ONB có MOD = NOB nên $\Delta OMD \backsim \Delta ONB$ suy ra $\frac{OM}{ON}=\frac{OB}{OD}$

Từ đó ta lại có $\frac{OH.OE}{OK.OF}=\frac{OB}{OD}.\frac{OA}{OC}$. Mà ta lại có $\frac{S_{OAB}}{S_{OCD}}=\frac{OA.OB}{OC.OD}=\frac{OE.AB}{OF.CD}$

Do đó ta được $\frac{OH.OE}{OK.OF}=\frac{OE.AB}{OF.CD}\Rightarrow\frac{OH}{OK}=\frac{AB}{CD}$

Qua C kẻ đường thẳng song song với AB, cắt đường thẳng đi qua A và trung điểm I của cạnh BC tại S.

Khi đó ta có $OH\perp CS, OK\perp CD$ nên ta được HOK = SCD và AC = SC Từ đó ta suy ra $\frac{OH}{OK}=\frac{CS}{CD}$ nên hai tam giác HOK và SCD đồng dạng. Khi đó ta được $HK\perp SD$. Gọi J là trung điểm của AD, ta có JI//DS nên ta được $KH\perp JI$. Mặt khác đường thẳng nối trọng tâm của hai tam giác OBC và OAD song song với JI nên đường thẳng đó vuông góc với HK.

Ví dụ 38. Cho đường tròn (O; R) nội tiếp hình thang ABCD (AB//CD). Gọi E, F, G, H theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn (O; R) với các cạnh AB, BC, CD, DA.

a) Chứng minh rằng $\frac{EB}{EA}=\frac{GD}{GC}$. Từ đó hãy tính tỷ số $\frac{EB}{EA}$ khi biết $AB=\frac{4R}{3}$ và BC = 3R.

b) Trên cạnh CD lấy điểm M nằm giữa hai điểm D và C sao cho chân đường vuông góc kẻ từ M đến DO là điểm K nằm ngoài đường tròn (O; R). Đường thẳng HK cắt đường tròn (O; R) tại điểm thứ hai là T. Chứng minh rằng MT = MG.

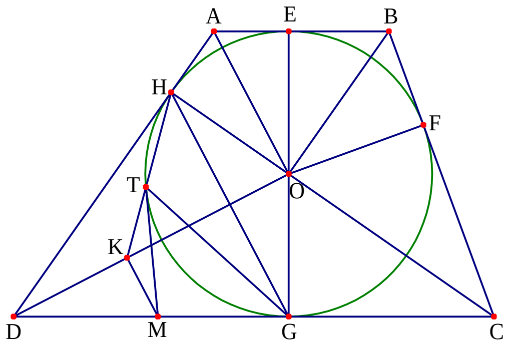
Phân tích tìm lời giải

a) Nhận thấy các tam giác AOD và BOC vuông nên ta được $HA.HD=FB.FC=R^2$. Để chứng minh được $\frac{EB}{EA}=\frac{GD}{GC}$ ta cần chỉ ra được $EA.GD=EB.GC$. Chú ý là $HA=EA; BE=FB; CF=CG; DG=HD$ nên $EA.GD=EB.GC$ hiển nhiên đúng. Đặt $\frac{EB}{EA}=k$ và ta cần tính được k. Chú ý là bài toán cho biết $AB=\frac{4R}{3}$ và $BC=3R$. Lại thấy $\frac{EB}{+EA}=\frac{k\,EB}{k+1}$ và $ED^2=BC^2-(GC-EB)^2$ nên để tính được k ta cần tính được ED, CG, EB theo k và R từ đó thay vào hệ thức trên để được phương trình ẩn k.

b) Chú ý đến MG là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên để chứng minh MT = MG ta cần chỉ ra được OT vuông góc với TM.

Lời giải

a) Do ABCD là hình thang nên ta có $CDA + DAB = 180^0$. Do DO, AO theo thứ tự là đường phân giác của các góc CDA; DAB. Do đó ta được $ODA + OAD = 90^0 \Rightarrow AOD = 90^0$ nên ta giác AOD vuông tại O.



Tương tự tam giác BOC cũng vuông tại O.

Nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta được $HA.HD = FB.FC = R^2$.

Mặt khác ta có HA = EA; BE = FB; CF = CG; DG = HD nên $EA.GD = EB.GC \Rightarrow \frac{EB}{EA} = \frac{GD}{GC}$.

Đặt $\frac{EB}{EA} = \frac{GD}{GC} = k$. Ta có OE vuông góc với AB, OG vuông góc với CD nên ba điểm E, O, G thẳng hàng. Từ đó ta được $EG = 2R$ và $ED^2 = BC^2 - (GC - EB)^2$.

Ta lại có $\frac{EB}{+EA} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow EB = \frac{kAB}{k+1} = \frac{4kR}{3(k+1)}$ nên EB $BF = \frac{4kR}{3(k+1)}$

Từ đó ta được $CF = BC - BF = 3R - \frac{4kR}{3(k+1)}$ nên $CG = 3R - \frac{4kR}{3(k+1)}$

Thay các kết quả trên vào $ED^2 = BC^2 - (GC - EB)^2$ ta được

$$4R^2 = 9R^2 - \left[3R - \frac{4kR}{3(k+1)}\right]^2 \Rightarrow 5 = \frac{(k+9)^2}{9(k+1)^2} \Rightarrow k = \frac{-9+}{11}\sqrt{\ }$$

Vậy $\frac{EB}{EA} = \frac{-9+}{11}\sqrt{\ }$.

b) Ta có $DH = DG$ nên tam giác DGH cân tại D. Mà OD là đường phân giác của góc HDG nên suy GH vuông góc với DO. Lại có MK vuông góc với DO nên MK song song với HG. Từ đó suy ra $KMG = HGC$, mà GC là tiếp tuyến của đường tròn (O) và góc HTG là góc nội tiếp của đường tròn (O). Do đó ta được $HTG = HGC \Rightarrow KMG = HTG$ nên tứ giác KTGM nội tiếp.

Lại có $OKM = OGM = 90^0$ nên bốn điểm O, K, G, M thuộc một đường tròn đường kính MO. Do đó năm điểm O, K, G, M, T thuộc đường tròn đường kính MO. Do đó $MIO = 90^0$ nên OT vuông góc với MT. Do đó MT là tiếp tuyến của đường tròn (O). Ta có MT, MG là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên MT = MG.

Ví dụ 39. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lấy các điểm M, N, P, Q sao cho MN và PQ cùng song song với AC và $AMQ = 30^0$.

a) Gọi A′ là điểm đối xứng với A qua MQ và C′ là điểm đối xứng với C qua NP. Gọi giao điểm của QA′ với NP là E và giao điểm của PC′ với MQ là F chứng minh rằng các điểm E, F, Q, D, P cùng nằm trên một đường thẳng tròn.

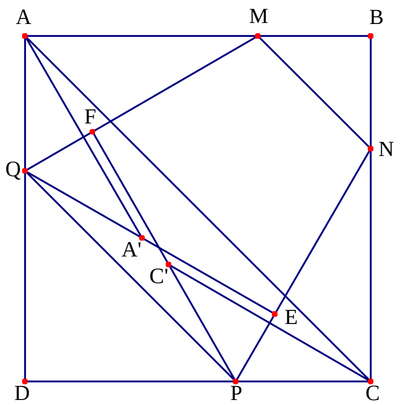
b) Biết $AC = 3MN$, tính diện tích hình thang MNPQ theo a.

Phân tích tìm lời giải

a) Nhận thấy $PDQ = 90^0$ nên đường tròn đi qua ba điểm P, Q, D có đường kính PQ. Do đó để chứng minh năm điểm E, F, D, P, Q cùng thuộc một đường tròn ta chỉ cần chứng minh được $PEQ = PFQ = 90^0$.

b) Khi cho $AC = 3MN$ ta dễ dàng tính được $BM = \frac{a}{3}$, $AM = \frac{2a}{3}$ và $MB = BN = \frac{a}{3}$, $CN = \frac{2a}{3}$. Dễ thấy $S_{MNPQ} = S_{ABCD} - S_{MBN} - S_{DPQ} - 2S_{AQM}$ nên để tính được S_{MNPQ} ta cần tính được $S_{MBN}; S_{DPQ}; S_{AQM}$. Chú ý đến các tam giác vuông và vuông cân thì ta chỉ cần tính được DQ bài toán xem như được giải quyết.

Lời giải



Vì PQ song song với AC nên $DQP = DAC = 45^0$.

Mặt khác ta lại có $AMQ = 30^0$ do đó $AQM = 60^0$ và $MQP = 75^0$.

Do A và A′ đối xứng với nhau qua QM nên $A'QF = AQF = 60^0$, do đó suy ra $EQP = 15^0$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $QPF = 15^0$.

Từ đó suy ra

$QFP = 180^0 - QPE - PQF = 180^0 - 15^0 - 75^0 = 90^0$

Hoàn tàn tương tự ta được $QEP = 90^0$, lại có $PDQ = 90^0$ nên các tam giác DQP, EPQ và EPQ có chung cạnh huyền PQ. Do đó E, F, D cùng nằm trên đường tròn đường kính PQ hay năm điểm E, F, D, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

b) Ta có MN song song với AC và $MN = \frac{1}{3}AC$ nên suy ra $\frac{BM}{AB} = \frac{MN}{AC}$

Do đó ta được $BM=\frac{MN.AB}{AC}=\frac{1}{3}AB=\frac{a}{3}$ và $AM=\frac{2a}{3}$.

Mặt khác tam giác BMN vuông cân nên ta được $MB=BN=\frac{a}{3}$ nên suy ra $CN=\frac{2a}{3}$.

Đặt $AQ=x$ thì $MQ=2x$, khi đó ta được $x^2+AM^2=4x^2\Leftrightarrow 3x^2=\frac{4}{9}a^2\Leftrightarrow x^2=\frac{4a^2}{27}$.

Từ đó suy ra $x=\frac{2a}{3\sqrt{3}}$ và $DQ=a-\frac{2a}{3\sqrt{3}}=\frac{a\left(3\sqrt{3}-2\right)}{3\sqrt{3}}$.

Đến đây ta được $DQ=DP=\frac{a\left(3\sqrt{3}-2\right)}{3\sqrt{3}}$

Do đó suy ra $S_{BMN}=\frac{1}{2}BM^2=\frac{1}{2}.\frac{a^2}{9}=\frac{a^2}{18}$ và $S_{PDQ}=\frac{1}{2}QD^2=\frac{1}{2}\left[\frac{a\left(3\sqrt{3}-2\right)}{3\sqrt{3}}\right]^2=\frac{a^2\left(31-4\sqrt{27}\right)}{54}$

Lại có $S_{AQM}=S_{CPN}=\frac{1}{2}.\frac{2a}{3\sqrt{3}}.\frac{2a}{3}=\frac{2\sqrt{3}a^2}{27}$. Từ đó ta được

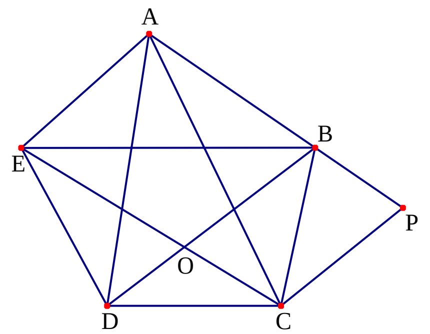
$$S_{MNPQ}=A_{ABCD}-S_{MBN}-S_{DPQ}-2S_{AQM}=a^2-\left[\frac{a^2}{18}+\frac{a^2\left(31-4\sqrt{27}\right)}{54}+2.\frac{2\sqrt{3}a^2}{27}\right]$$

$$=\frac{54a^2-34a^2+4\sqrt{3}a^2}{54}=\frac{a^2\left(10+2\sqrt{3}\right)}{27}$$

Ví dụ 40. Cho ngũ giác ABCDE, mà mỗi đường chéo song song với một cạnh của ngũ giác. Chứng minh rằng tỉ số giữa cạnh của ngũ giác và đường chéo song song với nó là một hằng số.

Lời giải

Gọi O là giao điểm của CE và BD. Qua C kẻ đường thẳng song song với BD cắt AB tại P, từ đó ta thấy O nằm trong ngũ giác và P nằm ngoài ngũ giác ABCDE.



Đặt $\frac{OC}{AM}=k\left(k>0\right)$. Do AE//BD, AB//CE và BE//CD nên ta được $\Delta OBE=\Delta AEB$ và

$\Delta OCD\backsim\Delta AEB$

Do đó ta được $\Delta OCD\backsim\Delta ABE$ suy ra

$$\frac{OC}{AB}=\frac{OD}{AE}=k\Rightarrow OD=k.AE$$

Dễ thấy các tứ giác ABOE, APCE và BPCO là các hình bình hành, nên ta được

AB = OE; CP = AE và BP = OD = k.AB.

Xét hai tam giác EOD và APC có PAC = ACE = CED và EOD = OEA = APC

Do đó $\Delta EOD \backsim \Delta APC$ suy ra $\frac{OD}{PC} = \frac{OE}{PA} \Rightarrow \frac{AE.k}{AE} = \frac{\square\square AB}{AB+BP} = \frac{\square\square AB}{AB+k.AB}$

Từ đó ta được $k = \frac{1}{1+k} \Leftrightarrow k^2 + k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Do đó ta có $\frac{EC}{AB} = \frac{OE+OC}{AB} = \frac{AB+OC}{AB} = 1+k = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Tương tự ta tính được $\frac{AC}{DE} = \frac{AD}{BC} = \frac{BE}{CD} = \frac{BD}{AE} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$