Chuyên đề 7 : Bất đẳng thức

1.Kiến thức vận dụng

*** Kỹ thuật làm trội : Nếu $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$ thì $n a_1 < a_1 + a_2 + \ldots + a_n < na_n$**

$$\Leftrightarrow \frac{1}{na_n} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{na_1}$$

*** $a(a-1) < a^2 < a(a+1)$** $\Leftrightarrow \frac{1}{a(a+1)} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a(a-1)}$

*** $a^2 + 2.ab + b^2 = (a+b)^2 \geq 0$, * $a^2 - 2.ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0$ với mọi a,b**

2.Bài tập vận dụng

Bài 1: Cho a, b, c > 0 . Chứng tỏ rằng: $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ không là số nguyên.

HD : Ta có $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{c+a+b} + \frac{c}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$

$\Rightarrow M > 1$

Mặt khác $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = \frac{(a+b)-b}{a+b} + \frac{(b+c)-c}{b+c} + \frac{(c+a)-a}{c+a}$

$3 - (\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a})$ = 3 – N Do N >1 nên M < 2

Vậy 1 < M < 2 nên M không là số nguyên

Bài 2 Chứng minh rằng : $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (1) , $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ (2) với a, b, c ≥ 0

HD : $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ (*)

Do (*) đúng với mọi a,b nên (1) đúng

Bài 3 : Với a, b, c là các số dương . Chứng minh rằng

a) $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4$ (1) b) $(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$ (2)

HD : a) Cách 1 : Từ $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4 \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ (*)

Do (*) đúng suy ra (1) đúng

Cách 2: Ta có $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$ $\Rightarrow (a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 2\sqrt{ab}.\frac{2}{\sqrt{ab}} = 4$

Dấu “ =” xẩy ra khi a = b

b) Ta có : $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=3+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}=3+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})$

Lại có $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2; \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2; \frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2$

Suy ra $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \geq 3+2+2+2=9$ Dấu “ = ” xẩy ra khi a = b = c

Bài 4 : a) Cho z, y, z là các số dương.

Chứng minh rằng: $\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{2y+z+x}+\frac{z}{2z+x+y}\leq \frac{3}{4}$

b) Cho a, b, c thoả mãn: a + b + c = 0. Chứng minh rằng: $ab+bc+ca\leq 0$.

HD : b) Tính (a + b + c)^2 từ cm được $ab+bc+ca\leq 0$