

PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa:

Phân tích đa thức thành nhân tử (hay thừa số) là biến đổi đa thức đó thành một tích của những đa thức.

Ví dụ:

$$a) 2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1).(x + 3)$$

$$\begin{aligned} b) x - 2\sqrt{x}y + 5\sqrt{x} - 10y &= [(\sqrt{x})^2 - 2y\sqrt{x}] + (5\sqrt{x} - 10y) \\ &= \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2y) + 5(\sqrt{x} - 2y) \\ &= (\sqrt{x} - 2y)(\sqrt{x} + 5) \end{aligned}$$

2. Các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử

a) Phương pháp đặt nhân tử chung:

Nếu tất cả các hạng tử của đa thức có một nhân tử chung thì đa thức đó được biểu diễn thành một tích của nhân tử chung với một đa thức khác.

Công thức:

$$AB + AC = A(B + C)$$

Ví dụ:

$$1. 5x(y + 1) - 2(y + 1) = (y + 1)(5x - 2)$$

$$2. 3x + 12\sqrt{x}y = 3\sqrt{x}(\sqrt{x} + 4y)$$

b) Phương pháp dùng hằng đẳng thức:

Nếu đa thức là một vế của hằng đẳng thức đáng nhớ nào đó thì có thể dùng hằng đẳng thức đó để biểu diễn đa thức này thành tích các đa thức.

* Những hằng đẳng thức đáng nhớ:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

Ví dụ: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$1. x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

$$2. x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

$$3. (x + y)^2 - (x - y)^2 = [(x + y) + (x - y)][(x + y) - (x - y)] = 2x \cdot 2y = 4xy$$

$$\text{Cách khác: } (x + y)^2 - (x - y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2) = 4xy$$

c) Phương pháp nhóm hạng tử:

Nhóm một số hạng tử của một đa thức một cách thích hợp để có thể đặt được nhân tử chung hoặc dùng hằng đẳng thức đáng nhớ.

Ví dụ:

$$1. x^2 - 2xy + 5x - 10y = (x^2 - 2xy) + (5x - 10y) = x(x - 2y) + 5(x - 2y) \\ = (x - 2y)(x + 5)$$

$$2. x - 3\sqrt{x} + \sqrt{x}y - 3y = (x - 3\sqrt{x}) + (\sqrt{x}y - 3y) \\ = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 3) + y(\sqrt{x} - 3) = (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + y)$$

d. Phương pháp tách một hạng tử: (trường hợp đặc biệt của tam thức bậc 2 có nghiệm)

Tam thức bậc hai có dạng: $ax^2 + bx + c = ax^2 + b_1x + b_2x + c$ ($a \neq 0$) nếu $\begin{cases} b_1b_2 = ac \\ b_1 + b_2 = b \end{cases}$

Ví dụ:

$$\text{a) } 2x^2 - 3x + 1 = 2x^2 - 2x - x + 1 \\ = 2x(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(2x - 1)$$

$$\text{b) } y - 3\sqrt{y} + 2 = y - \sqrt{y} - 2\sqrt{y} + 2 \\ = \sqrt{y}(\sqrt{y} - 1) - 2(\sqrt{y} - 1) \\ = (\sqrt{y} - 2)(\sqrt{y} - 1)$$

e. Phương pháp thêm, bớt cùng một hạng tử:

Ví dụ:

$$\text{a) } y^4 + 64 = y^4 + 16y^2 + 64 - 16y^2 \\ = (y^2 + 8)^2 - (4y)^2 \\ = (y^2 + 8 - 4y)(y^2 + 8 + 4y)$$

$$\text{b) } x^2 + 4 = x^2 + 4x + 4 - 4x = (x + 2)^2 - 4x$$

$$= (x + 2)^2 - (2\sqrt{x})^2 = (x - 2\sqrt{x} + 2)(x + 2\sqrt{x} + 2)$$

g. Phương pháp phối hợp nhiều phương pháp:

Ví dụ:

$$a) a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 = a^2(a - b) - b^2(a - b)$$

$$= (a - b)(a^2 - b^2)$$

$$= (a - b)(a - b)(a + b)$$

$$= (a - b)^2(a + b)$$

$$b) 27x^3\sqrt{y} - a^3b^3\sqrt{y} = \sqrt{y}(27x^3 - a^3b^3)$$

$$= \sqrt{y}[(3x)^3 - (ab)^3]$$

$$= \sqrt{y}(3x - ab)(9x^2 + 3xab + a^2b^2)$$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

$$a) 14x^2 - 21xy^2 + 28x^2y^2 = 7x(2x - 3y^2 + 4xy^2)$$

$$b) 2(x + 3) - x(x + 3) = (x+3)(2-x)$$

$$c) x^2 + 4x - y^2 + 4 = (x + 2)^2 - y^2 = (x + 2 - y)(x + 2 + y)$$

Bài 2: Giải phương trình sau :

$$2(x + 3) - x(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(2 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \\ 2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x_1 = -3$; $x_2 = 2$

Bài 3: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$a) 8x^3 + 4x^2 - y^3 - y^2 = (8x^3 - y^3) + (4x^2 - y^2)$$

$$= [(2x)^3 - y^3] + (4x^2 - y^2)$$

$$= (2x - y)[(2x)^2 + 2xy + y^2] + (2x + y)(2x - y)$$

$$= (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y)$$

$$b) x^2 + 5x - 6 = x^2 + 6x - x - 6$$

$$= x(x + 6) - (x + 6)$$

$$= (x + 6)(x - 1)$$

$$\begin{aligned}
c) \quad a^4 + 16 &= a^4 + 8a^2 + 16 - 8a^2 \\
&= (a^2 + 4)^2 - (\sqrt{8}a)^2 \\
&= (a^2 + 4 + \sqrt{8}a)(a^2 + 4 - \sqrt{8}a)
\end{aligned}$$

Bài 4: Thực hiện phép chia đa thức sau đây bằng cách phân tích đa thức bị chia thành nhân tử:

a) $(x^5 + x^3 + x^2 + 1):(x^3 + 1)$

b) $(x^2 - 5x + 6):(x - 3)$

Giải:

a) Vì $x^5 + x^3 + x^2 + 1 = x^3(x^2 + 1) + x^2 + 1 = (x^2 + 1)(x^3 + 1)$

nên $(x^5 + x^3 + x^2 + 1):(x^3 + 1)$

$$= (x^2 + 1)(x^3 + 1):(x^3 + 1)$$

$$= (x^2 + 1)$$

b) Vì $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6$

$$= x(x - 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(x - 2)$$

nên $(x^2 - 5x + 6):(x - 3) = (x - 3)(x - 2):(x - 3) = (x - 2)$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $10(\sqrt{x} - y) - 8y(y - \sqrt{x})$

b) $2\sqrt{x}y + 3z + 6y + \sqrt{x}y$

Bài 2: Giải các phương trình sau :

a) $5\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2010) - \sqrt{x} + 2010 = 0$

b) $x^3 - 13x = 0$

Bài 3: Rút gọn các phân thức sau:

Error! No bookmark name given. a) $\frac{x^2 + xy - y^2}{2x^2 - 3xy + y^2}$

b) $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 2}$

Bài 4: Phân tích thành nhân tử (với a, b, x, y là các số không âm)

a) $xy + y\sqrt{x} + \sqrt{x} + 1$

b) $\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3} + \sqrt{a^2b} - \sqrt{ab^2}$

IV. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - y^2 - 2x + 2y$

b) $2x + 2y - x^2 - xy$

c) $3a^2 - 6ab + 3b^2 - 12c^2$

d) $x^2 - 25 + y^2 + 2xy$

e) $a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc$

f) $x^2 - 2x - 4y^2 - 4y$

g) $x^2y - x^3 - 9y + 9x$

h) $x^2(x - 1) + 16(1 - x)$

Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- 1) $4x^2 - 25 + (2x + 7)(5 - 2x)$
- 2) $3(x + 4) - x^2 - 4x$
- 3) $5x^2 - 5y^2 - 10x + 10y$
- 4) $x^2 - xy + x - y$
- 5) $ax - bx - a^2 + 2ab - b^2$
- 6) $x^2 + 4x - y^2 + 4$
- 7) $x^3 - x^2 - x + 1$
- 8) $x^4 + 6x^2y + 9y^2 - 1$

- 9) $x^3 + x^2y - 4x - 4y$
- 10) $x^3 - 3x^2 + 1 - 3x$
- 11) $3x^2 - 6xy + 3y^2 - 12z^2$
- 12) $x^2 - 2x - 15$
- 13) $2x^2 + 3x - 5$
- 14) $2x^2 - 18$
- 15) $x^2 - 7xy + 10y^2$
- 16) $x^3 - 2x^2 + x - xy^2$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử.

- | | | | |
|-----|---|-----|---|
| 1. | $16x^3y + 0,25yz^3$ | 21. | $(a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 - 4c^2$ |
| 2. | $x^4 - 4x^3 + 4x^2$ | 22. | $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$ |
| 3. | $2ab^2 - a^2b - b^3$ | 23. | $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2$ |
| 4. | $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$ | 24. | $a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)$ |
| 5. | $x^3 + x^2 - 4x - 4$ | 25. | $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$ |
| 6. | $x^3 - x^2 - x + 1$ | 26. | $(a + b)^3 - (a - b)^3$ |
| 7. | $x^4 + x^3 + x^2 - 1$ | 27. | $X^3 - 3x^2 + 3x - 1 - y^3$ |
| 8. | $x^2y^2 + 1 - x^2 - y^2$ | 28. | $X^{m+4} + x^{m+3} - x - 1$ |
| 10. | $x^4 - x^2 + 2x - 1$ | 29. | $(x + y)^3 - x^3 - y^3$ |
| 11. | $3a - 3b + a^2 - 2ab + b^2$ | 30. | $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ |
| 12. | $a^2 + 2ab + b^2 - 2a - 2b + 1$ | 31. | $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3$ |
| 13. | $a^2 - b^2 - 4a + 4b$ | 32. | $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ |
| 14. | $a^3 - b^3 - 3a + 3b$ | 33. | $(x + y)^5 - x^5 - y^5$ |
| 15. | $x^3 + 3x^2 - 3x - 1$ | 34. | $(x^2 + y^2)^3 + (z^2 - x^2)^3 - (y^2 + z^2)^3$ |
| 16. | $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ | 35. | $x^3 - 5x^2y - 14xy^2$ |
| 17. | $x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ | 36. | $x^4 - 7x^2 + 1$ |
| 18. | $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - 1)^2$ | 37. | $4x^4 - 12x^2 + 1$ |
| 19. | $(xy + 4)^2 - (2x + 2y)^2$ | 38. | $x^2 + 8x + 7$ |
| 20. | $(a^2 + b^2 + ab)^2 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2$ | 39. | $x^3 - 5x^2 - 14x$ |

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử.

- | | | | |
|----|---------------|-----|--------------------|
| 1. | $x^4y^4 + 4$ | 6. | $x^7 + x^2 + 1$ |
| 2. | $x^4y^4 + 64$ | 7. | $x^8 + x + 1$ |
| 3. | $4x^4y^4 + 1$ | 8. | $x^8 + x^7 + 1$ |
| 4. | $32x^4 + 1$ | 9. | $x^8 + 3x^4 + 1$ |
| 5. | $x^4 + 4y^4$ | 10. | $x^{10} + x^5 + 1$ |

Bài tập 6: Phân tích đa thức thành nhân tử.

1. $x^2 + 2xy - 8y^2 + 2xz + 14yz - 3z^2$
2. $3x^2 - 22xy - 4x + 8y + 7y^2 + 1$
3. $12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3$
4. $2x^2 - 7xy + 3y^2 + 5xz - 5yz + 2z^2$
5. $x^2 + 3xy + 2y^2 + 3xz + 5yz + 2z^2$
6. $x^2 - 8xy + 15y^2 + 2x - 4y - 3$
7. $x^4 - 13x^2 + 36$
8. $x^4 + 3x^2 - 2x + 3$
9. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Bài tập 7: Phân tích đa thức thành nhân tử:

1. $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$
2. $(a - x)y^3 - (a - y)x^3 - (x - y)a^3$
3. $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$
4. $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$
5. $3x^5 - 10x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 10x + 8$
6. $5x^4 + 24x^3 - 15x^2 - 118x + 24$
7. $15x^3 + 29x^2 - 8x - 12$
8. $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8$
9. $x^3 + 9x^2 + 26x + 24$

Bài tập 8: Phân tích đa thức thành nhân tử.

1. $a(b + c)(b^2 - c^2) + b(a + c)(a^2 - c^2) + c(a + b)(a^2 - b^2)$
2. $ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a)$
3. $a(b^2 - c^2) - b(a^2 - c^2) + c(a^2 - b^2)$
4. $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$
5. $(x + y)^7 - x^7 - y^7$
6. $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + abc$
7. $(x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$
8. $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) + 2abc$
9. $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$
10. $abc - (ab + bc + ac) + (a + b + c) - 1$

Bài tập 9: Phân tích đa thức thành nhân tử.

1. $(x^2 + x)^2 + 4x^2 + 4x - 12$
2. $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$
3. $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$
4. $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24$

5. $(x^2 + 2x)^2 + 9x^2 + 18x + 20$
6. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 4y - 35$
7. $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16$
8. $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12$
9. $4(x^2 + 15x + 50)(x^2 + 18x + 72) - 3x^2$