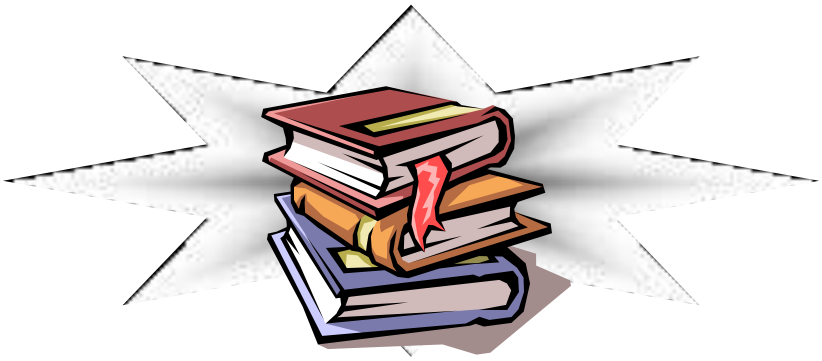
Nguyễn Công Lợi



CHUYÊN ĐỀ CÁC BÀI TOÁN QUỸ TÍCH – TẬP HỢP ĐIỂM

Thanh Hóa, tháng 10 năm 2019

CHUYÊN ĐỀ CÁC BÀI TOÁN QUỸ TÍCH –TẬP HỢP ĐIỂM

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm đáp ứng nhu cầu về của giáo viên toán THCS và học sinh về các chuyên đề toán bất đẳng thức và cực trị hình học. Chúng tôi đã kham khảo qua nhiều tài liệu để viết chuyên đề về này nhằm đáp ứng nhu cầu về tài liệu hay và cập nhật được các dạng toán mới về bất đẳng thức và cực trị hình học thường được ra trong các kì thi gần đây. Chuyên đề gồm 4 phần:

- *Hệ thông kiến thức cần nhớ*
- *Các thí dụ minh họa*
- *Bài tập tự luyện*
- *Hướng dẫn giải*

Các vị phụ huynh và các thầy cô dạy toán có thể dùng có thể dùng chuyên đề này để giúp con em mình học tập. Hy vọng chuyên đề bất đẳng thức và cực trị hình học này có thể giúp ích nhiều cho học sinh phát huy nội lực giải toán nói riêng và học toán nói chung.

Mặc dù đã có sự đầu tư lớn về thời gian, trí tuệ song không thể tránh khỏi những hạn chế, sai sót. Mong được sự góp ý của các thầy, cô giáo và các em học!

Chúc các thầy, cô giáo và các em học sinh thu được kết quả cao nhất từ chuyên đề này!

BÀI TOÁN VỀ QUỸ TÍCH – TẬP HỢP ĐIỂM

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa tập hợp điểm (quỹ tích)

Một hình H được gọi là tập hợp điểm của những điểm M thoả mãn tính chất T khi nó chứa và chỉ chứa tính chất T

2. Phương pháp chủ yếu giải bài toán tập hợp điểm

Để tìm tập hợp các điểm M thoả mãn tính chất T ta làm như sau:

Bước 1: Tìm cách giải.

- Xác định các yếu tố cố định và không đổi

- Xác định các điều kiện của điểm M

- Dự đoán tập hợp điểm

Bước 2: Trình bày lời giải

- ***Phần thuận:*** *Chứng minh điểm M có tính chất T thuộc hình H*
- ***Giới hạn:****Căn cứ vào các vị trí đặc biệt của điểm M, chứng tỏ điểm M chỉ thuộc vào hình H, hoặc một phần B của hình H(nếu được)*
- ***Phần đảo:*** *Chứng minh mọi điểm thuộc hình H (quỹ tích đã được giới hạn) có tính chất T. Thường làm như sau:*

+ Lấy điểm M thuộc hình H (quỹ tích đã được giới hạn), giả sử tính chất T gồm n điều kiện.

+ Dựng một hình để chứng minh M có tính chất T sao cho M thoả mãn $n-1$ *điều kiện trong tính chất T và chứng minh M có thoả mãn điều kiện còn lại.*

- ***Kết luận:****Tập hợp điểm M là hình H. Nêu rõ hình dạng và cách xác định hình H.*

Chú ý:

- Việc tìm ra mối liên hệ giữa các yếu tố cố định, không đổi với yếu tố chuyển động là khâu chủ yếu giúp ta giải quyết bài toán tập hợp điểm.

- Nếu bài toán chỉ hỏi " Điểm M chuyển động trên đường nào? " thì ta chỉ trình bày phần thuận, phàn giới hạn và phàn kết luận mà không cần không chứng minh phần đảo.

- Giải bài toán tập hợp điểm thường là tìm cách đưa về tập hợp điểm cơ bản đã học

- Để khỏi vẽ hình lại khi chứng minh phần đảo tên các điểm trong phần đảo nên giữ nguyên như phần thuận.

3. Một số tập hợp điểm cơ bản

a) Tập hợp điểm là đường trung trực hoặc một phần đường trung trực

Định lí: *Tập hợp các điểm M cách đều hai điểm phân biệt A, B cố định là đường trung trực d của đoạn thẳng AB*

b) Tập hợp điểm là tia phân giác

Định lí: *Tập hợp các điểm nằm trong góc xOy(khác góc bẹt) và cách đều hai cạnhcủa góc là tia phân giác của góc đó.*

Hệ quả: *Tập hợp các điểm M cách đều hai đường thẳngcắt nhau xOx' và yOy' là bốn tia phân giác của bốn góc tạo thành, bốn tia này tạo thành hai đường thẳng vuông góc với nhau tại giao điểm O của hai đường thẳng đó.*

c) Tập hợp điểm là đường thẳng song song

Định lý 1: *Tập hợp các điểm M cách đường thẳng h cho trước một khoảng bằng a không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đã cho và cách đường thẳng đó bằng a.*

Định lí 2: *Tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng song song cho trước là một đường thẳng song song và nằm cách đều hai đường thẳng đã cho.*

d) Tập hợp điểm là đường tròn, một phần của đường tròn, cung chứa góc.

+ Tập hợp các điểm M cách điểm O cho trước một khoảng không đổi r là đường tròn tâm O bán kính r.

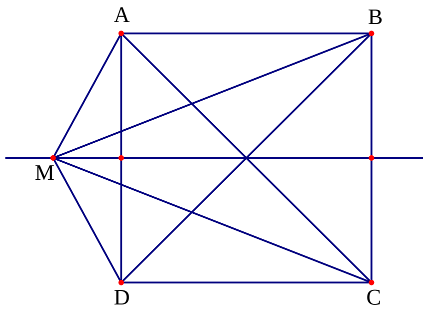
+ Tập hợp các điểm nhìn đoạn thẳng cố định AB dưới góc 90^0 là đường tròn đường kính AB.

+ Tập hợp các điểm M tạo thành với hai mút của đoạn thẳng AB cho trước một góc AMB *có số đo không đổi là* $\alpha\left(0^0<\alpha<180^0\right)$ *là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB.*

II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình vuông ABCD. Tìm tập hợp điểm M trong mặt phẳng sao cho $MA+MB=MC+MD$

Lời giải



- Phần thuận: Dựng đường thẳng d đi qua tâm O của hình vuông và d song song với AB, DC.

Khi đó d là đường trung trực của AD và của BC.

Ta thấy với mọi điểm M không thuộc đường thẳng d thì ta có $MA+MB\neq MC+MD$

+ $MA+MB>MC+MD$ khi điểm M nằm khác phía với điểm A so với đường thẳng d ;

+ $MA+MB<MC+MD$ khi điểm M nằm cùng phía với điểm A so với đường thẳng d.

Vậy để $MA+MB=MC+MD$ thì M thuộc đường trung trực d của AD và BC

- Giới hạn: Mọi điểm M thuộc d đều có $MA=MD$ và $MB=MC$ nên $MA+MB=MC+MD$. Vậy M thuộc đường thẳng d.

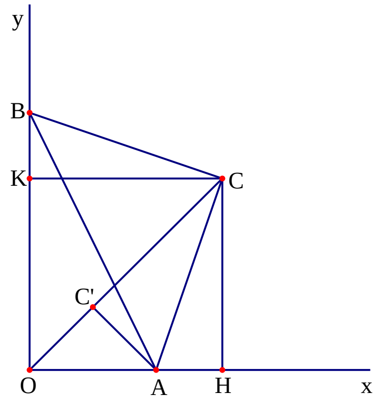
- Phần đảo: Lấy M bất kỳ thuộc đường thẳng d thì ta có $MA=MD$ và $MB=MC$.

Khi đó ta có $MA+MB=MC+MD$

- Kết luận: Tập hợp điểm M cần tìm là đường trung trực của AD và BC.

Ví dụ 2. Cho một góc vuông xOy, trên tia Ox lấy điểm A cố định, B là điểm chuyển động trên tia Oy. Tìm tập hợp các điểm C sao cho Δ ABC vuông cân tại C.

Lời giải



• Phần thuận: Vẽ CH vuông góc với Ox (H thuộc Ox) và CK vuông góc với Oy (K thuộc Oy). Xét hai tam giác vuông CAH và CBK có $CA = CB$ và $CAH = CBK$ do đó $\Delta CAH = \Delta CBK$

Từ đó ta được $CH = CK$. Mà góc xOy cố định nên do đó C thuộc tia phân giác Oz của góc vuông xOy.

• Giới hạn: Khi B trùng với O thì C trùng với C′, điểm C′ thuộc tia phân giác Oz và tam giác C′OA vuông cân tại C′. Khi B chạy xa O vô tận trên tia Oy thì C chạy xa O vô tận trên tia Oz. Vậy C chuyển động trên tia C′z của tia phân giác Oz của góc vuông xOy.

• Phần đảo: Lấy điểm C bất kỳ thuộc tia $C'z$. Vẽ đường thẳng vuông góc CA tại C cắt tia Oy tại B. Vẽ CH vuông góc với Ox (H thuộc Ox) và CK vuông góc với Oy (K thuộc Oy). Ta có $CH = CK$ và $KHC = 90^0$.

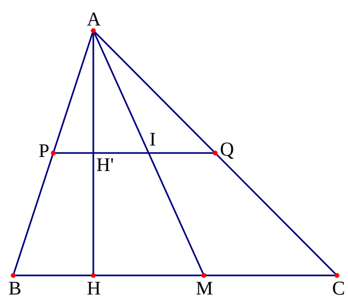
Xét hai tam giác vuông CAH và CBK có $CH = CK$ và $CAH = CBK$ nên $\Delta CAH = \Delta CBK$

Từ đó ta được $CA = CB$ do đó tam giác ABC vuông cân tại C.

• Kết luận: Tập hợp các điểm C là tia C′z của tia phân giác Oz của góc xOy.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC và điểm M di chuyển trên cạnh BC. Tìm quỹ tích các trung điểm I của đoạn thẳng AM.

Lời giải



• Phần thuận: Kẻ đường cao AH của tam giác ABC với H thuộc BC. Từ I kẻ IK vuông góc với BC (K thuộc BC). Từ đó IK//AH.

Xét tam giác MAH có $IM = IA$ và IK//AH nên IK là đường trung bình của tam giác AMH. Do đó ta được

$IK = \frac{1}{2}AH$

Mà tam giác ABC cố định nên AH cố định, suy ra

$IK = \frac{1}{2}AH$ không đổi.

Vậy điểm I luôn cách BC một đoạn $IK = \frac{1}{2}AH$ không đổi nên I nằm trên đường thẳng song song với BC và cách BC một khoảng là $\frac{1}{2}AH$.

- Giới hạn: Vì A, I cùng nằm trong mặt phẳng bờ là đường thẳng BC nên I nằm trên đường thẳng xy // BC và cách BC một khoảng $\frac{1}{2}AH$ cùng phía đối với đường thẳng BC.

+ Khi $M \equiv B$ thì $I \equiv P$ với P là trung điểm AB.

+ Khi $M \equiv C$ thì $I \equiv Q$ với Q là trung điểm AC.

Vậy khi M chạy trên cạnh BC thì điểm I chạy trên đoạn thẳng PQ (thuộc đường thẳng xy) và PQ là đường trung bình của tam giác $ABC\left(P \in AB, Q \in AC\right)$

- Phần đảo: Lấy điểm I thuộc đường trung bình PQ của tam giác ABC, tia AI cắt BC ở M. Vì $I \in PQ$ nên tia AI nằm giữa 2 tia AB, AC và do vậy M thuộc đoạn.

Từ I kẻ IK vuông góc với BC. Vì I thuộc đoạn PQ nên ta được $IK = \frac{1}{2}AH$

Mặt khác ta có IK vuông góc với BC và AH vuông góc với BC nên ta được IK//AH.

Gọi H′ là giao điểm của AH và PQ.

Xét hai tam giác AIH′ và IMK có $IK = AH' = \frac{1}{2}AH$, $H' = K = 90^0$ và $MIK = IAH'$

Do đó ta được $\Delta AIH' = \Delta IMK$ nên suy ra $IA = IM$ hay I là trung điểm của AM.

- Kết luận: Vậy quỹ tích trung điểm I của đoạn AM là đường trung bình PQ của tam giác ABC với P thuộc cạnh AB, Q thuộc cạnh AC.

Ví dụ 4. Cho góc vuông xOy cố định, điểm A cố định trên Oy, điểm B di động trên Ox. Tìm tập hợp các trung điểm M của AB.

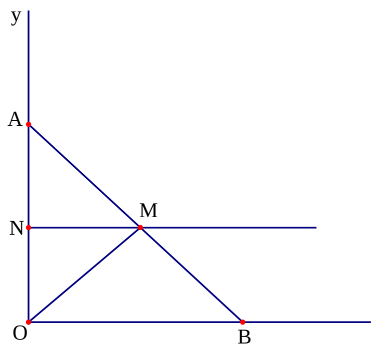
Lời giải

- Phần thuận: Ta có $OM = \frac{AB}{2}$ (trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông AOB)

.

Mà ta có $MA = \frac{AB}{2}$, suy ra $MA = OM$ không đổi

Điểm M cách đều 2 điểm O và A cố định nên M thuộc đường trung trực của OA.



- Giới hạn: Vì AB chỉ thuộc miền trong góc xOy nên điểm M nằm trên tia Nm thuộc đường trung trực của OA và thuộc miền trong góc xOy (N là trung điểm của OA).
- Phần đảo: Lấy điểm M thuộc tia Mn, nối AM cắt Ox ở B, ta cần phải chứng minh M là trung điểm của AB.

Thật vậy ta có $M'A = M'O$ nên tam giác MOA cân tại M. Do đó ta được $MAO = MOA$

Mà ta có $MOA + MOB = 90^0$ và $MAO + MBO = 90^0$

Từ đó suy ra $MOB = MBO$ nên tam giác MOB cân tại M. Do đó ta được $MO = MB$ nên $MA = MB$

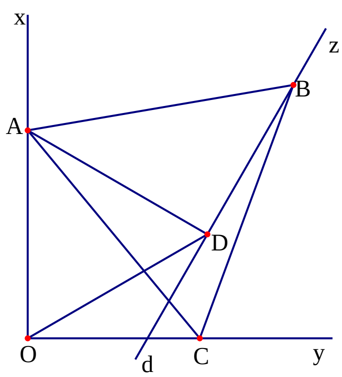
Từ đó suy ra M là trung điểm của AB.

- Kết luận: Khi B chuyển động trên Ox thì tập hợp các trung điểm M của AB là tia Nm thuộc đường trung trực của OA và thuộc miền trong góc xOy với N là trung điểm OA.

Ví dụ 5. Cho góc vuông xOy và một điểm A cố định nằm trên Ox(A khác O). Một điểm C di động trên cạnh Oy. Vẽ tam giác đều AMC nằm trong góc xOy. Tìm quỹ tích điểm B là đỉnh của tam giác đều ABC.

Lời giải

- Phần thuận: Vẽ tam giác đều AOD nằm trong góc xOy, do điểm A, O cố định nên D cố định. Xét hai tam giác DAB và OAC có $OA = DA, AC = AB$ và $OAC = DAB$



Suy ra $\Delta DAB = \Delta OAC$ nên ta được $ADB = AOC = 90^0$ hay BD vuông góc với AD tại D. Vậy điểm B nằm trên đường thẳng d vuông góc với AD tại D.

- Giới hạn: Vì điểm C di động trên Oy nên khi C tùng với O thì B trùng với điểm D, khi điểm C chạy trên Oy thì điểm B chạy trên tia Oz thuộc đường thẳng d.

Vậy điểm B thuộc tia Oz trên đường thẳng d vuông góc với AD tại D.

- Phần đảo: Lấy điểm B thuộc tia Oz trên đường thẳng d vuông góc với AD tại D.

Qua A vẽ AC(C thuộc tia Oy) sao cho $BAC = 60^0$.

Khi đó ta chứng minh được $\Delta DAB = \Delta OAC$, nên suy ra $AC = AB$

Từ đó ta được tam giác ABC đều.

- Kết luận: Vậy quỹ tích điểm B là Oz trên đường thẳng d vuông góc với AD tại D.

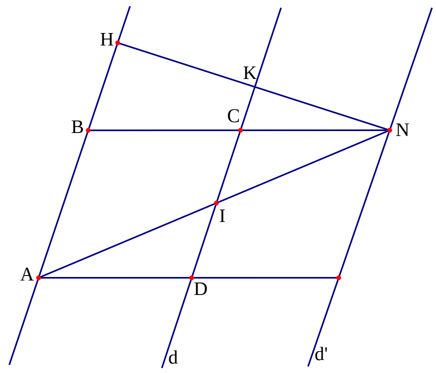
Ví dụ 6. Cho hình bình hành ABCD có cạnh AB cố định và cạnh CD chuyển động trên đường thẳng d song song với AB. Gọi I là trung điểm của CD. Tia AI cắt BC tại N. Tìm quỹ tích điểm N khi CD thă đổi trên đường thẳng d.

Lời giải

- Phần thuận: Gọi khoảng cánh giưac đường thẳng AB và đường thẳng d là h không đổi.

Xét hai tam giác IAD và INC có $AID = CIN$, $ID = IC$ và $IDA = ICN$

Do đó ta được $\Delta IAD = \Delta INC$ nên suy ra $CN = AD = BC$



Kẻ NH vuông góc với AB, NH cắt đường thẳng d tại K.

Tam giác NBH có $CB = CN$ và CK//BH nên suy ra $KH = KN$

Từ đó ta được $HN = 2KH = 2h$ không đổi.

Khi CD chuyển động trên đường thẳng d thì với mọi vị trí của CD, điểm N luôc cách đường thẳng AB một khoảng 2h không đổi.

Vậy điểm N thuộc đường thẳng d′ song song với đường thẳng AB và cách đường thẳng AB một khoảng 2h không đổi.

- Giới hạn: Khi CD di động trên đường thẳng d thì điểm N di động trên đường thẳng d′ song song với đường thẳng AB và cách đường thẳng AB một khoảng 2h không đổi.
- Phần đảo: Lấy điểm N bất kì trên đường thẳng d′. Đường thẳng AN cắt đường thẳng d tại I, đường thẳng NB cắt đường thẳng d tại C.

Lấy điểm D đối xứng với C qua điểm I. Ta cần chứng minh tứ giác ABCD là hình bình hành và I là trung điểm của CD.

Thật vậy, kẻ NH vuông góc với AB. NH cắt đường thẳng d tại K. Ta có K là trung điểm của HN. Do đó trong tam giác HNB thì C là trung điểm của NB.

Trong tam giác NAB có C là trung điểm của BN và IC//AB nên IC là đường trung bình, từ đó ta được $IC = \frac{1}{2}AB$. Vì D đối xứng với C qua I nên ta được $ID = IC = \frac{AB}{2}$.

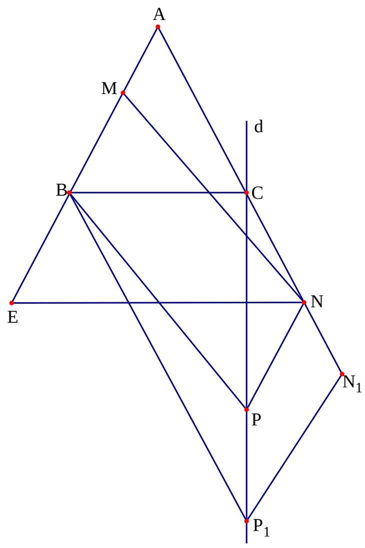
Do đó ta đường $AB = CD$, mà lại có AB//CD nên tứ giác ABCD là hình bình hành và I là trung điểm của CD.

- Kết luận: Vậy quỹ tích điểm N là đường thẳng d′ song song với đường thẳng AB và cách đường thẳng AB một khoảng 2h không đổi.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC cân tại A và một điểm M di động trên cạnh AB. Lấy điểm N trên tia đối của tia CA sao cho $NC = MB$. Vẽ hình bình hành BMN. Tìm tập hợp điểm P khi M di động trên AB.

Lời giải

- Phần thuận: Tứ giác BMNP là hình bình hành nên ta được $NP = MB$ và $NC = MB$. Từ đó suy ra $NP = NC$ nên tam giác NCP cân tại N. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $EB = BM$, từ đó ta được $AE = AN$.



Do đó $AEN = ABC = \frac{180^0 - A}{2}$, nên suy ra NE//BC.

Từ đó ta được $ENP = ENC$, nên suy ra $NE \perp CP$, do đó ta có $CP \perp BC$

Vậy điểm P nằm trên đường thẳng d vuông góc với BC tại C.

- Giới hạn: Trên tia đối của tia CA lấy điểm N_1 sao cho $N_1C = CA$. Vẽ hình bình hành ABP_1N_1

Tương tự như trên ta suy ra điểm P_1 thuộc đường thẳng d.

Vì M di động trên đoạn thẳng AB nên khi M trùng với A thì N trùng với N_1, khi đó P trùng với P_1. Khi M trùng với B thì N trùng với C, khi đó P trùng với C.

Vậy điểm P thuộc đoạn thẳng P_1C trên đường thẳng d vuông góc với BC tại C.

- Phần đảo: Lấy điểm P bất kì trên đoạn thẳng P_1C trên đường thẳng d vuông góc với BC tại C.

Vẽ hình bình hành BMNP có M thuộc đoạn AB và N thuộc đoạn CN_1.

Ta có $NP = MB$ và NP songsong với N_1P_1 nên ta được $NPC = N_1P_1C$

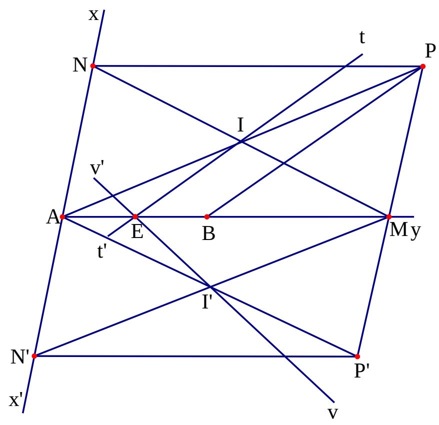
Lại có $N_1P_1C = N_1CP_1$ nên suy ra $NPC = NCP$ hay tam giác NPC cân tại N.

Từ đó ta được $NC = NP = BM$.

- Kết luận: Vậy quỹ tích điểm P là đoạn thẳng P_1C trên đường thẳng d vuông góc với BC tại C.

Ví dụ 8. Cho hai đường thẳng xx′ và yy′ vuông góc với nhau tại A. Trên yy′ lấy điểm B(khác A) cố định. Với mỗi điểm N trên xx′ lấy M trên yy′ sao cho $BM = AN$. Tìm quỹ tích trung điểm I của MN khi N di động trên xx′.

Lời giải



Ta xét bài toán tổng quát hơn khi $xAy = \alpha \left(0^0 < \alpha < 180^0\right)$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử B thuộc tia Ay. Khi N trùng với A thì M trùng với B và điểm I trùng với trung điểm E của đoạn thẳng AB. Do đó ta chỉ cần xét N khác A là được.

+ Trường hợp 1: Khi điểm N thuộc tia Ax và điểm M thuộc tia By.

- Phần thuận: Dựng hình bình hành AMPN, khi đó ta được $BM = AN = PB$.

Từ đó suy ra $PBM = BPM = \frac{1}{2}PMy = \frac{\alpha}{2}$

Vì EI là đường trung bình của tam giác ABP nên ta được $IEB = PBM = \frac{\alpha}{2}$

Vậy điểm I nằm trên tia Et với gốc E và $tEy = \frac{\alpha}{2}$

- Phần đảo: Lấy điểm I khác E trên tia Et. Lấy điểm P đối xứng với A qua điểm I. Dựng hình bình hành AMPN sao cho N thuộc tia Ax và M thuộc tia Ay. Khi đó I là trung điểm của MN.

Hơn nữa EI là đường trung bình của tam giác ABP nên ta được $PBy = tEy = \frac{\alpha}{2}$ mà $PMy = \alpha$ nên M phải thuộc tia By và $BM = PM = AN$.

- Kết luận: Quỹ tích trung điểm I của đoạn MN thỏa mãn N thuộc tia Ax và M thuộc tia By sao cho $AN = MB$ là tia Et có gốc E là trung điểm của AB và $tEy = \frac{1}{2}xAy = \frac{\alpha}{2}$.

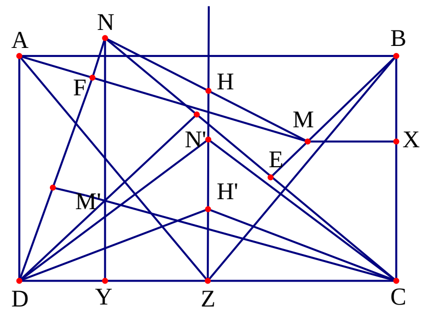
+ Trường hợp 2: Khi điểm N thuộc tia Ax′ và M thuộc tia By. Lập luận tương tự ta được quỹ tích I của đoạn MN thỏa mãn N thuộc tia Ax′ và M thuộc tia By sao cho $AN = MB$ là tia Ev có gốc E là trung điểm của AB và $vEy = \frac{1}{2}xAy = \frac{\alpha}{2}$.

+ Lập luận tương tự khi cho N chạy trên xx′ và M chạy trên yy′ với $BM = AN$ thì quỹ tích điểm I trung điểm của MN là hai đường thẳng tt′ và vv′ cắt nhau tại trung điểm E của AB và $tEy = vEy = \frac{\alpha}{2}$.

Với trường hợp $\alpha = 90^0$ thì thì quỹ tích điểm I trung điểm của MN là hai đường thẳng tt′ và vv′ vuông góc với nhau tại trung điểm E của AB.

Ví dụ 9. Lấy điểm M nằm trong hình chữ nhật ABCD cho trước. Kẻ CE vuông góc với BM tại E, kẻ DF vuông góc với AM tại F. Gọi N là giao điểm của CE và DF. Tìm quỹ tích trung điểm của đoạn thẳng MN khi M di chuyển trong hình chữ nhật.

Lời giải



• Phần thuận: Gọi H là trung điểm của MN. Gọi X là hình chiếu của M trên BC. Lấy điểm M′ ở bên trong hình chữ nhật ABCD sao cho $\Delta CM'D = \Delta AMB$.

Ta có $M'CD = MAB = ADF$ nên ta được $CM' \perp ND$

Hoàn toàn tương tự ta được $DM' \perp CD$, từ đó suy ra M′ là trực tâm của tam giác NCD. Từ đó ta được $NM' \perp CD$ tại Y.

Do đó suy ra $\Delta BMX = \Delta M'DY$ nên ta được $MX \perp DY$ hay khoảng cách từ M đến BC bằng khoảng cách từ N đến AD.

Vậy H di chuyển trên đường trung trực của đoạn thẳng DC

• Giới hạn: Gọi trung điểm của DC là Z, gọi N′ là giao điểm của các đường vuông hạ từ C và D theo thứ tự xuống BZ, AZ. Trung điểm của ZN′ là H′. Khi đó H thuộc tia H′N′.

• Phần đảo: Lấy điểm H trên tia H′N′. Gọi E′ và F là thuộc nửa đường tròn đường kính AD và nằm trong hình chữ nhật ABCD sao cho $HE' = HF$.

Lấy điểm E đối xứng với E′ qua H′N′. Gọi M là giao điểm của AF và BE. Gọi N là giao điểm của DF và CE.

Gọi O là trung điểm của MN. Khi đó ta được $OE = OF$ với O thuộc H′N′ và $HE = HF$ với H thuộc H′N′.

Nếu $EF \perp H'N'$ thì hai điểm E′ và F trùng nhau, điều này hông xẩy ra.

Do đó H và O trùng nhau hay H là trung điểm của MN.

- Kết luận: Vậy quỹ tích trung điểm H của MN chính là tia H′N′ thuộc đường trung trực của CD.

Ví dụ 10. Cho hình vuông ABCD có tâm O. Một đường thẳng xy quanh O cắt hai cạnh AD và BC lần lượt tại M và N. Trên CD lấy điểm K sao cho $DK = DM$. Gọi H là hình chiếu của K trên xy. Tìm quĩ tích của điểm H.

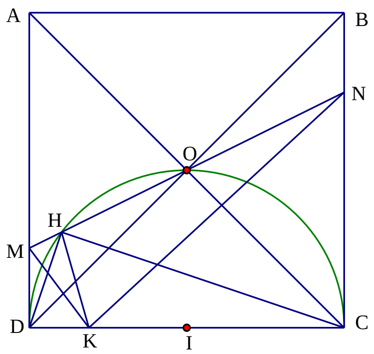
Lời giải

- Phần thuận: Ta có $CN = AM$. Vì $DK = DM$ nên. Các tứ giác MHKD, NHKC nội tiếp đường tròn nên

$DHK = DMK = 45^0; KHC = KNC = 45^0 \Rightarrow DHC = 90^0$

Vậy điểm H nằm trên đường tròn đường kính CD.

- Giới hạn: Điểm H chỉ nằm trên một nửa đường tròn đường kính CD nằm trong hình vuông.
- Phần đảo: Lấy điểm H bất kỳ trên nửa đường tròn đường kính CD. Vẽ đường thẳng HO cắt cạnh AB, BC lần lượt tại M và N. Lấy K trên CD sao cho DK = DM, ta phải chứng minh H là hình chiếu của K trên MN.



Thực vậy, vì $HDC = 90^0$; $DOC = 90^0$ nên tứ giác HOCD nội tiếp $\Rightarrow DHM = DCO = 45^0$

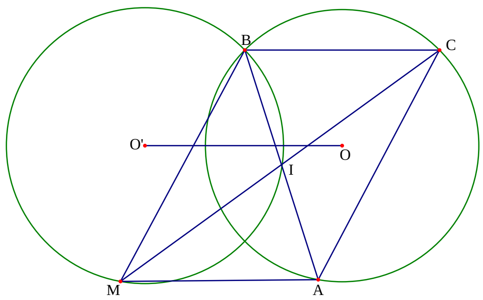
Mặt khác $DKM = 45^0 \Rightarrow DHM = DKM \Rightarrow$ Tứ giác HKDM nội tiếp.

$\Rightarrow KHM = 90^0 \Rightarrow KH \perp MN \Rightarrow$ H là hình chiếu của K trên MN.

- Kết luận: Vậy quĩ tích điểm H là nửa đường tròn đường kính CD, nửa đường tròn này nằm trong hình vuông.

Ví dụ 11. Cho đường tròn $(O; R)$ cố định. Lấy B, C là hai điểm cố định trên đường tròn và A là một điểm tuỳ ý trên đường tròn. Gọi M là điểm đối xứng của điểm C qua trung điểm I của AB. Tìm quỹ tích các điểm M.

Lời giải



- Phần thuận: Kẻ $OO'//BC$ và $OO' = BC$ (O′ và B trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AC). Do đó ta được O′ cố định (vì O, B, C cố định và BC không đổi)

Tứ giác AMBC là hình bình hành (vì I là trung điểm của hai đường chéo AB và MC). Suy ra $MA // BC$ và $MA = BC$, mà ta lại có $OO'// BC$ và $OO' = BC$

Do đó ta được $MA // OO'$ và $MA = OO'$

Từ đó ta được tứ giác AMO′O là hình bình hành (dhnb)

Nên suy ra $O'M = OA = R$ không đổi và O′ cố định

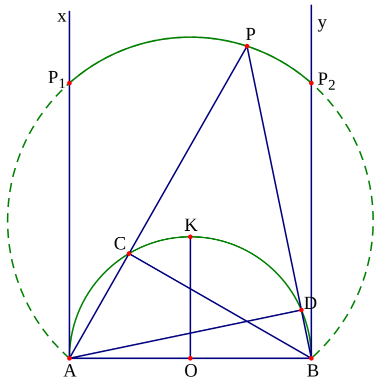
Vậy khi A di động thì M di động theo nhưng M luôn cách O′ cố định một khoảng không đổi là $O'M = OA = R$. Nên M thuộc đường tròn tâm O′ bán kính $OA = R$.

- Giới hạn: khi A di động thì M di động trên đường tròn tâm O′ bán kính $OA = R$.
- Phần đảo: Trên đường tròn (O', R) lấy điểm M bất kỳ. Nối MB. Qua C kẻ đường thẳng song song với BM cắt đường tròn (O) ở điểm thứ hai A. Ta dễ dàng chứng minh được M đối xứng với C qua trung điểm I của AB
- Kết luận: Vậy khi A di động thì M di động theo nhưng M luôn cách O′ cố định một khoảng không đổi là $O'M = OA = R$. Nên quỹ tích điểm M là đường tròn tâm O′ bán kính OA = R.

Ví dụ 12. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Gọi C, D là hai điểm trên nửa đường tròn sao cho $OC \perp OD$ (C thuộc cung AD). Các tia AC và BD cắt nhau ở P. Tìm tập hợp điểm P khi C và D chuyển động trên nửa đường tròn.

Lời giải

- Phần thuận: Ta có $ACB = 90^0$ nên suy ra $BCP = 90^0$. Do đó tam giác BCP vuông. Mà $CBP = \frac{1}{2}COD$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn CD) và $COD = 90^0$ (vì $OC \perp OD$)



Nên ta được $CBP = 45^0$. Tam giác BCP vuông cân ở C, ta có $BPC = 45^0$ hay $BPA = 45^0$

Điểm P tạo với hai mút A, B của đoạn thẳng AB cố định góc $BPA = 45^0$ nên P thuộc cung chứa góc 45^0 dựng trên đoạn AB.

- Giới hạn: Qua A và B vẽ các tia tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn (O) cắt cung chứa góc nói trên tại P_1, P_2. Kẻ bán kính OK vuông góc với AB.

+ Khi C trùng với A thì D trùng với K, AC trùng với tia tiếp tuyến Ax nên P trùng với P_1.

+ Khi C trùng với K thì D trùng với B, BD trùng với tia tiếp tuyến By nên P trùng với P_2.

Vậy P chạy trên cung P_1P_2 thuộc cung chứa góc 45^0 dựng trên đoạn AB (hình vẽ).

- Phần đảo: Trên cung P_1P_2 nói trên, lấy điểm P bất kỳ. Nối PA, PB cắt nửa đường tròn (O) lần lượt tại C và D. Nối A với D ta có $ADB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Do đó ta được $ADP = 90^0$ nên suy ra ΔADP vuông ở D

Ta có $APB = 45^0$ nên ta được ΔADP vuông cân ở D'

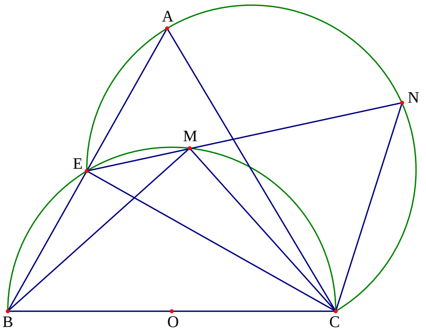
Từ đó suy ra $PAD = 45^0$, nên ta được $COD = 2PAD = 2.45^0 = 90^0$

Do đó OC vuông góc với OD.

- Kết luận: Vậy quỹ tích điểm P là cung P_1P_2 thuộc cung chứa góc 45^0 dựng trên đoạn AB (hình vẽ).

Ví dụ 13. Cho nửa đường tròn (O) có đường kính BC. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ BC chứa nửa đường tròn (O) vẽ tam giác đều BAC, AB cắt nửa đường tròn (O) ở E. Gọi M là một điểm chuyển động trên nửa đường tròn. Vẽ tam giác đều MCN sao cho đỉnh N nằm khác phía với điểm B qua MC. Tìm quỹ tích điểm N.

Lời giải



• Phần thuận: Ta có $BEC = 90^0 \Rightarrow CE \perp AB$. CE là đường cao của tam giác đều ABC nên CE là phân giác của góc $BCA \Rightarrow BCE = 30^0$. Do đó ta được $EMB = ECB = 30^0$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung). Ta có $BMC = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) và $NMC = 60^0$ (tam giác NMC đều). Nên ta được

$$EMB + BMC + CMN = 30^0 + 90^0 + 60^0 = 180^0$$

Suy ra ba điểm E, M, N thẳng hàng. Từ đó ta được $ENC = 60^0$ và $BCE = 30^0$ nên $sdBE = 60^0$, điểm B cố định và đường tròn (O) cố định. Do đó điểm E cố định và C cố định nên CE cố định

Điểm N tạo với hai mút C, E của đoạn thẳng CE cố định góc $ENC = 60^0$ nên N thuộc cung chứa góc 60^0 vẽ trên đoạn CE.

• Giới hạn: Vì M chuyển động trên nửa đường tròn (O) nên khi M trùng với B thì N trùng với A và khi M trùng với C thì N trùng với C. Vậy M chuyển động trên cung AC thuộc cung chứa góc 60^0 dựng trên đoạn CE (hình vẽ).

• Phần đảo: Trên cung AC nói trên, lấy điểm N bất kỳ. Nối NE cắt nửa đường tròn (O) ở M.

Nối C với M và C với N ta có $ENC = 60^0 \Rightarrow MNC = 60^0$

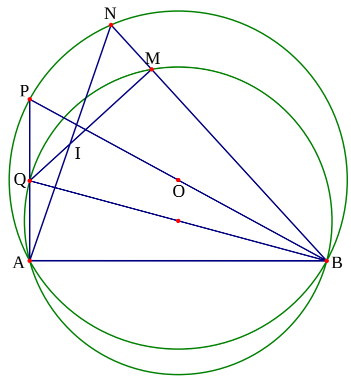
Ta chứng minh được $NMC = EBC = 60^0$ (góc ngoài của tứ giác nội tiếp BEM'C bằng góc trong của đỉnh đối diện). Do đó ta được tam giác CMN đều.

• Kết luận: Vậy quỹ tích điểm N là cung AC thuộc cung chứa góc 60^0 dựng trên đoạn CE (hình vẽ).

Ví dụ 14. Cho đường tròn (O) dây cung AB cố định. Gọi N là một điểm chuyển động trên đường tròn, I là trung điểm của AN, M là hình chiếu của điểm I trên BN. Tìm tập hợp các điểm M.

Lời giải

- Phần thuận: Gọi giao điểm của BO với đường tròn (O) là P thì điểm P cố định, nên AP cố định. Gọi MI cắt AP ở Q.



Ta có NP // MQ (vì cùng vuông góc với NB)

Ta chứng minh được IQ là đường trung bình của tam giác ANP nên Q là trung điểm của AP suy ra Q cố định nên BQ cố định

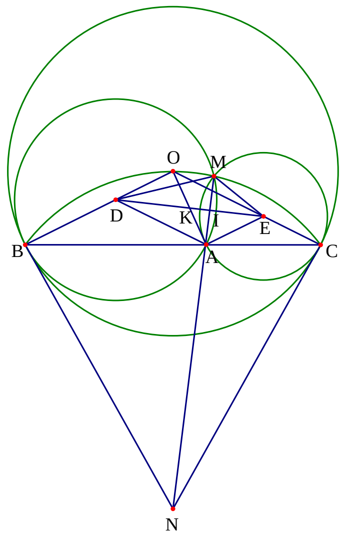
Vậy điểm M tạo thành với hai mút của đoạn thẳng BQ cố định một góc $QMB = 90^0$, do đó M thuộc đường tròn đường kính BQ

- Gới hạn: Khi điểm N là một điểm chuyển động trên đường tròn (O) thì điểm M chuyển động trên đường tròn đường kính BQ.
- Phần đảo: Lấy M thuộc đường tròn đường kính BQ. Tia BM cắt đường tròn (O) ở N. Gọi I là giao điểm của AN và MQ. Khi đó dễ dàng chứng minh được I là trung điểm của AN và M là hình chiếu của I trên BN.
- Kết luận: Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính BQ.

Ví dụ 15. Cho đường tròn tròn (O; R) và dây cung BC cố định. Điểm A di động trên đoạn thẳng BC. Gọi D là tâm đường tròn đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường tròn (O; R) tại B, E là tâm đường tròn đi qua A, C à tiếp xúc với đường tròn (O; R) tại C. Gọi M là giao điểm thứ hai của hai đường tròn tâm D và tâm E. Tìm quỹ tích điểm M khi A di động trên đoạn thẳng BC.

Lời giải

- Phần thuận: Do đường tròn (O) và đường tròn tâm D tiếp xúc với nhau tại D nên ba điểm O, B, D thẳng hàng. Đường tròn (O) và đường tròn tâm E tiếp xúc nhau tại C nên ba điểm O, E, C thẳng hàng.



Khi đó ta có $DBA = DAB$, $DBA = ECA$ và $EAC = ECA$ nên ta được $DBA = EAC, DAB = ECA$

Từ đó dẫn đến OB//AE và DA//OE. Suy ra tứ giác ADOE là hình bình hành. Gọi K là tâm của hình bình hành ADOE nên K là trung điểm của AO và DE. Hai đường tròn tâm E và tâm D cắt nhau tại M và A nên

MA là đường trung trực của đoạn thẳng DE. Gọi I là giao điểm của DE và AM, khi đó IK là đường trung bình của tam giác AMO, do đó KI//MO. Từ đó ta được tứ giác DOME là hình thang. Mà ta có $DM = OE$ nên hình thang DOME cân.

Do đó tứ giác DOME nội tiếp đường tròn.

Xét hai tam giác MBC và ADE có $MBC = ADE = \frac{1}{2}ADM$ và $MCB = AED = \frac{1}{2}AEM$

Do đó ta được $\Delta MBC \backsim \Delta ADE$ nên suy ra $BMC = DAE = BOC$ không đổi

Do BC cố định nên M thuộc cung chứa góc BOC không đổi

- Giới hạn: Khi A trùng với B thì M trùng với B Khi A trùng với C thì M trùng với C. Như vậy M chuyển động trên cung chứa góc BOC.

- Phần đảo: Lấy điểm M bất lì trên cung chứa góc BOC.

Dựng đường tròn tâm D đi qua M và tiếp xúc với đường tròn (O). Đường trong tâm D cắt BC tại A.

Dựng đường tròn tâm E đi qua ba điểm M, A, C.

Ta cần chứng minh hai đường tròn tâm O và tâm E tiếp xúc với nhau tại C.

Thật vậy, từ B, C kẻ các tiếp tuyến Bx, Cy với đường tròn (O).

Khi đó ta có $BMA = ABx$ và $ABx = ACy$ nên ta được $BMA = ACy$

Từ đó suy ra Bx, Cy và AM đồng quy tai điểm N.

Do đó ta được $ABC = ACy$, suy ra CN là tiếp tuyến của đường tròn tâm E đi qua ba điểm A, M, C

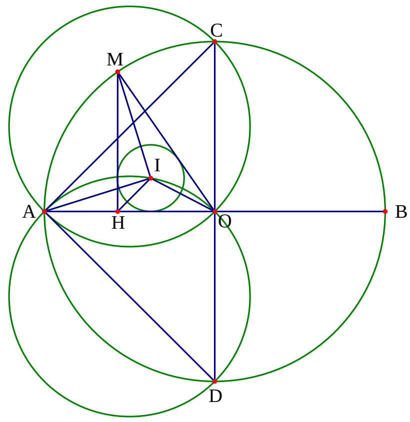
Từ đó suy ra CN là tiếp tuyến chung tại C của hai đường tròn (O) và (E).

Vậy hai đưởng tròn tâm O và tâm E tiếp xúc với nhau tai C.

- Kết luận: Vậy quỹ tích điểm M là cung chứa góc BOC dựng trên đoạn BC.

Ví dụ 16. Cho đường tròn (O; R) có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Điểm M di động trên cung CAD. Gọi H là hình chiếu của M trên AB. Gọi I là tâm đường trong nội tiếp tam giác HMO. Tìm quỹ tích điểm I khi M di động trên cung CAD.

Lời giải



- Phân thuận: Tam giác HMO có $MHO = 90^0$ nên ta được $HMO + HOM = 90^0$

Do đó ta được $IMO + IOM = \frac{1}{2}HOM = 45^0$

Trong tam giác IMO có

$OIM = 180^0 - \left(IMO + IOM\right) = 135^0$

Xét hai tam giác IMO và IAO có OI chung,

$IOM = IOA$ và $OM = OA = R$ nên $\Delta IMO = \Delta IAO$

Do đó ta được $MIO = AIO = 135^0$, lại có OA cố định nên I thuộc cung chứa góc 135^0 dựng trên đoạn AO.

- Giới hạn: Khi M di động đến trùng với điểm A thì điểm I di động đến trùng với điểm A. Khi M di động đến trùng với điểm C thì điểm I di động đến trùng với điểm O. Khi M di động đến trùng với điểm D thì điểm I di động đến trùng với điểm O. Vậy điểm I di động trên hai cung chứa góc 135^0 dựng trên đoạn thẳng AO.

- Phần đảo: Lấy điểm I bất kì trên cung chứa góc 135^0 dựng trên đoạn thẳng AO. Khi đó $OIA = 135^0$.

Vẽ tia OM với M thuộc đường tròn (O) sao cho O là tia phân giác của góc AOM

Xét hai tam giác IMO và IAO có $OM = OA = R$, $IOM = IOA$ và OI chung nên được $\Delta IMO = \Delta IAO$

Từ đó $MIO = AIO = 135^0$. Trong tam giác IMO có

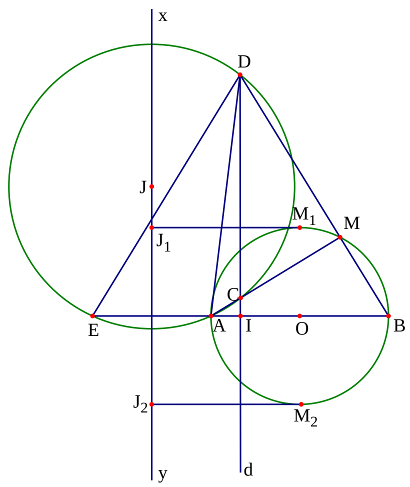
$IMO + IOM = 180^0 - MIO = 180^0 - 135^0 = 45^0$

Do đó ta được $HOM + 2IOM = 90^0$, mà ta có $HOM + HMO = 90^0$ nên ta được $HMO = 2IMO$ hay MI là tia phân giác của góc HMO. Do đó I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác HOM.

- Kết luận: Vậy quỹ tích điểm I là hai cung chứa góc 135^0 dựng trên đoạn thẳng AO trừ hai điểm O và A.

Ví dụ 17. Cho đường tròn (O; R) và đường kính AB. Vẽ đường thẳng d vuông góc với AB tại I(I thuộc đoạn AB). Gọi M là điểm chuyển độn trên đường tròn (O; R).AM. BM cắt đường thẳng d lần lượt tại C và D. Tìm tập hợp các điểm J là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD.

Lời giải



- Phần thuận: Gọi E là điểm đối xứng với B qua đường thẳng d, khi đó điểm E cố định.

Ta có $EDC = BDC$ và $AMB = 90^0$

Lại có $CAI = BDC$ nên ta được $EDC = CAI$, do đó tứ giác EDCA nội tiếp đường tròn.

Do đó đường tròn đi qua ba điểm A, C, D đi qua hai điểm cố định A và E.

Do đó tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC thuộc đường thẳng xy cố định là đường trung trực của đoạn thẳng AE.

- Giới hạn: Khi điểm M trùng với M_1 là điểm chính giữa cung AB thì điểm J trùng với điểm J_1 và $M_1J_1 \perp OM_1$ với $J_1 \in d$.

Khi M trùng với M_2 là điểm chính giữa cung AB còn lại thì J trùng với J_2 và $M_2J_2 \perp OM_2$ với $J_2 \in d$.

Như vậy điểm J di động trên hai tia J_1x và J_2y của đường trung trực của đoạn thẳng AE.

- Phần đảo: Lấy điểm J bấy kì trên tia J_1x (trường hợp trên tia J_2y chứng minh tương tự)

Vẽ đường tròn $(J; JA)$ cắt đường thẳng d tại C, D. AC cắt BD tại M.

Ta có $JE = JA$ nên E thuộc đường tròn $(J; JA)$

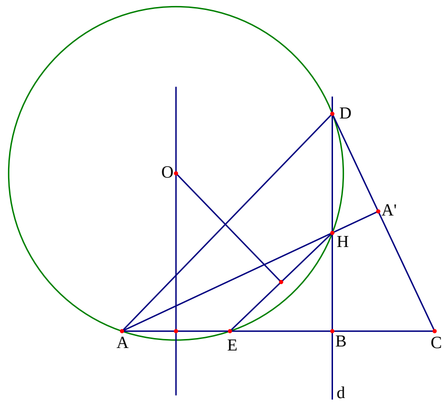
Ta có $ACI = DEA$ và $DBE = DEA$ nên ta được $ACI = DBE$ nên tứ giác ICMB nôi tiếp đường tròn.

Mà ta có $CIB = 90^0$ nên $BMC = 90^0$ nên M thuộc đường tròn (O).

- Kết luận: Vậy quỹ tích tâm J của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD là hai tia J_1x và J_2y của đường trung trực của đoạn thẳng AE.

Ví dụ 18. Cho ba điểm ABC cố định và thẳng hàng theo thứ tự đó. Trên đường thẳng d vuông góc với AB tại B lấy điểm D bất kì. Gọi H là trực tâm tam giác DAC. Tìm quỹ tích điểm O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADH.

Lời giải



• Phần thuận: Gọi giao điểm thứ hai của đường tròn (O) với AC là E.

Xét hai tam giác BAH và BDC có

$ABH = DBC = 90^0$ và $BAH = BDC$. Do đó ta được $\Delta BAH \backsim \Delta BDC$, suy ra

$\frac{AB}{BD} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BD.BH = AB.BC$ không đổi.

Xét hai tam giác BAD và BHE có $BAD = BHE$

và ABD chung. Do đó ta được $\Delta BAD \backsim \Delta BHE$.

Suy ra $\frac{BA}{BH} = \frac{BD}{BE} \Rightarrow BH.BD = BA.BE$

Từ đó suy ra $BA.BE = BA.BC \Rightarrow BE = BC$ không đổi

Mà E thuộc đường thẳng cố định và B cố định nên E là điểm cố định.

Ta có $OA = OE$ nên O thuộc đường thẳng cố định là đường trung trực của đoạn thẳng AE.

• Giới hạn: Khi D di động trên đường thẳng d thì O di động trên đường trung trực của đoạn thẳng AE, trừ trung điểm M của đoạn thẳng AE.

• Phần đảo: Lấy điểm O bất kì trên đường trung trực của đoạn thẳng AE(không trùng với trung điểm của AE). Vẽ đường tròn tâm O bán kính OA cắt đường thẳng d tại các điểm H, D.

Do $OA = OE$ nên E nằm trên đường tròn (O).

Xét hai tam giác BAD và BHE có ABD chung và $BAD = BHE$ nên $\Delta BAD \backsim \Delta BHE$

Do đó ta được $\frac{BA}{BH} = \frac{BD}{BE} \Rightarrow BA.BE = BD.BH$

Mà ta có $BE = BC$ nên ta được $BD.BH = AB.BC \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{BH}{BC}$

Xét hai tam giác BAH và BDC có $ABH = DBC$ và $\frac{AB}{BD} = \frac{BH}{BC}$

Do đó $\Delta BAH \backsim \Delta BDC$ nên ta được $BAH = BDC$

Mà ta lại có $DBC + BCD = 90^0$ nên ta được $BAH + BCD = 90^0$

Từ đó suy ra $AA'C = 90^0$ hay AH vuông góc với CD

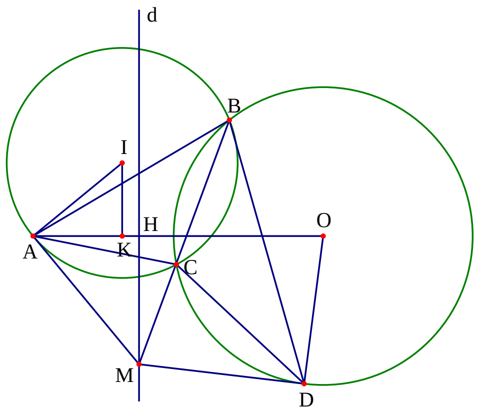
Tam giác ADC có $BD \perp AC$ và $AH \perp DC$ nên H là trực tâm của tam giác ADC.

• Kết luận: Vậy quỹ tích tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADH là đường trung trực của đoạn thẳng AE(không lấy trung điểm của AE) trong đó E là điểm đối xứng với C qua B.

Ví dụ 19. Cho đường tròn (O; R) và điểm A cố định bên ngoài đường tròn. Đường tròn tâm I thay đổi luôn đi qua điểm A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C. Gọi M là giao điểm của BC và tiếp tuyến tại A của đường tròn (I). Tìm quỹ tích điểm M khi đường tròn tâm I thay đổi.

Lời giải

- Phần thuận: Vẽ tiếp tuyến MD của đường tròn (O) với D là tiếp điểm. Gọi H là hình chiếu của M trên AO.



Xét hai tam giác MAC và MBA có AMC chung và $MAC = MBA$ nên ta được $\Delta MAC \backsim \Delta MBA$

Từ đó suy ra $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MC}{MA} \Rightarrow MA^2 = MB.MC$

Hoàn toàn tương tự ta được $MD^2 = MB.MC$

Từ đó suy ra $MA = MD$

Trong tam giác MOD vuông tại D có

$MD^2 = MO^2 - OD^2 = MO^2 - R^2$

Do đó ta được $MA^2 = MO^2 - R^2$ hay $MO^2 - MA^2 = R^2$

Trong tam giác HMA vuông tại H có $MA^2 = MH^2 + AH^2$

Trong tam giác HMO vuông tại H có $MO^2 = MH^2 + HO^2$

Do đó ta được $\left(MH^2 + HO^2\right) - \left(MH^2 + AH^2\right) = R^2 \Rightarrow OH^2 - AH^2 = R^2$

Hay ta được $\left(OH + AH\right)\left(OH - AH\right) = R^2$

Từ đó suy ra $\begin{cases} HO - AH = \dfrac{R^2}{OH + AH} = \dfrac{R^2}{OA} \\ OH + AH = OA \end{cases} \Rightarrow OH = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{R^2}{OA} + OA\right)$ không đổi.

Do O cố định, AO cố định và OH không đổi nên suy ra điểm H cố định.

Lại có MH vuông góc với AO nên đường thẳng MH cố định hai M di động trên đường thẳng d vuông góc với AO tại H.

- Giới hạn: Khi điểm I thay đổi thì điểm M di động trên đường thẳng d.
- Phần đảo: Lấy điểm M bất kì trên đường thẳng d.

Vẽ cát tuyến MBC với đường tròn (O) với B, C thuộc đường tròn (O).

Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vẽ tiếp tuyến với MD với đường tròn (O), D là tiếp điểm.

Khi đó ta có $\Delta MCD \backsim \Delta MDB$ nên ta được $\dfrac{MC}{MD} = \dfrac{MD}{MB} \Rightarrow MD^2 = MB.MC$

Trong tam giác MDO vuông tại D có $MD^2 = MO^2 - OD^2 = MO^2 - R^2$

Từ đó suy ra $MB.MC = MO^2 = R^2$ hay $OH^2 - AH^2 = R^2$

Do đó ta được $MB.MC = MO^2 - \left(HO^2 - AH^2\right) = \left(MO^2 - HO^2\right) + AH^2 = MH^2 + AH^2 = MA^2$

Xét hai tam giác MAC và MBA có AMC và $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MC}{MA}$ nên $\Delta MAC \backsim \Delta MBA$

Do đó ta được $MAC = MBA$.

Vẽ IK vuông góc với AC tại K, khi đó ta có $AIK = ABC$ nên ta được $MAC = AIK$

Mặt khác trong tam giác AKI có $AIK + IAK = 90^0$ nên ta được $MAC = IAK = 90^0$

Từ đó suy ra $IAM = 90^0$, suy ra MA là tiếp tuyến với đường tròn (I).

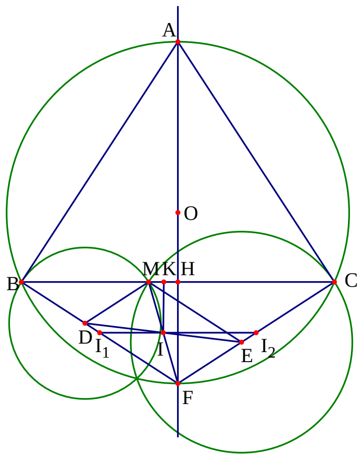
- Kết luận: Vậy quỹ tích điểm I là đường thẳng d vuông góc với OA tại H với

$OH = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{R^2}{OA} + OA\right)$.

Ví dụ 20. Cho tam giác ABC cân tại A cố định nội tiếp đường tròn (O; R). Điểm M di động trên cạnh BC. Gọi D là tâm đường tròn đi qua M và tiếp xúc với AB tại B, gọi E là tâm đường tròn đi qua M và tiếp xúc với AC tại C. Tìm quỹ tích điểm I là trung điểm của DE.

Lời giải

- Phần thuận: Vẽ đường kính AF của đường tròn (O; R)



Khi đó ta được $ABF = ABD = 90^0$, do đó ba điểm B, D, F thẳng hàng. Hoàn toàn tương tự ta được ba điểm C, E, F thẳng hàng.

Tam giác ABC cân tại A nên ta được $AF \perp BC$, suy ra $BF = CF$ nên ta được $CBF = BCF$

Mà ta có $BD = DM$ nên ta được $MBD = BMD$ và $EM = EC$ nên ta được $MEC = CME$

Từ đó suy ra $MBD = BMD = MEC = CME$ nên ta được BF//ME và MD//CF. Khi đó tứ giác DMEF là hình bình hành.

Mà I là trung điểm của DE nên I cũng là trung điểm của MF.

Vẽ IK vuông góc với BC tại K. Trong tam giác FMK có IK//FH và I là trung điểm của MF nên IK là đường trung bình của tam giác FMH. Do đó ta được $IK = \frac{FH}{2}$ không đổi.

Từ đó suy ra I thuộc đường thẳng d song song với BC và cách BC một đoạn không đổi $IK = \frac{FH}{2}$

• Giới hạn: Khi M trùng với B thì I trùng với I_1 là trung điểm của BF, khi M trùng với C thì I trùng với I_2 là trung điểm của CF. Vậy I di động trên đoạn I_1I_2 với

• Phần đảo: Lấy điểm I bất kì thuộc đoạn I_1I_2 với I_1 là trung điểm của BF, I_2 là trung điểm của CF.

FI cắt BC tại M, vẽ MD song song với CF với D thuộc BF và ME song song với BE với E thuộc CF. Khi đó tứ giác DMEF là hình bình hành. Mà I là trung điểm của MF nên ta được I là trung điểm của DE.

Khi đó ta được $BD = DM$ và $EM = EC$

Từ đó suy ra AB tiếp xúc với đường tròn (D) và AC tiếp xúc với đường tròn (E).

• Kết luận: Vậy quỹ tích trung điểm I của đoạn DE là đoạn I_1I_2 với I_1 là trung điểm của BF, I_2 là trung điểm của CF.

Ví dụ 21. Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB cố định và đường kính CD di động. Tiếp tuyến a tại với đường tròn cắt AC và AD lần lượt tại M, N. Tìm quỹ tích điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN khi đường kính CD thay đổi.

Lời giải

• Phần thuận: Ta có $ACD = \frac{1}{2}sdAD$ và

$$DNM = \frac{1}{2}\left(sdAB - sdBD\right) = \frac{1}{2}\left(180^0 - sdBD\right) = \frac{1}{2}sdAD$$

Do đó ta được $ACD = DNM$ nên tứ giác DCMN nội tiếp đường tròn (I).

Ta có $DAC = 90^0$. Trong tam giác AMN vuông tịa A có AE là đường trung tuyến.

Từ đó suy ra $EA = EM$ nên ta được $EAM = AME$

Từ đó ta được $ACF + FAC = ANM + AMN$, mà ta có $ANM + AMN = 90^0$ nên $ACF + FAC = 90^0$

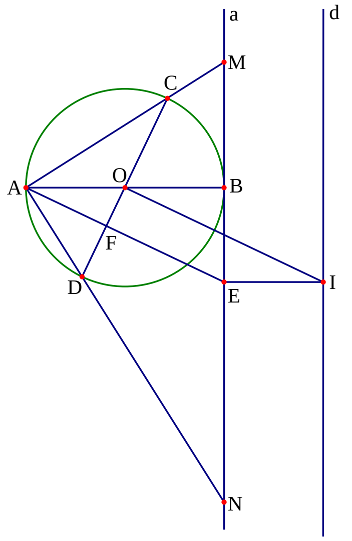
Do đó suy ra AE vuông góc với DC.

Điểm I là tam đường tròn đi qua các điểm DCMN nên ta được $OI \perp DC$ và $AE \perp DC$.

Từ đó suy ra AE//OI. Mặt khác ta có $OA \perp a$; $EI \perp a$ nên OA//EI.

Do đó tứ giác AEIO là hình bình hành. Nên ta được

$EI = OA = R$



Do đường thẳng a cố định nên điểm I thuộc đường thẳng d song song với đường thẳng a và cách đường thẳng a một khoảng bằng R.

- Giới hạn: Khi CD quay quanh O thì điểm E điểm E di động trên đường thẳng a, do đó điểm I di động trên đường thẳng d song song với đường thẳng a và cách a một khoảng R. Đường thẳng d nằm trên nửa mặt phẳng bờ a không chứa điểm A.
- Phần đảo: Lấy điểm I trên đường thẳng d, vẽ IE vuông góc với đường thẳng a tại E, vẽ DC vuông góc với OI tại O. Gọi giao điểm của AC, AD với đường thẳng a lần lượt là M, N

Ta có OA vuông góc với a tại B, EI vuông góc với a tại E nên OA//EI.

Mà ta có $OA = IE = R$. Do đó tứ giác AOIE là hình bình hành.

Suy ra AE//OI, mà ta có OI//DC nên ta được AE vuông góc với DC.

Chứng minh tương tự ta suy ra được tứ giác DCMN nội tiếp đường tròn.

Từ đó suy ra tam giác EAM cân tại E nên $EA = EM$, tam giác EAN cân tại E nên $EA = EN$

Do đó $EM = EN$. Nên ta được $IM = IN$, suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN.

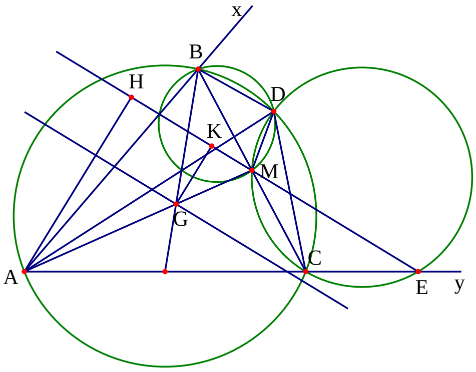
- Kết luận: Vậy quỹ tích tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN là đường thẳng d song song với đường thẳng a và cách a một khoảng R. Đường thẳng d nằm trên nửa mặt phẳng bờ a không chứa điểm A.

Ví dụ 22. Cho góc $xAy = \alpha$ không đổi và điểm B cố định nằm trong góc xAy. Đường tròn (O) di động đi qua A và B cắt Ax và Ay lần lượt tại C và D. Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác ABC thuộc một đường cố định.

Lời giải

Ta có $xAB = CDB$, $ABy = BCD$ và $DAC + DBC = 180^0$

Do các góc $xAB; BAy; DAC$ không đổi nên các góc CDB; BCD; DBC không đổi. Gọi M là trung điểm của BC. Ta có các góc BMC; BMD không đổi. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác MBC, đường tròn này cắt tia Ax tại E. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác MBD, đường tròn này cắt tia Ay tại F. Ta có tứ giác BMCE nội tiếp nên



$BEC + BMC = 180^0 \Rightarrow AEB = 180^0 - BMC$

không đổi, do đó điểm E cố định.

Ta có $BME = BCE = \frac{1}{2} sdBE$, $BDF = BCE$ và $BDF + BMF = 180^0$

Do đó ta được $BME + BMF = 180^0$, suy ra ba điểm E, M, F thẳng hàng.

Vẽ AH vuông góc với EF(H thuộc EF), GK vuông góc với EF(K thuộc EF), khi đó ta có AH không đổi và AH song song với GK. Đặt $AH = h$.

Trong tam giác AHM có GK//AH nên theo định lí Talets ta có $\frac{GM}{AM} = \frac{GK}{AH}$

G là trọng tâm và AM là đường trung tuyến của tam giác ACD nên ta được $\frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$

Do đó ta được $\frac{GK}{AH} = \frac{1}{3} \Rightarrow GK = \frac{1}{2}h$ không đổi và EF cố định.

Vậy điểm G thuộc đường thẳng song song với EF và cách EF một khoảng bằng $\frac{1}{3}h$.

Ví dụ 23. Cho tam giác ABC cân tại A. Điểm M di động trên cạnh BC. Vẽ đường thẳng MD song song với AC(D thuộc AB), vẽ đường thẳng ME song song với AB(E thuộc AC). Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE. Tìm quỹ tích điểm K khi M di động.

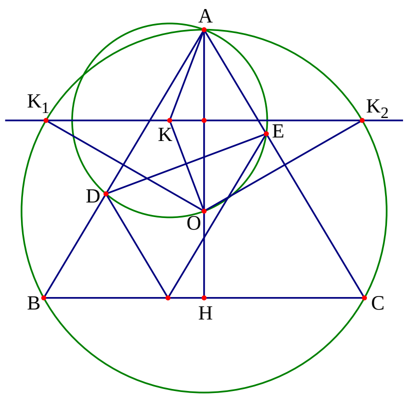
Lời giải

- Phần thuận: Gọi O là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE với đường cao AH của tam giác ABC.

Tứ giác MDAE là hình bình hành do MD//AE và AD//ME.

Từ đó ta được $MD = AE$

Do MD//AC nên ta được $DMB = ACB$, lại có



$DBM = ACB$ nên ta được $DMB = DBM$

Từ đó suy ra tam giác DBM cân nên $DM = DB$.

Do đó ta được $AE = DB$ nen

$DAO = AOE \Rightarrow OD = OE \Rightarrow OD = OE$

Xét hai tam giác OAE và OBD có $OD = OE$, $AEO = ODB$ và $AE = BD$

Do đó $\Delta OAE = \Delta OBD$ nên ta được $OA = OB$. Từ đó suy ra O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB. Mà O thuộc đường cao AH nên O thuộc đường trung trực của BC

Do đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, nên O là điểm cố định.

Ta có $KO = KA$ và AO cố định nên K thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AO

- Giới hạn: Khi điểm M trùng với điểm B thì K trùng với K_1 là giao điểm của đường trung trực của OA với đường trung trực của AB. Khi M trùng với C thì K trùng với K_2 là giao điểm của đường trung trực của OA với đường trung trực của AC. Vậy K thuộc đoạn thẳng K_1K_2 trên đường trung trực của đoạn thẳng OA.

- Phần đảo: Lấy điểm K thuộc đoạn thẳng K_1K_2 trên đường trung trực của đoạn thẳng OA.

Vẽ đường tròn tâm K bán kính KA, cắt AB, AC lần lượt tại D và E.

Vẽ DM//AC(M thuộc AB). Ta cần chứng minh ME//AB.

Thật vậy, Ta có $KA = KO$ nên O thuộc đường tròn (K)

Xét hai tam giác OAE và OBD có $OAE = OBD = OAD$ và $OEA = ODB$

Do đó ta được $\Delta OAE \backsim \Delta OBD$ nên suy ra $\dfrac{AE}{BD} = \dfrac{OA}{OB} \Rightarrow AE = BD$

Ta có $DBM = ACB$ và $BMD = ACB$ nên ta được $DBM = DMB$

Do đó tam giác DBM cân tại D nên $DM = DB$

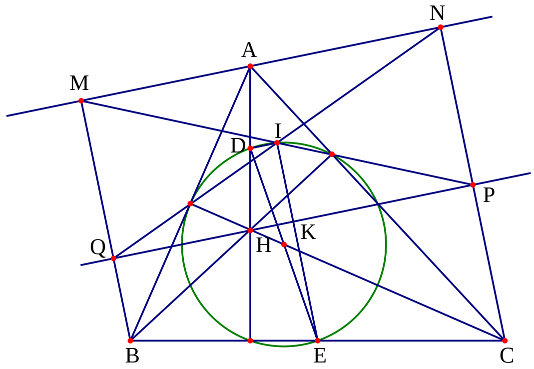
Từ đó ta được $AE = DM$, mà lại có AE//DM nên tứ giác MDAE là hình bình hành.

Do đó suy ra ME song song với AB.

- Kết luận: Vậy quỹ tích điểm K là đoạn thẳng K_1K_2 trên đường trung trực của đoạn thẳng OA

Ví dụ 24. Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Hai đường thẳng song song d và d′ lần lượt đi qua A và H. Các điểm M, N lần lượt là hình chiếu của B, C trên đường thẳng d, các điểm P, Q lần lượt là hình chiếu của B, C trên đường thẳng d′. Giao điểm của MP và NQ là I. Tìm quỹ tích điểm I khi hai đường thẳng d và d′ di động.

Lời giải



- Phần thuận: Do BM và CN cùng vuông góc với đường thẳng d nên ta được BM//CN.

Do BP và CQ cùng vuông góc với đường thẳng d′ nên ta được BP//CQ

Do hai đường thẳng d và d′ song song với nhau nên MN//PQ. Lại có $QMN = 90^0$

Từ đó ta được tứ giác MNPQ là hình chữ nhật. Suy ra I là trung điểm của các đoạn thẳng MP và NQ.

Gọi D và E lần lượt là trung điểm của AH và BC, khi đó các điểm D, E cố định.

Tứ giác ANHQ là hình thang có DI nối trung điểm của hai đường chéo nên DI//MN

Tứ giác MPCB là hình thang có IE là đường trung bình nên IE//NC.

Ta có DI//MN, IE//NC và $MNC = 90^0$ nên $DIE = 90^0$

Ta có $DIE = 90^0$ và DE cố định nên I thuộc đường tròn đường kính DE.

- Giới hạn: Khi đường thẳng d quay quanh A thì I chạy trên đường tròn đường kính DE.
- Phần đảo: Lấy điểm I bất kì trên đường tròn đường kính DE.

Qua A và H kẻ các đường thẳng d và d′ song song với DI. Gọi M, Q lần lượt là hình chiếu của B trên đường thẳng d và d′. MI cắt d′ tại P và QI cắt d tại N, PQ cắt IE tại K.

Khi đó ta có MN//DI//QP và $DA = DH$ nên ta được $IM = IP, IN = IQ$

Từ đó suy ra tứ giác MNPQ là hình bình hành. Lại có $QMN = 90^0$ nên tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

Trong tam giác PMB có $IM = IP$ và IK//MB nên ta được $KB = KP$

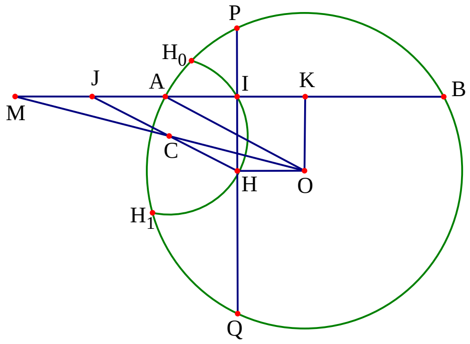
Trong tam giác BPC có $KB = KP$ và $EB = EC$ nên EK//CP

Ta có $DIE = 90^0$ và DI//MN nên $EI \perp MN, PN \perp MN$. Từ đó suy ra ba điểm C, P, N thẳng hàng.

- Kết luận: Vậy quỹ tích điểm I là đường tròn đường kính DE.

Ví dụ 25. Từ điểm M bên ngoài đường tròn (O; R) vẽ cát tuyến MAB với đường tròn (O). Trung trực của đoạn MB cắt đường tròn tại P và Q. Khi cát tuyến MAB quay quang M, tìm tập hợp trung điểm H của PQ.

Lời giải



- Phần thuận: Giả sử điểm A nằm giữa B và M. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của MB, MA, AB.

Khi đó rõ ràng tứ giác OHIK là hình chữ nhật, nên ta có $OH = IK = IB - KB = \frac{MB}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{MA}{2}$.

Gọi C là trung điểm của MO, khi đó ba điểm J, C, H thẳng hàng. Ta có hai tam giác HOC và AMO đồng dạng với nhau nên $\frac{CH}{OA} = \frac{OH}{MA} = \frac{1}{2}$ hay $CH = \frac{R}{2}$.

Giả sử đường thẳng qua J vuông góc với AB cắt đường tròn (O) tại P′, Q′. Gọi H′ là trung điểm của P′Q′.

Khi đó lập luận tương tự ta cũng được $CH' = \frac{R}{2}$, suy ra H và H′ đều thuộc đường tròn tâm C bán kính $\frac{R}{2}$.

- Giới hạn: Vì H là trung điểm của dây PQ trong đường tròn (O) nên H chỉ nằm trên cung H_0H_1 của đường tròn $\left(C;\frac{R}{2}\right)$ và nằm trong đường tròn (O) với $H_0;H_1$ là giao điểm của hai đường tròn (O) và $\left(C;\frac{R}{2}\right)$.

- Phần đảo: Lấy điểm H bất kì thuộc cung H_0H_1 của đường tròn $\left(C;\frac{R}{2}\right)$. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với OH cắt đường tròn (O) tại P và Q. Ke bán kính OA của đường tròn (O) thỏa mãn các điều kiện OH và CH nằm trên hai nửa mặt phẳng cách nhau bởi MO đồng thời $AOM = HCO$. Đường thẳng MA cắt PQ tại I cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là B.

Khi đó hiển nhiên H là trung điểm của PQ và $\Delta HCO \backsim \Delta AOM$

Từ đó ta được $OH = \frac{1}{2}MA$ và $AMO = HOC$ nên ta được MA//HO, suy ra $AM \perp PQ$ tại I.

Từ O hạ OK vuông góc với AB thì tứ giác OHIK là hình chữ nhật nên ta có $IK = OH = \frac{MA}{2}$; $KB = \frac{AB}{2}$.

+ Nếu A nằm giữa M và B thì $IB = IK + KB = \frac{MA}{2} + \frac{AB}{2} = \frac{MB}{2}$

+ Nếu B nằm giữa M và A thì $IB = IK - KB = \frac{MA}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{MB}{2}$

Do đó I là trung điểm của MB. Vậy PQ là đường trung trực của MB.

- Kết luận: Quỹ tích điểm H là trung điểm của PQ khi cát tuyến MAB quay quanh M là cung H_0H_1 của đường tròn $\left(C; \frac{R}{2}\right)$. Quỹ tích này chỉ tồn tại khi M không nằm ngoài đường tròn (O) bán kính 3R. Đặc biệt nếu M nằm trên đường tròn (O) này thì quỹ tích biến thành một điểm duy nhất.

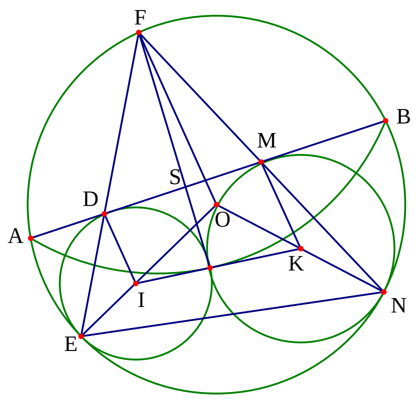
Ví dụ 26. Cho đường tròn (O; R) và một dây cung AB cách tâm O một khoảng d $(0 < d < R)$. Hai đường tròn (I) và (K) tiếp xúc với nhau tại C, cùng tiếp xúc với AB và tiếp xúc trong với đường tròn (O)(I và K nằm cùng nửa mặt phẳng bờ AB). Khi hai đường tròn (I) và (K) thay đổi, tìm quỹ tích điểm C.

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Ba điểm I, K, O nằm trên một nửa mặt phẳng bờ AB.

- Phần thuận: Gọi tiếp điểm của (I) với AB là D, ta có $ID \perp AB$. Gọi tiếp điểm của (I) và (O) là E. Khi đó ta có ba điểm O, I, E thẳng hàng. Gọi F là điểm chính giữa cung AB không chứa E, ta có $OF \perp AB$.



Lại có $\frac{EI}{EO} = \frac{DI}{FO}$ nên ba điểm E, D, F thẳng hàng.

Tương tự (K) tiếp xúc với AB và (O) lần lượt tại M, N thì ta được ba điểm M, N, F thẳng hàng. Ta có

$$FDB = \frac{1}{2}DIE = \frac{1}{2}FOE = FNE$$

$$FMA = \frac{1}{2}MKN = \frac{1}{2}FON = FEN$$

Do đó ta được $\Delta FDM \backsim \Delta FNE$ nên ta suy ra $FD.FE = FM.FN$ (1)

Giả sử FC cắt đường trong (I) và (K) tại giao điểm thứ hai theo thứ tự là C_1, C_2.

Khi đó dễ dàng chứng minh được $FD.FE = FC.FC_1$; $FM.FN = FC.FC_2$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $FC_1 = FC_2$ nên suy ra $C \equiv C_1 \equiv C_2$ hay FC là tiếp tuyến chung của (I) và (K)

Hơn nữa ta lại có $FD.FE = FM.FN = FC^2$ (3)

Mặt khác do F là điểm chính giữa cung AB nên ta có $FAD = FEA$

Từ đó ta được $\Delta FAD \backsim \Delta FEA$ suy ra $FD.FE = FA^2$ (4)

Từ (3) và (4) ta được $FA = FC$, mà ta lại thấy $FA = \sqrt{2R(R-d)}$

Vậy C thuộc cung tròn AB của đường tròn $\left(F;\ FA = \sqrt{2R(R-d)}\right)$ nằm trong đường tròn (O) và không lấy hai điểm A, B.

- Phần đảo: Gọi điểm C bất kì trên cung AB nằm trong đường tròn (O) của $\left(F;\ FA = \sqrt{2R(R-d)}\right)$ và trừ hai điểm A, B. Qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với FC.

Gọi S là giao điểm của FC và AB. Đường phân giác của các góc CSA, CSB cắt d lần lượt tại I và K. Khi đó hai đường tròn (I, IC) và (K, KC) tiếp xúc với nhau tại C và tiếp xúc với AB lần lượt tại D và M.

Gọi E là giao điểm thứ hai của FD với (I). Dễ dàng chứng minh được $FA^2 = FC^2 = FD.FE$.

Suy ra ta được $\frac{FA}{FD} = \frac{FE}{FA}$ nên ta được $\Delta FAD \backsim \Delta FEA \Rightarrow FAD = FEA$.

Mặt khác ta lại có $FAD = \frac{1}{2}sdFB = \frac{1}{2}sdFA$ nên E thuộc (O).

Vì DI//OF và lại có $\frac{ID}{OF} = \frac{IE}{OE}$ nên ta được ba điểm O, I, E thẳng hàng, do đó (I) tiếp xúc với (O) tai E.

Vậy quỹ tích điểm C khi hai đường tròn (I) và (K) thay đổi là cung tròn AB của đường tròn $\left(F;\ FA = \sqrt{2R(R-d)}\right)$ nằm trong đường tròn (O) và không lấy hai điểm A, B.

+ Trường hợp 2: Ba điểm I, K nằm khác phía với O so với AB. Khi đó ta được quỹ tích điểm C khi hai đường tròn (I) và (K) thay đổi là cung tròn AB của đường tròn $\left(F;\ FA = \sqrt{2R(R+d)}\right)$ nằm trong đường tròn (O) và không lấy hai điểm A, B.