CÁC BÀI TOÁN VỀ CẤU TẠO SỐ

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

Số tự nhiên $A = \overline{a_n a_{n-1} ... a_0}$ được biểu diễn dưới dạng tổng các lũy thừa như sau:

$$A = \overline{a_n a_{n-1} ... a_0} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_0$$

Trong đó a_n; a_{n-1};...; a_0 là các chữ số và a_n khác 0.

II. MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA.

Các bài toán về chữ số thường liên quan đến tìm các chữ số của một số thỏa mãn các tính chất chia hết, thỏa mãn là số chính phương và số lập phương đúng hoặc thỏa mãn một tính chất nào đó.

Ví dụ 1. Tìm các số $\overline{abcdmn}$ biết rằng $\overline{abcdmn}.2 = \overline{cdmnab}$.

Lời giải

Từ $\overline{abcdmn}.2 = \overline{cdmnab}$ ta được $\left(\overline{ab}.10000 + \overline{cdmn}\right).2 = \overline{cdmn}.100 + \overline{ab}$

Hay ta được $20000\overline{ab} + 2\overline{cdmn} = 100\overline{cdmn} + \overline{ab} \Rightarrow 19999\overline{ab} = 98\overline{cdmn} \Rightarrow 2857.\overline{ab} = 14.\overline{cdmn}$.

Từ đó ta được $14.\overline{cdmn} \vdots 2857$. Mà ta thấy $(14, 2857) = 1$ nên suy ra $\overline{cdmn} \vdots 2857$.

Từ đó ta được $\overline{cdmn} \in \{2857; 5714; 8571\}$. Đến đây ta xét các trường hợp cụ thể như sau:

+ Nếu $\overline{cdmn} = 2857$, khi đó từ $2857.\overline{ab} = 14.\overline{cdmn}$ ta suy ra được $\overline{ab} = 14$.

Do đó ta được $\overline{abcdmn} = 142857$

+ Nếu $\overline{cdmn} = 5714$, khi đó từ $2857.\overline{ab} = 14.\overline{cdmn}$ ta suy ra được $\overline{ab} = 28$.

Do đó ta được $\overline{abcdmn} = 285714$

+ Nếu $\overline{cdmn} = 8571$, khi đó từ $2857.\overline{ab} = 14.\overline{cdmn}$ ta suy ra được $\overline{ab} = 42$.

Do đó ta được $\overline{abcdmn} = 428571$.

Ví dụ 2. Tìm các chữ số a, b sao cho $\overline{62ab427}$ chia hết cho 99.

Lời giải

Cách 1. Ta có $99 = 9.11$ và $(9, 11) = 1$ nên ta có $\overline{62ab427}$ chia hết cho 99 khi và chỉ khi $\overline{62ab427}$ chia hết cho 9 và chia hết cho 11.

- Ta có $\overline{62ab427}$ chia hết cho 9 khi và chỉ khi $(6+2+a+b+4+2+7) \vdots 9$ hay $(a+b+3) \vdots 9$

Từ đó ta được $(a+b+3) \in \{9;18\}$ nên suy ra $(a+b+3) \in \{6;15\}$

- Ta có $\overline{62ab427}$ chia hết cho 11 khi và chỉ khi $(6+a+4+7)-(2+b+2) \vdots 11$ hay

$(a-b+2) \vdots 11$

Từ đó ta được $(a-b+2) \in \{0;11\}$ nên suy ra $(a-b) \in \{-2;9\}$.

Từ đó ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: $\begin{cases} a-b=9 \\ a+b=6 \end{cases}$, trường hợp này không tồn tại các chữ số a, b thỏa mãn.

+ Trường hợp 2: $\begin{cases} a-b=9 \\ a+b=15 \end{cases}$, trường hợp này không tồn tại các chữ số a, b thỏa mãn.

+ Trường hợp 3: $\begin{cases} a-b=-2 \\ a+b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$

+ Trường hợp 4: $\begin{cases} a-b=-2 \\ a+b=15 \end{cases}$, trường hợp này không tồn tại các chữ số a, b thỏa mãn.

Vậy các chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $a=2; b=4$.

Cách 2. Ta có $\overline{62ab427} = 62.100000 + \overline{ab}.1000 + 427 = 62630.99 + \overline{ab}.990 + 10.\overline{ab} + 57$

Suy ra $\overline{62ab427}$ chia hết cho 99 khi và chỉ khi $10.\overline{ab} + 57$ chia hết cho 99.

Từ đó ta được $10.\overline{ab} + 57 = 99.k$ với k là một số tự nhiên.

Dễ thấy $10.\overline{ab} + 57$ có chữ số tận cùng là 7, do đó 99.k phải có chữ số tận cùng là 7 nên ta được $k = 3$

Từ đó suy ra $10.\overline{ab} + 57 = 99.3 \Rightarrow \overline{ab} = 24$

Vậy các chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $a=2; b=4$.

Ví dụ 3. Tìm các số $\overline{abc}$ biết rằng $(\overline{abc} + \overline{cba}) \vdots 68$ (các chữ số a, b, c có thể giống nhau)

Lời giải

Để ý là $68 = 4.17$ và $(4,17) = 1$ nên $(\overline{abc} + \overline{cba}) \vdots 68$ khi và chỉ khi $(\overline{abc} + \overline{cba}) \vdots 4;17$

Ta xét $(\overline{abc} + \overline{cba})$ 4, khi đó ta được $(100a + 10b + c + 100c + 10b + a) = 101(a+c) + 20b$ chia hết cho 4 hay ta được $101(a+b)$ chia hết cho 4. Vì $(4,101) = 1$ nên suy ra $a + c \vdots 4$.

Từ đó suy ra $a + c \in \{4;8;12;16\}$ (1)

Xét $\left(\overline{abc} + \overline{cba}\right) \vdots\ 17$, khi đó ta được $\left(100a + 10b + c + 100c + 10b + a\right) = 101\left(a + c\right) + 20b$ chia hết cho 17 hay ta được $102\left(a + b\right) + 17b + 3b - \left(a + b\right)$ chia hết cho 17. Suy ra $3b - \left(a + c\right)$ chia hết cho 17.

Từ đó ta được $3b - \left(a + c\right) \in \{0;17\}$ (2).

Kết hợp (1) và (2) ta xét các trường hợp sau

+ Nếu $3b - \left(a + c\right) = 0 \Rightarrow 3b = a + b$ nên ta được

- Với $a + c = 4$ suy ra $3b = 4$, trường hợp này loại.
- Với $a + c = 8$ suy ra $3b = 8$, trường hợp này loại.
- Với $a + c = 12$ suy ra $3b = 12$ hay $b = 4$. Khi đó với $a + c = 12$ ta được các cặp chữ số $\left(a;c\right)$ thỏa mãn là $\left(3;9\right), \left(4;8\right), \left(5;7\right), \left(6;6\right), \left(7;5\right), \left(8;4\right), \left(9;3\right)$.

Từ đó ta suy ra được $\overline{abc} \in \{349;448;547;646;745;844;943\}$.

- Với $a + c = 16$ suy ra $3b = 16$, trường hợp này loại.

+ Nếu $3b - \left(a + c\right) = 17$, suy ra $3b > 17 \Rightarrow b \in \{6;\ 7;\ 8;\ 9\}$. Khi đó ta có

- Với $b = 6$, từ $3b - \left(a + c\right) = 17$ suy ra $a + c = 1$, trường hợp này loại.
- Với $b = 7$, từ $3b - \left(a + c\right) = 17$ suy ra $a + c = 4$, trường hợp này có các cặp số $\left(a;\ c\right)$ thỏa mãn là $\left(1;\ 3\right), \left(2;\ 2\right), \left(3;1\right)$. Từ đó ta suy ra được $\overline{abc} \in \{173;\ 272;\ 371\}$.
- Với $b = 8$, từ $3b - \left(a + c\right) = 17$ suy ra $a + c = 7$, trường hợp này loại.
- Với $b = 9$, từ $3b - \left(a + c\right) = 17$ suy ra $a + c = 10$, trường hợp này loại.

Vậy ta được các số thỏa mãn bài toán là $\overline{abc} \in \{173;\ 272;\ 371;\ 349;\ 448;\ 547;\ 646;\ 745;\ 844;\ 943\}$.

Ví dụ 4. Tìm số $\overline{abcd}$ thỏa mãn điều kiện $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 4574$.

Lời giải

Từ giả thiết $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 4574$ ta viết được lại thành $1000a + 200b + 30c + 4d = 4574$

Từ đó suy ra 4d có chữ số tận cùng là 4, nên ta được $d = 1$ hoặc $d = 6$. Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Với $d=1$, khi đó ta được $1000a+200b+30c+4=4574$

Do đó $100a+20b+3c=457$, suy ra 3c có chữ số tận cùng là 7 nên ta được $c=9$.

Từ đó ta lại có $10a+2b=43$, rõ ràng phương trình vô nghiệm.

Do đó trường hợp này không tồn tại số $\overline{abcd}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 2: Với $d=6$, khi đó ta được $1000a+200b+30c+24=4574$

Do đó Do đó $100a+20b+3c=455$, suy ra 3c có chữ số tận cùng là 5 nên ta được $c=5$.

Từ đó ta lại có $10a+2b=44$, nên 2b có chữ số tận cùng là 4, suy ra $b=2$ hoặc $b=7$.

Với $b=2$ ta được $a=4$ và với $b=7$ ta được $a=3$.

Như vậy ta được hai số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\overline{abcd}=4256$ và $\overline{abcd}=3756$.

Ví dụ 5. Tìm các chữ số a, b, c biết $\dfrac{1}{\overline{ab}.\overline{bc}}+\dfrac{1}{\overline{bc}.\overline{ca}}+\dfrac{1}{\overline{ca}.\overline{ab}}=\dfrac{11}{3321}$.

Lời giải

Quy đồng mẫu số ta được $81.41\left(\overline{ca}+\overline{ab}+\overline{bc}\right)=11.\overline{ca}.\overline{ab}.\overline{bc}$.

Từ đó ta được $11.\overline{ca}.\overline{ab}.\overline{bc}$ chia hết cho 41, mà 41 là số nguyên tố nên trong các số $\overline{ca};\ \overline{ab};\ \overline{bc}$ có một số chia hết cho 41. Không mất tính tổng quát ta giả sử số đó là $\overline{ca}$, khi đó $\overline{ca}\in\left\{41;\ 82\right\}$.

Ta xét các trường hợp sau

- Với $\overline{ca}=41$, khi đó ta được $c=4$ và $a=1$. Thay vào đẳng thức

$81.41\left(\overline{ca}+\overline{ab}+\overline{bc}\right)=11.\overline{ca}.\overline{ab}.\overline{bc}$

Ta thu được $81.41\left(41+\overline{1b}+\overline{b4}\right)=11.41.\overline{1b}.\overline{b4}$ hay $81.\left(41+\overline{1b}+\overline{b4}\right)=11.\overline{1b}.\overline{b4}$.

Từ đó suy ra $11.\overline{1b}.\overline{b4}$ chia hết cho 81, mà ta có $\left(11,81\right)=1$ nên $\overline{1b}.\overline{b4}$ chia hết cho 81.

Chú ý là $\overline{1b}$ không chia hết 27 nên $\overline{1b}$ chia hết cho 3 hoặc 9, khi đó $\overline{1b}=12;15;18$ nên tương ứng ta được $b=2;\ 5;\ 8$. Từ các trường hợp cụ thể ta thấy $b=5$ yêu cầu bài toán.

Do đó ta được bộ chữ số $\left(a;\ b;\ c\right)$ thỏa mãn yêu cầu là $\left(1;\ 5;\ 4\right)$.

- Với $\overline{ca}=82$, khi đó ta được $c=8$ và $a=2$. Thay vào đẳng thức

$81.41\left(\overline{ca}+\overline{ab}+\overline{bc}\right)=11.\overline{ca}.\overline{ab}.\overline{bc}$

Ta thu được $81.41\left(82+\overline{2b}+\overline{b8}\right)=11.82\overline{2b}.\overline{b8}$ hay $81.\left(82+\overline{2b}+\overline{b8}\right)=22.\overline{2b}.\overline{b8}$.

Từ đẳng thức trên ta được b là số chẵn. Mà do $(22,81)=1$ nên $\overline{2b}.\overline{b8}$ chia hết cho 81.

Ta lại thấy $\overline{2b}$ không chia hết cho 81 nên suy ra $\overline{b8}$ chia hết cho 3, do b là số chẵn nên ta được $b=4$.

Từ đó ta được 24.48 chia hết cho 81, điều này vô lí nên trong trường hợp này không tồn tại chữ số b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Hoàn toàn tương tự với các trường hợp $\overline{ab}$; $\overline{bc}$ có một số chia hết cho 41.

Vậy bộ các chữ số $(a;b;c)$ thỏa mãn yêu cầu là $(1;5;4),(4;1;5),(5;4;1)$.

Ví dụ 6. Tìm số $\overline{abcd}$ thỏa mãn $\overline{abcd}+72$ là một số chính phương và $\overline{abd}=(b+d-2a)^2$

Lời giải

Ta có $1\le a\le 9$ và $0\le b,c,d\le 9$. Từ đó suy ra $b+d-2a\le 16$.

Mà ta lại có $\overline{abd}=(b+d-2a)^2$ nên suy ra $10^2\le\overline{abd}\le 16^2$.

Suy ra ta được $\overline{abd}\in\left\{10^2;11^2;12^2;13^2;14^2;15^2;16^2\right\}$.

Hay ta được $\overline{abd}\in\left\{100;121;144;169;196;225;256\right\}$

Do $\overline{abcd}+72$ là một số chính phương nên đặt $\overline{abcd}+72=k^2$ với $k\in\mathbb{N}^*$.

Các số chính phương có chữ số tận cùng là 0; 1; 4; 5; 6; 9 nên suy ra $d\in\left\{2;3;4;7;8;9\right\}$.

Kết hợp với $\overline{abd}\in\left\{100;121;144;169;196;225;256\right\}$ ta suy ra được $\overline{abd}=144$ hoặc $\overline{abd}=169$

.

+ Với $\overline{abd}=144$, khi đó ta được $a=1;b=d=4$. Mà ta lại thấy $144\ne(4+4-2.1)^2$ nên $\overline{abd}=144$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $\overline{abd}=169$, khi đó ta được $a=1;b=6;d=9$. Mà ta lại thấy $169=(6+9-2.1)^2$ nên $\overline{abd}=169$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Từ đó ta được $\overline{16c9}+72=k^2$ nên k^2 là số lẻ, do đó k là số lẻ.

Mặt khác ta có $1609+72\le\overline{16c9}+72\le 1699+72$ nên suy ra $41^2\le k^2\le 43^2$.

Từ đó suy ra $k^2=41^2$ hay $\overline{16c9}+72=41^2\Rightarrow\overline{16c9}=1609\Rightarrow c=0$.

Vậy số cần tìm là $\overline{abcd} = 1609$.

Ví dụ 7. Tìm tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số biết rằng số đó bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

Lời giải

Gọi số tự nhiên có bốn chữ sô cần tìm là $\overline{abcd}$ với $a,b,c,d \in N$ và $1 \le a \le 9; 0 \le b,c,d \le 9$.

Theo bài ra ta có $\overline{abcd} = (a+b+c+d)^3$.

Ta có nhận xét: Một số tự nhiên và tổng các chữ số của nó khi chia cho 9 có cùng số dư.

Đặt $m = a+b+c+d \left(m \in N^*\right)$, khi đó $\overline{abcd}$ và m có cùng số dư khi chia cho 9.

Từ đó ta được $\overline{abcd} - m \vdots 9$ hay ta được $\overline{abcd} - m = 9k\left(k \in N^*\right)$.

Mà ta có $\overline{abcd} = (a+b+c+d)^3$ nên ta được $m^3 - m = 9k \Leftrightarrow (m-1)m(m+1) = 9k$

Do đó $(m-1)m(m+1) \vdots 9$.

Ta biết rằng trong ba số tự nhiên liên tiếp có duy nhất một số chia hết cho 3 mà tích của chúng chia hết cho 9 nên trong ba số đó có duy nhất một số chia hết cho 9.

Ta có $1000 \le \overline{abcd} \le 9999 \Rightarrow 1000 \le m^3 \le 9999 \Rightarrow 10 \le m \le 21$

Do đó ta được $9 \le m - 1 \le 20; 11 \le m + 1 \le 22$. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $m \vdots 9$, khi đó $m = 18$. Do đó ta được $abcd = 18^3 = 5832$.

Thử lại ta thấy $5832 = (5+8+3+2)^3$ đúng.

- Nếu $m+1 \vdots 9$, khi đó $m+1 = 18 \Rightarrow m = 17$. Do đó ta được $abcd = 17^3 = 4813$.

Thử lại ta thấy $4913 = (4+9+1+3)^3$ đúng.

- Nếu $m-1 \vdots 9$, khi đó $m-1 = 18 \Rightarrow m = 19$. Do đó ta được $abcd = 19^3 = 6859$.

Thử lại ta thấy $6859 = (6+8+5+9)^3$ không đúng. Do đó trường hợp này loại.

Vậy các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là 5832 và 4913.

Ví dụ 8. Tìm số chính phương có bốn chữ số khác nhau sao cho khi viết số đó theo thứ tự ngược lại ta được một số có bốn chữ số cũng là số chính phương và chia hết cho số ban đầu.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{abcd} = x^2$ với a, b, c, d là các chữ số và x là một số tự nhiên. Số viết theo chiều ngược lại là $\overline{dcba} = y^2$ với y là một số tự nhiên. Vì cả hai số đều có bốn chữ số nên ta suy ra được $a > 0;\ d > 0$.

Theo bài ra ta có $y^2 = kx^2$ với k là một số tự nhiên lớn hơn 1.

Vì a, d là các chữ số tận cùng của số chính phương nên $a,d \in \{1; 4; 5; 6; 9\}$ $(*)$.

Mặt khác do $k \ge 2$ và $\overline{dcba} = y^2$ có bốn chữ số nên $a = 1$ hoặc $a = 4$. Ta xét các trường hợp sau

- Với $a = 1$, khi đó ta được $\overline{dcb1} = k.\overline{1bcd}$. Từ đó suy ra cả d và k đều là số lẻ. kết hợp với (*) ta suy ra được $d = 9$ và $k = 9$.

Do đó ta có $\overline{9cb1} = 9.\overline{1bc9}$ nên $c = 89b + 8 \Rightarrow b = 0;\ c = 8$.

Do đó số cần tìm là $\overline{abcd} = 1089 = 33^2$ và $\overline{dcba} = 9801 = 99^2$; $9801 = 9.1089$.

- Với $a = 4$, khi đó ta được $\overline{dcb4} = k.\overline{4bcd}$. Nhận thấy không tồn tại chữ số tận cùng d thỏa mãn (*) và đẳng thức $\overline{dcb4} = k.\overline{4bcd}$. Vậy trường hợp này không có số nào thỏa mãn.

Kết luận số cần tìm là 1089.

Ví dụ 9. Tìm tất cả các số nguyên dương N có ba chữ số sao cho tổng của N với các chữ số của N và số viết được bởi các chữ số của N nhưng theo thứ tự ngược lại thì ta được một số chính phương.

Lời giải

Gọi số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $N = \overline{abc}$ với $1 \le a,c \le 9;\ 0 \le b \le 9$.

Khi đó theo bài toán ta có $\overline{abc} + a + b + c + \overline{cba}$ là một số chính phương.

Đặt $\overline{abc} + a + b + c + \overline{cba} = m^2$, khi đó ta được $102(a + b + c) - 81b = m^2$

Từ đó ta được $m^2 \vdots 3 \Rightarrow m \vdots 3 \Rightarrow m^2 \vdots 9$ nên suy ra $a + b + c \vdots 3$.

Đặt $m = 3k, a + b + c = 3h$ với $k, h \in N; 1 \le h \le 9$.

Khi đó từ $102(a+b+c) - 81b = m^2$ ta được $34h - 9b = k^2$.

Suy ra k^2 và 34h có cùng số dư khi chia cho 9 hay k^2 và 7h có cùng số dư khi chia cho 9.

Xét khi k chia cho 9 có số dư lần lượt là 0;1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 thì k^2 chia cho 9 có số dư lần lượt là 0;1; 4; 7 nên 7h có số dư khi chia cho 9 lần lượt là 0;1; 4; 7 , từ đó h chia cho 9 có số dư lần lượt là 1; 4; 7; 9 . Vì $1 \le h \le 9$ nên suy ra $h \in \{1; 4; 7; 9\}$. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với $h = 1$, khi đó ta được $a + b + c = 3$. Do $a + c \ge 2$ nên ta được $b \le 1$.

Từ đó ta tìm được $a = b = c = 1$ thỏa mãn. Do đó ta được $N = 111$.

- Trường hợp 2: Với $h = 4$, khi đó ta được $a + b + c = 12$.

Từ $34h - 9b = k^2$ ta được $k^2 = 136 - 9b$. Với $0 \le b \le 9$ ta được $k^2 \in \{64;100\}$.

Từ đó ta được $k = 8$ hoặc $k = 10$.

+ Với $k = 8$ thì ta được $8^2 = 136 - 9b \Rightarrow b = 8$ nên $a + c = 4$

+ Với $k = 10$ thì ta được $10^2 = 136 - 9b \Rightarrow b = 4$ nên $a + c = 4$

Từ đây ta được các số N là 183;381;282;147;741;246;642;345;543;444 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 3: Với $h = 7$, khi đó ta được $a + b + c = 21$.

Từ $34h - 9b = k^2$ ta được $k^2 = 238 - 9b$. Với $0 \le b \le 9$ ta không tìm được $k^2 \in \{64;100\}$.

- Trường hợp 4: Với $h = 9$, khi đó ta được $a + b + c = 27 \Rightarrow a = b = c = 9$.

Do đó $N = 999$.

Vậy các số có ba chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$N \in \{111;183; 381; 282;147; 741; 246; 642; 345; 543; 444; 999\}$

Ví dụ 10. Tìm số tự nhiên có 2n chữ số có dạng $\overline{a_1a_2a_3...a_{2n-1}a_{2n}}$ thỏa mãn đẳng thức sau:

$$\overline{a_1a_2a_3...a_{2n-1}a_{2n}} = a_1a_2 + a_3a_4 + ... + a_{2n-1}a_{2n} + 2006$$

Lời giải

Đặt $T = \overline{a_1a_2a_3...a_{2n-1}a_{2n}}$ và $P = a_1a_2 + a_3a_4 + ... + a_{2n-1}a_{2n} + 2006$.

Ta thấy $T > a_1.10^{2n-1} \ge 10^{2n-1}$ và $P \le 81n + 2006 < 100n + 2100 = 100(n + 21)$

Mà do $T = P$ nên ta suy ra được $10^{2n-1} < 100(n + 21)$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được $10^{2n-1} < 100(n + 21)$ không đúng với $n \ge 3$. Từ đó suy ra $n \le 2$, khi đó ta được $\overline{a_1a_2a_3a_4} = a_1a_2 + a_3a_4 + 2006$.

Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $a_1 = 1$, khi đó $\overline{a_1a_2a_3a_4} < 2000$ và $\overline{a_1a_2} + \overline{a_3a_4} + 2006 > 2000$, điều này dẫn đến mâu thuẩn.
- Nếu $a_1 = 3$, khi đó $\overline{a_1a_2a_3a_4} > 3000$ và $\overline{a_1a_2} + \overline{a_3a_4} + 2006 < 3000$, điều này dẫn đến mâu thuẫn.
- Nếu $a_1 = 2$, khi đó từ $\overline{a_1a_2a_3a_4} = \overline{a_1a_2} + \overline{a_3a_4} + 2006$ ta được $\overline{a_2a_3a_4} = \overline{2a_2} + \overline{a_3a_4} + 6$.

Hay ta được $98a_2 + a_3(10 - a_4) + a_4 = 6$, nên ta được $a_2 = 0$.

Lúc này ta được $a_3(10 - a_4) + a_4 = 6$. Nếu $a_3 \ge 1$ thì $a_3(10 - a_4) + a_4 > 10$, mâu thuẫn.

Từ đó ta được $a_3 = 0$ và $a_4 = 6$.

Vậy số cần tìm là 2006.

Ví dụ 11. Tìm các chữ số a, b, c, d thỏa mãn $\overline{aa...abb...bcc...c} + 1 = \left(\overline{dd...d} + 1\right)^3$, biết rằng số lần xuất hiện của a, b, c, d trong các biểu thức trên là như nhau.

Lời giải

Gọi số lần xuất hiện của các chữ số a, b, c, d trong đẳng thức trên là n. Khi đó ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $n = 1$, khi đó đẳng thức trên trở thành $\overline{abc} + 1 = (d+1)^3$.

Vì $101 \le (d+1)^3 \le 1000$ nên ta suy ra được $4 \le d \le 9$. Khi đó ta cho d nhận các giá trị 4; 5; 6; 7; 8; 9 thì ta được các số $\overline{abc}$ tương ứng bởi bảng sau

d	4	5	6	7	8	9
$\overline{abc} + 1$	125	216	343	512	729	1000
$\overline{abc}$	124	215	342	511	728	999

- Trường hợp 2: Nếu $n = 2$, khi đó đẳng thức trên trở thành $\overline{aabbcc} + 1 = \left(\overline{dd} + 1\right)^3$

Vì $100001 \le \left(\overline{dd} + 1\right)^3 \le 1000000$ nên ta suy ra được $5 \le d \le 9$. Khi đó ta cho d nhận các giá trị 5; 6; 7; 8; 9 thì ta thấy chỉ có $d = 9$ thỏa mãn. Từ đó ta được $a = b = c = 9$.

- Trường hợp 3: Nếu $n \ge 3$, khi đó ta đặt $x = \underbrace{111...1}_{n} \Rightarrow 9x + 1 = 10^n$. Từ đó ta được

$$\overline{aa...abb...bcc...c} + 1 = a.x.10^{2n} + b.x.10^{n} + c.x + 1 = d^3x^3 + 3d^2x^2 + 3dx + 1$$

$$\Leftrightarrow ax(9x+1)^2 + bx(9x+1) + cx = d^3x^3 + 3d^2x^2 + 3dx$$

$$\Leftrightarrow \left[81ax^2 + (18a+9b)x\right] - (d^3x^2 + 3d^2x) = 3d - (a+b+c)$$

Từ đó suy ra $3d - (a+b+c) \vdots x$.

Mà ta lại có $x \ge 111$ và $3d - (a+b+c) \le 26$. Từ đó ta được $3d - (a+b+c) = 0$.

Lập luận tương tự ta được $3d^2 - (18a + 9b) = 0$ và $d^3 - 81a = 0$.

Từ đó ta được $d^3 \vdots 81 \Rightarrow d = 9$. Đến đây ta suy ra được $a = b = c = 9$.

Vậy các bộ số (a, b, c, d) thỏa mãn yêu cầu bài là

$(1,2,4,4);(2,1,5,5);(3,4,2,6);(5,1,1,7);(7,2,8,8)$ khi mỗi chữ số a, b, c, d xuất hiện một lần và $(9,9,9,9)$ với mỗi chữ số a, b, c, d xuất hiện n nguyên dương lần.

Ví dụ 12. Tìm số tự nhiên có năm chữ số, biết rằng nếu nhân số đó với 2 thì được một số có 6 chữ số đôi một khác nhau và khác chữ số 0, nếu đem nhân số đó với 5, 6, 7, 8, 11 thì cũng được số có sáu chữ số được viết bởi các chữ số như số nhận được khi nhân nó với 2 nhưng viết theo một thứ tự khác.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $N = \overline{abcde}$ với a, b,c,d,e là các chữ số và $2N = \overline{mpqrst}$ với các chữ số m, p, q, r s, t là các chữ số khác nhau từng đôi một và khác 0.

Do đem nhân N với 5, 6, 7, 8, 11 thì cũng được số có sáu chữ số được viết bởi các chữ số như số 2N nhưng viết theo một thứ tự khác. Do đó các chữ số của 5N; 6N; 7N; 8N;11N khác nhau từng đôi một và khác 0.

Ta có $2N \le 2.99999 = 199998$ nên suy ra $m = 1$. Ta xét các chữ số của N như sau:

+ Xét chữ số e ta được

- Nếu e là chữ số chẵn thì tận cùng của 5N là 0, điều này trái với giả thiết các các chữ số của 5N khác 0.
- Nếu $e = 5$ thì chữ số tận cùng 2N là 0, điều này trái với giả thiết các các chữ số của 2N khác 0.
- Nếu $e = 1$ thì các chữ số của $2N; 5N; 6N; 7N; 8N; 11N$ lần lượt là 2; 5; 6; 7; 8; 1.

Khi đó các số 2N; 5N; 6N; 7N; 8N;11N đều được viết bởi các chữ số 2; 5; 6; 7; 8; 1 nhưng viết theo thứ tự khác nhau. Dễ thấy 6N chia hết cho 3 nhưng tổng các chữ số của 6N là $2+5+6+7+8+1=29$ không chia hết cho 3, điều này mâu thuẫn.

- Nếu $e=7$ thì các chữ số của $2N;5N;6N;7N;8N;11N$ lần lượt là 4; 5; 2; 9; 6; 7.

Khi đó các số 2N; 5N; 6N; 7N; 8N;11N đều được viết bởi các chữ số 4; 5; 2; 9; 6; 7, tuy nhiên trong các chữ số đó không có chữ số 1. Do đó trường hợp này loại.

- Nếu $e=9$ thì các chữ số của $2N;5N;6N;7N;8N;11N$ lần lượt là 8; 5; 2; 3; 2; 9.

Khi đó các số 2N; 5N; 6N; 7N; 8N;11N đều được viết bởi các chữ 8; 5; 2; 3; 2; 9, tuy nhiên trong các chữ số đó không có chữ số 1. Do đó trường hợp này loại.

Như vậy ta được $e=3$, khi đó các chữ số của 2N; 5N; 6N; 7N; 8N;11N lần lượt là 6; 5; 8; 1; 4; 3. Từ đó ta suy ra được $t=6$.

+ Xét chứ số p ta được

Do $2N<5N<6N<7N<8N<11N$ nên các chữ số đầu tiên của 2N; 5N; 6N; 7N; 8N;11N lần lượt là 1; 3; 4; 5; 6; 8. Từ đó suy ra $8N>610000$ nên $2N>152500$. Lại có $11N<870000$ nên $2N<159000$

Như vậy ta được $152500<2N<159000$ nên suy ra $p=5$.

+ Xét chữ số s ta được

- Nếu $s=3$ thì $2N=\overline{15qr36}$, khi đó $6N=3.2N$ có tận cùng là $\overline{08}$, điều này trái với giả thiết các chữ số khác 0.

- Nếu $s=8$ thì $2N=\overline{15qr86}$, khi đó $8N=4.2N$ có tận cùng là $\overline{44}$, điều này trái với giả thiết các chữ số khác nhau từng đôi một.

Do vậy ta được $s=4$.

+ Xét chứ số q và r ta được

- Nếu $q=8;r=3$ thì $2N=\overline{158346}$, khi đó $8N=4.2N=633384$, điều này trái với giả thiết các chữ số khác nhau từng đôi một.

Do vậy ta được $q=3;\ r=8$ và $2N=153846$.

Từ đó ta suy ra số phải tìm là $N=76923$. Thử lại ta thấy thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 13. Tìm tất cả các số có ba chữ số chia hết cho 11 sao cho thương số của phép chia số đó cho 11 bằng tổng bình phương của các chữ số của số đó.

Lời giải

Gọi số có ba chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $A = \overline{abc}$ với

$a \in \{1; 2;...9\}; b,c \in \{0;1; 2;...9\}$.

Do A chia hết cho 11 nên ta được $a - b + c$ chia hết cho 11.

Kết hợp với $a \in \{1; 2;...9\}; b,c \in \{0;1; 2;...9\}$ ta suy ra được $a - b + c = 0$ hoặc $a - b + c = 11$

- Với $a - b + c = 0$, khi đó ta được $b = a + c$.

Ta có $A = 100a + 10b+c = 99a + 10b+a +c = 99a + 11b$.

Khi A chia 11 thì thương số của phép chia bằng tổng bình phương các chữ số của A nên ta được

$$\frac{A}{11} = a^2 + b^2 + c^2 \text{ hay ta được } 9a + b = a^2 + b^2 + c^2$$

Kết hợp với $b = a + c$ ta được $9a + (a + c) = a^2 + (a + c)^2 + c^2 \Leftrightarrow 10a + c = 2a^2 + 2ac + 2c^2$.

Do $a \ge 1$ nên ta được $10a + c \ge 2a^2 + 2c + 2c^2 \Rightarrow 2c^2 + c \le 10a - 2a^2 \le \frac{25}{2}$

Do đó suy ra $2c^2 + c \le 12 \Rightarrow c \le 2$

Cũng từ $10a + c = 2a^2 + 2ac + 2c^2$ ta suy ra được c là số chẵn. Từ đó ta được $c = 0$ hoặc $c = 2$

.

+ Với $c = 0$, khi đó ta được $a = b$ nên số cần tìm có dạng $A = \overline{aa0}$.

Do đó $\frac{A}{11} = 50 = 2a^2 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow a = b = 5$. Từ đó ta tìm được $A = 550$.

+ Với $c = 2$, khi đó ta được từ $10a + c = 2a^2 + 2ac + 2c^2$ ta được $10a + 2 = 2a^2 + 4ac + 8$

Hay ta được $a^2 - 3a + 3 = 0$. Nhận thấy phương trình trên không có nghiệm nguyên dương nên không tồn tại số A thỏa mãn bài toán.

- Với $a - b + c = 11$, khi đó ta được $b + 11 = a + c$.

Do a, b, c là các chữ số nên $b + 11 = a + c$ ta suy ra được $a \ge 2$
từ

Ta có $A = 100a + 10b+c = 99a + 10b+a +c = 99a + 11b+ 11$.

+ Xét $a = 2$, khi đó $c = 9; b = 0$. Ta được $A = 209$ không thỏa mãn bài toán.

+ Xét $a = 3$, khi đó ta được $c = 8; b = 0$ hoặc $c = 9; b = 1$. Ta được $A = 308$ hoặc $A = 319$ không thỏa

+ Xét $a \geq 4$. Khi đó A chia 11 thì thương số của phép chia bằng tổng bình phương các chữ số của A nên ta được

$$\frac{A}{11} = a^2 + b^2 + c^2 \text{ hay ta được } 9a + b + 1 = a^2 + b^2 + c^2$$

Kết hợp với $b = a + c - 11$ ta được

$$9a + (a + c - 11) + 1 = a^2 + (a + c - 11)^2 + c^2 \Leftrightarrow 10a + c - 10 = 2a^2 + 2ac + 2c^2 - 22(a + c) + 121$$

Thu gọn ta được $32a + 23c - 131 = 2a^2 + 2ac + 2c^2$. Do $a \geq 4$ nên ta được

$$32a + 23c - 131 \geq 2a^2 + 8c + 2c^2 \Rightarrow 2c^2 - 15c \leq 32a - 2a^2 - 131 \leq -5$$

Do đó suy ra $2c^2 - 15c \leq -5 \Rightarrow c \leq 7$. Từ $32a + 23c - 131 = 2a^2 + 2ac + 2c^2$ ta suy ra được c là số lẻ.

Do đó ta được $c = 1; 3; 5; 7$. Đến đây xét các trường hợp của c thì được $b = 0; a = 8$ thỏa mãn. Do đó số cần tìm là $A = 803$.

Vậy các số thỏa mãn 550 và 803.

Ví dụ 14. Tìm các chữ số a, b, c, d, e thỏa mãn điều kiện $\overline{ab} + \overline{cde} = \sqrt{\overline{abcde}}$.

Lời giải

Đặt $x = \overline{ab}$ và $y = \overline{cde}$ với $a, b \in N$ và $10 \leq a \leq 99; 100 \leq b \leq 999$.

Theo bài ra ta có $x + y = \sqrt{1000x + y}$ hay ta được $(x + y)^2 = 100x + y$.

Từ đó ta được $(x + y)^2 - 1000(x + y) - 999y = 0$.

Đặt $t = x + y$ thì $t \in N$ và $110 \leq t \leq 1089$.

Từ đó ta được $t^2 - 1000t + 999y = 0$.

Phương trình bậc hai ẩn t phải có nghiệm nên $\Delta' = 250000 - 999y \geq 0$, do đó $y \leq 250$.

Gọi t_1 và t_2 là hai nghiệm của phương trình trên.

Khi đó theo định lí Vi – te ta được $\begin{cases} t_1 + t_1 = 1000 \\ t_1t_2 = 999y \end{cases}$

Từ hệ thức trên ta suy ra được $t_1 > 0; t_2 > 0$ và nếu $t_1 \in N$ thì $t_2 \in N$.

Như vậy từ $t_1t_2 = 999y$ ta được $t_1t_2 \vdots 3$, đồng thời ta lại có $t_1 + t_2$ chia 3 dư 1. Như vậy trong hai số tự nhiên t_1 và t_2 thì có một số chia hết cho 3, còn một số không chia hết cho 3.

Giả sử t_1 chia hết cho 3 và t_2 không chia hết cho 3. Ta có $999 = 27.37$ và $(27, 37) = 1$.

Từ đó ta được t_1 chia hết cho 27 và t_2 không chia hết cho 3.

Nếu $t_1 \vdots 37$, khi đó ta được $t_1 \vdots 999$, do đó $t_1 = 999; t_2 = 1$. Khi đó thay vào hệ thức Vi – et trên ta được $b = 1$, điều này vô lí. Do đó $t_1 \vdots 27$ và t_1 không chia hết cho 37.

Từ đó ta có $\begin{cases} t_1 = 27m \\ t_2 = 37n \end{cases}$, $m; n \in N^*$.

Như vậy ta được $27m + 37n = 1000$ hay $n = 999 - 27m - 36n + 1$.

Do đó n chia 9 có số dư là 1. Đặt $n = 9k + 1$ với k là số nguyên dương.

Đến đây ta được $27m + 37(9k + 1) = 1000$ hay $273k = 1000 - 27m - 37 \leq 936$.

Từ đó dẫn đến $k \leq 3$. Mặt khác cũng từ $273k = 1000 - 27m - 37$ ta được k chia 3 dư 3.

Do đó suy ra $k = 2$, suy ra $n = 19; 27m = 297$ nên $37n = 703$.

Vậy ta được $t_1 = 297; t_2 = 703$, dẫn đến $y = 209.4$

+ Nếu $x + y = 297$ thì ta được $x = 88$

+ Nếu $x + y = 703$ thì ta được $x = 494$, trường hợp này loại.

Vậy các chữ số cần tìm là $a = b = 8; c = 2; d = 0; e = 9$

Ví dụ 15. Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng số đó bằng tổng bình phương của số tạo bởi hai chữ số đầu với số tạo bởi hai chữ số sau và hai chữ số cuối cùng bằng nhau.

Lời giải

Giả sử số tự nhiên có bốn chữ số cần tìm có dạng $\overline{abcc}$ với $a, b, c \in N$ và $1 \leq a \leq 9; 0 \leq b, c \leq 9$.

Theo bài ra ta có $\overline{abcc} = \overline{ab}^2 + \overline{cc}^2$. Đặt $x = \overline{ac}; y = \overline{cc} (x, y \in N)$.

Suy ra $10 \leq x \leq 99; 0 \leq y \leq 99$.

Theo bài ra ta có $\overline{abcc} = \overline{ab}^2 + \overline{cc}^2 \Leftrightarrow 100\overline{ab} + \overline{cc} = \overline{ab}^2 + \overline{cc}^2 \Leftrightarrow 100x + y = x^2 + y^2$

Ta viết lại phương trình trênvề dạng phương trình bậc hai ẩn x là $x^2 - 100x + (y^2 - y) = 0$

Khi đó ta có $\Delta' = 2500 - (y^2 - y)$. Để phương trình có nghiệm thì $\Delta' = 2500 - (y^2 - y) \ge 0$

Khi đó ta được $y(y-1) \le 2500$ nên $(y-1)^2 \le y(y-1) \le 2500 \Rightarrow y - 1 \le 50 \Rightarrow y \le 51$.

Do y là số có hai chữ số giống nhau nên ta được $y \in \{11; 22; 33; 44\}$. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $y = 11$, khi đó ta thấy $\Delta' = 2390$ không phải là số chính phương nên ta không tìm được x nguyên.
- Nếu $y = 22$, khi đó ta thấy $\Delta' = 2038$ không phải là số chính phương nên ta không tìm được x nguyên.
- Nếu $y = 33$, khi đó ta thấy $\Delta' = 1444 = 38^2$ là số chính phương.

Khi đó thay vào phương trình $x^2 - 100x + (y^2 - y) = 0$ ta được $x^2 - 100x + 1056 = 0$

Giải phương trình trên ta đươc $x = 12$ và $x = 88$.

Thử lại ta thấy $1233 = 12^2 + 33^2$ và $8833 = 88^2 + 33^2$ đều đúng.

- Nếu $y = 44$, khi đó ta thấy $\Delta' = 608$ không phải là số chính phương nên ta không tìm được x nguyên.

Vậy các số tự nhiên cần tìm là 1233 và 8833.

Ví dụ 16. Tìm các chữ số a, b, c với $a \ge 1$ sao cho $\sqrt{\overline{abc}} = (a + b)\sqrt{c}$

Lời giải

Từ $\sqrt{\overline{abc}} = (a+b)\sqrt{c}$ ta được $\overline{abc} = (a+b)^2 c$.

Từ đó suy ra $100a + 10b + c = (a+b)^2 c \Leftrightarrow 10(10a+b) = c\left[(a+b)^2 - 1\right]$

Do $a \ge 1$ nên $10(10a+b) \ge 100$ do đó $c\left[(a+b)^2 - 1\right] \ge 100$

Do đó ta được $c \ge 1$ và $a + b \ge 4$.

Nếu $a + b$ không chia hết cho 3 thì ta có $(a+b)^2$ chia 3 dư 1. Do đó ta suy ra được $10a + b$ chia hết cho 3 hay $a + b$ chia hết cho 3, điều này vô lí.

Như vậy $a + b$ chia hết cho 3 nên $10a + b$ chia hết cho 3.

Như vậy từ $10(10a+b)=c\left[(a+b)^2-1\right]$ ta suy ra được c chia hết cho 3. Do c là chữ số nên suy ra c không chia hết cho 5. Do đó ta lại suy ra được $(a+b)^2-1$ chia hết cho 5.

Mà ta có $(a+b-1)(a+b+1)$ và 5 là số nguyên tố nên a + b – 1 hoặc a + b + 1 chia hết cho 5.

Kết hợp với a + b chia hết cho 3 ta được a + b = 6 hoặc a + b = 9 .

- Trường hợp 1: Với $a+b=6$, thay vào hệ thức $10(10a+b)=c\left[(a+b)^2-1\right]$ ta được

$$10(9a+6)=24c \Leftrightarrow 5(3a+2)=4c$$

Từ đó ta suy ra được c chia hết cho 5, điều này trái với c không chia hết cho 5. Nên trường hợp này không tồn tại các chữ số a, b, c thỏa mãn.

- Trường hợp 1: Với $a+b=9$, thay vào hệ thức $10(10a+b)=c\left[(a+b)^2-1\right]$ ta được

$$10(9a+9)=80c \Leftrightarrow 9(a+1)=8c$$

Từ đó suy ra c chia hết cho 9, nên ta được $c=9$, do đó $a+1=8 \Rightarrow a=7 \Rightarrow b=2$.

Vậy các chữ số cần tìm là $a=7; b=2; c=9$.

Ví dụ 17. Tìm các số $\overline{abcd}$ thỏa mãn $\overline{abcd}=\left(\overline{ab}+\overline{cd}\right)^2$.

Lời giải

Ta có $\overline{abcd}=\left(\overline{ab}+\overline{cd}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{ab}.100+\overline{cd}=\left(\overline{ab}+\overline{ca}\right)^2$. Đặt $x=\overline{ab}; y=\overline{cd}$.

Ta có $1000\le\overline{abcd}\le 9999$ nên suy ra $32\le\overline{ab}+\overline{cd}\le 99$ hay $32\le x+y\le 99$

Khi đó ta được

$$100x+y=(x+y)^2 \Leftrightarrow 99x=(x+y)^2-(x+y) \Leftrightarrow 99x=(x+y)(x+y-1)$$

Từ đó suy ra $(x+y)(x+y-1)$ chia hết cho 99. Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Trong hai thừa số $(x+y)$ và $(x+y-1)$ có một thừa số chia hết cho 99.

Do $32\le x+y\le 99$ nên $31\le x+y-1\le 98$, do đó $x+y \vdots 99$ và $x+y=99$

Tờ đó ta được $\overline{abcd}=99^2=9801=(98+1)^2$, thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 2: Cả hai thừa số $(x+y)$ và $(x+y-1)$ không có thừa số nào hết cho 99.

Chú ý rằng $(x+y)$ và $(x+y-1)$ nguyên tố cùng nhau và $(9,11)$ nguyên tố cùng nhau.

Do đó $(x+y)$ và $(x+y-1)$ chia hết cho 9 hoặc cho 11. Do đó ta có bảng sau:

+ Trường hợp 1: $\begin{cases} x+y \vdots 11 \\ x+y-1 \vdots 9 \end{cases}$

$x+y$	33	44	55	66	77	88
$x+y-1$	32	43	54	65	76	87
			Đúng			

Với $x+y=55$, khi đó $\overline{abcd}=55^2=3025=(30+25)^2$ thỏa mãn.

+ Trường hợp 2: $\begin{cases} x+y \vdots 9 \\ x+y-1 \vdots 11 \end{cases}$

$x+y$	34	45	56	67	78	89
$x+y-1$	33	44	55	66	77	88
		Đúng				

Với $x+y=45$, khi đó $\overline{abcd}=45^2=2025=(20+25)^2$ thỏa mãn.

Vậy các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là 2025; 3025, 9801.

Ví dụ 18. Tìm hai số chính phương phân biệt $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ và $\overline{b_1b_2b_3b_4}$ thỏa mãn điều kiện:

$$a_1-b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=a_4-b_4$$

Lời giải

Đặt $\overline{a_1a_2a_3a_4}=a^2$ và $\overline{b_1b_2b_3b_4}=b^2$ với a, b là các số tự nhiên.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $\overline{a_1a_2a_3a_4}>\overline{b_1b_2b_3b_4}$ nên ta được $a>b$.

Do a^2 và b^2 là các số chính phương có bốn chữ số nên $1000\le a^2$; $b^2\le 9999$

Từ đó ta được $32\le b<a<100$.

Đặt $a_1-b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=a_4-b_4=c>0, c\in N$. Khi đó ta có

$$\overline{a_1a_2a_3a_4}-\overline{b_1b_2b_3b_4}=1000(a_1-b_1)+100(a_2-b_2)+10(a_3-b_3)+(a_4-b_4)=1111c$$

Mà ta lại có $\overline{a_1a_2a_3a_4}-\overline{b_1b_2b_3b_4}=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Từ đó ta được $(a-b)(a+b)=1111c=11.101c$.

Do 11 và 101 là các số nguyên tố, lại có $a+b<200$; $a-b<100$. Khi đó ta có

$$\begin{cases}a+b=101\\ a-b=11c\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}a+b=101c\\ a-b=11\end{cases}$$

- Trường hợp 1: Với $\begin{cases}a+b=101\\ a-b=11c\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a=101+11c\\ 2b=101-11c\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\dfrac{101+11c}{2}\\ b=\dfrac{101-11c}{2}\end{cases}$

Do $b \ge 32$ nên từ $b=101-11c$ suy ra $c \le 3$ và chú ý rằng $a+b=101$ là số lẻ nên ta suy ra được c là số lẻ. Từ đó ta có $c=1$ hoặc $c=3$.

+ Với $c=1$ ta được $\begin{cases}a=\dfrac{101+11}{2}=56\\ b=\dfrac{101-11}{2}=45\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overline{a_1a_2a_3a_4}=3135\\ \overline{b_1b_2b_3b_4}=2025\end{cases}$

+ Với $c=3$ ta được $\begin{cases}a=\dfrac{101+11}{2}=67\\ b=\dfrac{101-11}{2}=34\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overline{a_1a_2a_3a_4}=4489\\ \overline{b_1b_2b_3b_4}=1156\end{cases}$

- Trường hợp 2: Với $\begin{cases}a+b=101c\\ a-b=11\end{cases}$, khi đó do $a+b<200;\ a-b<100$ nên ta được $c=1$

Suy ra $\begin{cases}a+b=101\\ a-b=11\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\dfrac{101+11}{2}=56\\ b=\dfrac{101-11}{2}=45\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overline{a_1a_2a_3a_4}=3135\\ \overline{b_1b_2b_3b_4}=2025\end{cases}$

Vậy các cặp số chính phương cần tìm là 3136 và 2025; 4489 và 1156.

Ví dụ 19. Tìm số tự nhiên $\overline{abc}$ thoả mãn điều kiện $\overline{abc}=(a+b)^2\,4c$.

Lời giải

Từ giả thiết bài toán ta có:

$$100a+10b+c=4c(a+b)^2 \Leftrightarrow c=\frac{100a+10b}{4(a+b)^2-1}=\frac{10(10a+b)}{4(a+b)^2-1}=\frac{10\left[(a+b)+9a\right]}{4(a+b)^2-1}$$

Ta có $4(a+b)^2-1$ là số lẻ và do $0<c\le 9$ nên $4(a+b)^2-1 \vdots 5$.

Mà $4(a+b)^2$ là số chẵn nên $4(a+b)^2$ phải có tận cùng là 6 suy ra $(a+b)^2$ phải có tận cùng là 4 hoặc 9. (*)

Mặt khác $c=\dfrac{2.5\overline{ab}}{4(a+b)^2-1}$ và $4(a+b)^2-1$ là số lẻ

$\Rightarrow 4(a+b)^2-1<500 \Leftrightarrow (a+b)^2<125,25$ (**)

Kết hợp (*) và (**) ta có $(a+b)^2 \in \{4;\ 9;\ 49;\ 64\} \Rightarrow a+b \in \{2;\ 3;\ 7;\ 8\}$

+ Nếu $a+b \in \{2; 7; 8\}$ thì a + b có dạng $3k \pm 1 (k \in N)$ khi đó $4(a+b)^2 - 1$ chia hết cho 3 mà $(a+b)+9a = 3k \pm 1 + 9a$ không chia hết cho $3 \Rightarrow 10\left[(a+b)+9a\right]$ không chia hết cho 3 nên c không thuộc tập hợp N.

+ Nếu $a+b=3$ ta có $c = \dfrac{10(3+9a)}{35} = \dfrac{6(1+3a)}{7}$. Vì $0 < a < 4$ và $1+3a \,\vdots\, 7$ suy ra $a = 2$, khi đó $c = 6; b = 1$. Ta có số 216 thoả mãn.

Vậy số 216 là số cần tìm.

Ví dụ 20. Cho số có bốn chữ số 2012. Ta tách số 2012 thành hai số theo ba cách là $2|012;\ 20|12;\ 201|2$. Nếu ta đem nhân hai số trong mỗi cánh tách rồi cộng ba tích lại thì được $2.012 + 20.12 + 201.2 = 666$. Hãy tìm tất cả các số có bốn chữ số sao cho khi ta làm theo cánh như trên với số đó thì cũng được kết quả là 666.

Lời giải

Gọi số có bốn chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\overline{abcd}$ với a, b, c, d là các chữ số và a khác 0.

Khi đó ta thực hiện các cách tách số $\overline{abcd}$ thành hai số là $a|\overline{bcd};\ \overline{ab}|\overline{cd};\ \overline{abc}|d$. Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned} & a.\overline{bcd} + \overline{ab}.\overline{cd} + \overline{abc}.d = 666 \\ \Leftrightarrow\ & a(100b + 10c + d) + (10a + b)(10c + d) + d(100a + 10b + c) = 666 \\ \Leftrightarrow\ & 100ab + 110ac + 111ad + 10bc + 11bd + cd = 666 \end{aligned}$$

Do đó ta được d khác 0 và $ad \le 6$. Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $ad = 6$, khi đó $111ad = 666$.

Mà ta lại có $100ab + 110ac + 111ad + 10bc + 11bd + cd = 666$, suy ra $ab = ac = bc = bd = cd = 0$.

Từ đó ta được $b = c = 0$ nên ta có các số thỏa mãn là 1006; 2003; 3002; 6001.

- Trường hợp 2: Nếu $ad = 5$, khi đó $111ad = 555$ và $a = 1; d = 5$ hoặc $a = 5; d = 1$.

Khi đó từ $100ab+110ac+111ad+10bc+11bd+cd = 666$ ta được $\left[\begin{array}{l} 511b + 551c + 10bc = 111 \\ 155b + 115c + 10bc = 111 \end{array}\right.$.

Ta thấy không có chữ số b, c thỏa mãn một trong hai đẳng thức trên. Do đó trường hợp này không có số nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.