



Sưu tầm



CHUYÊN ĐỀ **LỮY THỪA VỚI SỐ MỸ TỰ NHIÊN**

Thanh Hóa, tháng 9 năm 2019

CHUYÊN ĐỀ: LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

Bài 1: SỬ DỤNG CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA LŨY THỪA

A. Lý thuyết:

1. Khái niệm: $a^n = \underbrace{a.a.a.....a}_{n \text{ thừa số}} (a \neq 0, n \in \mathbb{N})$

2. Quy ước: $a^1 = 1$; $a^0 = 1$; $0^n = 0$ (n thuộc $\mathbb{N}^*$)

a^2 : bình phương của a ($a \neq 0$); a^3 : lập phương của a ($a \neq 0$)

3. Các tính chất: Với mọi $a, b \neq 0$; m, n thuộc $\mathbb{N}$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; a^m : a^n = a^{m-n}; (a^m)^n = a^{(m \cdot n)}; (a^m)^n = a^{m \cdot n}; (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

B. Bài tập

Bài 1: Tính giá trị của các biểu thức sau

a. $A = \frac{3^{10} \cdot 10 + 3^{10} \cdot 6}{3^9 \cdot 2^{2^2}}$

b. $B = \frac{11 \cdot 3^{22} \cdot 3^7 - 9^{15}}{(2 \cdot 3^{14})^2}$

c. $C = \frac{36^{10} \cdot 25^{15}}{30^8}$

d. $D = \frac{21^2 \cdot 14 \cdot 126}{35^5 \cdot 6}$

e. $E = \frac{11 \cdot 3^{22} \cdot 3^7 - 9^{15}}{(2 \cdot 3^{14})^2}$

f. $F = \frac{4^9 \cdot 36 + 64^4}{100 \cdot 16^4} = \frac{4^9 \cdot 4 \cdot 9 + 4^{12}}{100 \cdot 4^8} = \frac{4^{10} \cdot (9 + 4^2)}{4^8 \cdot 100} = 4$

Lời giải

a. $A = \frac{3^{10} \cdot 10 + 3^{10} \cdot 6}{3^9 \cdot 2^{2^2}} = \frac{3^{10} \cdot (10 + 6)}{3^9 \cdot 2^4} = \frac{3^{10} \cdot 2^4}{3^9 \cdot 2^4} = 3$

b. $B = \frac{11 \cdot 3^{22} \cdot 3^7 - 9^{15}}{(2 \cdot 3^{14})^2} = \frac{11 \cdot 3^{29} - 3^{30}}{4 \cdot 3^{28}} = \frac{3^{29} (11 - 3)}{4 \cdot 3^{28}} = \frac{3 \cdot 8}{4} = 6$

c. $C = \frac{36^{10} \cdot 25^{15}}{30^8} = \frac{(6^2)^{10} \cdot (5^2)^{15}}{(6 \cdot 5)^8} = \frac{6^{20} \cdot 5^{30}}{6^8 \cdot 5^8} = 6^{12} \cdot 5^{22}$

d. $D = \frac{21^2 \cdot 14 \cdot 126}{35^5 \cdot 6} = \frac{3^2 \cdot 7^2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 7}{3^5 \cdot 7^5 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^4}{2 \cdot 3^6 \cdot 7^5} = \frac{2}{3^2 \cdot 7}$

e. $E = \frac{11 \cdot 3^{22} \cdot 3^7 - 9^{15}}{(2 \cdot 3^{14})^2} = 2$

f. $F = \frac{4^9 \cdot 36 + 64^4}{100 \cdot 16^4} = \frac{4^9 \cdot 4 \cdot 9 + 4^{12}}{100 \cdot 4^8} = \frac{4^{10} \cdot (9 + 4^2)}{4^8 \cdot 100} = 4$

Bài 2: Viết các tích sau dưới dạng lũy thừa

a. $3y \cdot 3y \cdot 3y$ ($y \neq 0$)

b. $x^1 \cdot x^2 \cdot \dots \cdot x^{100}$ ($x \neq 0$)

c. $z^1 \cdot z^4 \cdot z^7 \cdot \dots \cdot z^{100}$ ($z \neq 0$)

d.

$(m^1)^2 \cdot (m^2)^3 \cdot (m^3)^4 \cdot \dots \cdot (m^{99})^{100}$ ($m \neq 0$)

Lời giải

a. $3y \cdot 3y \cdot 3y \ (y \neq 0) = (3y)^3$

b.

$$x^1 \cdot x^2 \cdot \dots \cdot x^{100} = x^{1+2+\dots+100} = x^{5050} \ (x \neq 0)$$

c. $z^1 \cdot z^4 \cdot z^7 \cdot \dots \cdot z^{100} \ (z \neq 0) = z^{1+4+7+\dots+100} = z^{(100+1) \cdot 34:2} = z^{101 \cdot 17}$

d. $(m^1)^2 \cdot (m^2)^3 \cdot (m^3)^4 \cdot \dots \cdot (m^{99})^{100} \ (m \neq 0) = m^{1 \cdot 2} \cdot m^{2 \cdot 3} \cdot \dots \cdot m^{99 \cdot 100} = m^{\frac{1}{3} \cdot 99 \cdot 100 \cdot 101}$

Bài 3: Tính các tổng sau

a. $A = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2015}$

b. $B = 1 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{2016}$

Lời giải

a. $A = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2015} \Rightarrow 2A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2016} \Rightarrow 2A - A = A = 2^{2016} - 1.$

b. $B = 1 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{2016} \Rightarrow 3B = 3 + 3^2 + \dots + 3^{2017} \Rightarrow 3B - B = 2B = 3^{2017} - 1 \Rightarrow B = \frac{3^{2017} - 1}{2}$

Bài 4: Tính $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 8192$ **Lời giải:**

$$S = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{13} \Rightarrow 2S = 2 + 2^2 + \dots + 2^{14} \Rightarrow S = 2^{14} - 1 = 16383$$

Bài 5: Viết các tổng sau thành bình phương của một số tự nhiên

a. 1^3 b. $1^3 + 2^3$ c. $1^3 + 2^3 + 3^3$ d. $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$

e. phát biểu dưới dạng tổng quát (không cần chứng minh)

Lời giải:

a. $1^3 = 1^2$; b. $(1+2)^2$; c. $(1+2+3)^2$; d. $(1+2+3+4)^2$

e. $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2 \ (n \geq 1 ; n \text{ thuộc } \mathbb{N})$

Bài 6: Cho $A = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2015}$. Viết $A + 1$ dưới dạng lũy thừa của 8**Lời giải:**

$$A = 2^{2016} - 1 \Rightarrow A + 1 = 2^{2016} = (2^3)^{672} = 8^{672}$$

Bài 7: Cho $B = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2015}$. CMR: $2B + 3$ là lũy thừa của 3**Lời giải:**

$$B = \frac{3^{2016} - 3}{2} \Rightarrow 2B + 3 = 3^{2016}$$

Bài 8: Chứng minh rằng

a. $10^{2008} + 125$ chia hết cho 45

b. $5^{2008} + 5^{2007} + 5^{2006}$ chia hết cho 31

c. $M = 8^8 + 2^{20}$ chia hết cho 17

d. $H = 313^5 \cdot 299 - 313^6 \cdot 36$ chia hết cho 7

Lời giải:

a. Ta có: $10^{2008} + 125 = \underbrace{100\dots0}_{2008 \text{ số } 0} + 125 = \underbrace{100\dots0125}_{2005 \text{ số } 0}$, A có tận cùng là 5 $\Rightarrow$ A chia hết cho 5.

Tổng các chữ số của A là : $1 + 2 + 5 + 1 = 9 \Rightarrow$ A chia hết cho 9, mà $(5, 9) = 1$

Vậy A chia hết cho 45.

b. $B = 5^{2006} (5^2 + 5^1 + 1) = 5^{2006} \cdot 31$ chia hết cho 31.

c. $M = (2^3)^8 + 2^{20} = 2^{24} + 2^{20} = 2^{20} (2^4 + 1) = 17 \cdot 2^{20}$ chia hết cho 17.

d. $H = 313^5 \cdot 299 - 313^6 \cdot 36 = 313^5 \cdot 299 - 313^6 - 35 \cdot 313^6 = 313^5 (299 - 313) - 35 \cdot 313^6$

$H = -14 \cdot 313^5 - 35 \cdot 313^6$ chia hết cho 7

Bài 9: Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60}$. Chứng minh rằng $A : 3; A : 5; A : 7$

Lời giải:

$$\begin{aligned} A &= (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{57} + 2^{58}) + (2^{59} + 2^{60}) = 2 \cdot (1 + 2) + 2^3(1 + 2) + \dots + 2^{59}(1 + 2) \\ &= (1 + 2) \cdot (2 + 2^3 + \dots + 2^{59}) = 3 \cdot (\dots) : 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= (2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6) + \dots + (2^{58} + 2^{59} + 2^{60}) \\ &= 2 \cdot (1 + 2 + 2^2) + 2^4(1 + 2 + 2^2) + \dots + 2^{58}(1 + 2 + 2^2) \\ &= (1 + 2 + 2^2)(2 + 2^4 + 2^7 + \dots + 2^{58}) = 7 \cdot (2 + 2^4 + \dots + 2^{58}) : 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow A &= (2 + 2^3) + (2^2 + 2^4) + \dots + (2^{58} + 2^{60}) = 2(1 + 2^2) + 2^2(1 + 2^2) + \dots + 2^{58}(1 + 2^2) \\ &= (1 + 2^2)(2 + 2^2 + \dots + 2^{57} + 2^{58}) = 5 \cdot (2 + 2^2 + \dots + 2^{58}) : 5 \end{aligned}$$

Bài 10: Tính tổng sau: $M = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots + 2^{2008}$

Lời giải:

$$M = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots + 2^{2008} \Rightarrow 2M = 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \dots + 2^{2009} \Rightarrow 2M + M = 2^{2009} + 1$$

$$\Rightarrow M = \frac{2^{2009} + 1}{3}$$

Bài 2: SO SÁNH HAI LŨY THỪA – PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH TRỰC TIẾP

A. Quy tắc so sánh: Ta biến đổi hai lũy thừa cần so sánh thành các lũy thừa hoặc cùng cơ số hoặc cùng số mũ để so sánh

- Nếu 2 lũy thừa cùng cơ số (lớn hơn 1) thì lũy thừa nào có số mũ lớn hơn sẽ lớn hơn.

$$a^m > a^n \quad (a > 1) \Leftrightarrow m > n$$

- Nếu 2 lũy thừa cùng số mũ (lớn hơn 0) thì lũy thừa nào có cơ số lớn hơn sẽ lớn hơn .

$$a^n > b^n \quad (n > 0) \Leftrightarrow a > b$$

Dạng 1: Biến đổi về cùng cơ số hoặc số mũ

Bài 1: Hãy so sánh

a. 128^7 và 4^{24}

c. 5^{36} và 11^{24}

b. 81^8 và 27^{11}

d. 32^{60} và 81^{50}

e. 3^{500} và 7^{300}

Lời giải :

a. Có :
$$\left. \begin{array}{l} 128^7 = (2^7)^7 = 2^{49} \\ 4^{24} = (2^2)^{24} = 2^{48} \end{array} \right\} \Rightarrow 128^7 > 4^{24}$$

b.
$$\left. \begin{array}{l} 81^8 = 3^{32} \\ 27^{11} = 3^{33} \end{array} \right\} \Rightarrow 81^8 < 27^{11}$$

c.
$$\left. \begin{array}{l} 5^{36} = 125^{12} \\ 11^{24} = 121^{12} \end{array} \right\} \Rightarrow 5^{36} > 11^{24}$$

d.
$$\left. \begin{array}{l} 32^{60} = 2^{300} = 8^{100} \\ 81^{50} = 3^{200} = 9^{100} \end{array} \right\} \Rightarrow 32^{60} < 81^{50}$$

e.
$$\left. \begin{array}{l} 3^{500} = 243^{100} \\ 7^{300} = 343^{100} \end{array} \right\} \Rightarrow 3^{500} < 7^{300}$$

Bài 2: Hãy so sánh

a. 16^{19} và 8^{25}

b. 27^{11} và 81^8

b. 625^5 và 125^7

d. 5^{23} và 6.5^{22}

e. 7.2^{13} và 2^{16}

f. 5^{100} và 3^{500}

g. $2^{30} + 3^{30} + 4^{30}$ và 3.24^{10}

Lời giải

a. $16^{19} = (2^4)^{19} = 2^{76}; 8^{25} = (2^3)^{25} = 2^{75} \Rightarrow 2^{76} > 2^{75} \Rightarrow 16^{19} > 8^{25}$

b. $27^{11} = (3^3)^{11}; 81 = (3^4)^8 = 3^{32} \Rightarrow 3^{33} > 3^{32} \Rightarrow 27^{11} > 81^8$

c. $625^5 = (5^4)^5 = 5^{20}; 125 = (5^3)^7 = 5^{21} \Rightarrow 125^7 > 625^5$

d. $5^{23} = 5.5^{22} < 6.5^{22} \Rightarrow 6.5^{22} > 5^{23}$

e. $7.2^{13} < 8.2^{13} = 2^3.12^{13} = 2^{16} \Rightarrow 2^{16} > 7.2^{13}$

f. $5^{300} = (5^3)^{100} = 125^{100} & 3^{500} = (3^3)^{100} = 243^{100} \Rightarrow 5^{300} < 3^{500}$

g. $4^{30} = (2^2)^{30} = (2.2)^{30} = 2^{30}.2^{30} = (2^3)^{10}.(2^2)^{15} > 8^{10}.3^{15} > 8^{10}.3^{10}.3 = (8.3)^{10}.3 = 24^{10}.3$

Vậy $2^{30} + 3^{30} + 4^{30} > 3.24^{10}$

Bài 2: So sánh

a. $3^{2n(n+2)}$ và $9^{(n+1)^2}$ ($n \in N$)
 $\in N$

b. 256^n và 16^{n+5} với n

Lời giải:

$$\left. \begin{array}{l} 3^{2n(n+2)} = 9^{n(n+2)} = 9^{n^2+2n} \\ \text{a. Ta có: } 9^{(n+1)^2} = 9^{n^2+2n+1} \\ n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n \end{array} \right\} \Rightarrow 9^{(n+1)^2} > 9^{n(n+2)} \Rightarrow 9^{(n+1)^2} > 3^{2n(n+2)} (\forall n \in N)$$

b. $256^n = 16^{2n}$ suy ra bài toán trở thành so sánh $2n$ và $n + 5$

+) Nếu $2n > n + 5 \Leftrightarrow n > 5$

+) Nếu $2n = n + 5 \Leftrightarrow n = 5$

+) Nếu $2n < n + 5 \Leftrightarrow n < 5$

Vậy: Nếu $0 \leq n < 5$ thì $256^n > 16^{2n}$

Nếu $n = 5$ thì $256^n = 16^{2n}$; Nếu $n > 5$ thì $256^n < 16^{2n}$

Bài 3: Chứng minh rằng: $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$

Lời giải:

$$\left. \begin{array}{l} 5^{27} = 125^9 \\ 2^{63} = (2^7)^9 = 128^9 \end{array} \right\} \Rightarrow 5^{27} < 2^{63} (1); \left. \begin{array}{l} 2^{63} = (2^9)^7 = 312^7 \\ 5^{28} = (5^4)^7 = 625^7 \end{array} \right\} 2^{63} < 5^{28} (2) \rightarrow 5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$$

Dạng 2: Đưa về một tích trong đó có thừa số giống nhau

Bài 1: Hãy so sánh

a. 21^{15} và $27^5 \cdot 49^8$

b. $2015^{2015} - 2015^{2014}$ và $2015^{2016} - 2015^{2015}$

c. $2015^{10} + 2015^9$ và $2016^{10} - 2015^{2015}$

d. $A = 72^{45} - 72^{44}$; $B = 72^{44} - 72^{43}$

e. 71^{50} và 37^{75}

Lời giải:

a. $21^{15} = 3^{15} \cdot 7^{15}; 27^5 \cdot 49^8 = 3^{15} \cdot 7^{16} \Rightarrow 21^{15} < 27^5 \cdot 49^8$

b. $2015^{2015} - 2015^{2014} = 2015^{2014} (2015 - 1) = 2014 \cdot 2015^{2014}$

$2015^{2016} - 2015^{2015} = 2014 \cdot 2015^{2015} \Rightarrow \dots$

c. $2015^{10} + 2015^9 = 2015^9 (2015 + 1) = 2016 \cdot 2015^9$; $2016^{10} = 2016 \cdot 2016^9 \Rightarrow \dots$

d. $A = 72^{44} (72 - 1) = 72^{44} \cdot 71$ và $B = 72^{43} (72 - 1) = 72^{43} \cdot 71 \rightarrow A > B$

e. Ta thấy: $71^{50} < 72^{50} = (8 \cdot 9)^{50} = 2^{150} \cdot 3^{100}$ (1)

$37^{75} > 36^{75} = (4 \cdot 9)^{75} = 2^{150} \cdot 3^{150}$ (2)

mà $2^{150} \cdot 3^{150} > 2^{150} \cdot 3^{100}$ (3)

Từ (1) (2) và (3) suy ra: $37^{75} > 71^{50}$

Bài 2: Hãy so sánh

a. 3^{210} và 2^{350}

b. 2^{31} và 3^{21}

c. 4^{30} và 3.24^{10}

d. 202^{303} và 303^{202}

Lời giải :

a. $3^{210} = 27^{70}; 2^{350} = 32^{70} \Rightarrow 3^{210} < 2^{350}$

b. $2^{31} = 2.2^{30} = 2.8^{10}; 3^{21} = 3.3^{20} = 3.9^{10} \Rightarrow 3^{21} > 2^{31}$

c. $4^{30} = 2^{60} = 2^{30}.2^{30}; 3.24^{10} = 3.(3.8)^{10} = 3^{11}.2^{30} \Rightarrow 4^{30} > 3.24^{10}$

$$202^{303} = (2.101)^{303} = 2^{303}.101^{303} = 2^{303}.101^{3.101} = 8^{101}.101^{3.101} = 8^{101}.101^{101}.101^{2.101}$$

$$d. 303^{202} = (3.101)^{2.101} = 3^{2.101}.101^{2.101} = 9^{101}.101^{2.101} \Rightarrow 202^{303} > 303^{202}$$

Bài 3: SO SÁNH HAI LŨY THỪA – PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH GIÁN TIẾP**Dạng 1: So sánh thông qua một lũy thừa trung gian**

- Để so sánh 2 lũy thừa A và B, ta tìm một lũy thừa M sao cho: $A < M < B$ hoặc: $A > M > B$

Trong đó: A và M ; M và B có thể so sánh trực tiếp được

Bài 1: Hãy so sánh

a. 2^{225} và 3^{151}

b. 199^{20} ; 2003^{15}

c. 2^{91} và 5^{36}

Lời giải:

$$a. \underbrace{2^{225}}_A = (2^3)^{75} = 8^{75} < \underbrace{9^{75}}_M = (3^2)^{75} = 3^{150} < \underbrace{3^{151}}_B$$

b. Ta có: $199^{20} < 200^{20} = (8.25)^{20} = (2^3.5^2)^{20} = (2^3.5^2)^{20} = 2^{60}.5^{40}$

$2003^{15} > 2000^{15} = (16.125)^{15} = (2^4.5^3)^{15} = (2^4.5^3)^{15} = 2^{60}.5^{45}$

$\rightarrow 2^{60}.5^{45} > 2^{60}.5^{40} \rightarrow 2003^{15} > 199^{20}$

$$c. \underbrace{2^{91}}_A > \underbrace{2^{90}}_M = (2^5)^{18} = 32^{18} > \underbrace{25^{18}}_B = 5^{36}$$

Bài 2: So sánh

a. 99^{20} và $9^{10}.11^{30}$

b. 961^{42} và 100.23^{93}

Lời giải:

a. $99^{20} = [(99)^2]^{10} = 9801^{10} < (22^3)^{10} = 22^{30};$

$22^{30} = (2.11)^{30} = 2^{30}.11^{30} = 8^{10}.11^{30} < 9^{10}.11^{30}$

b. $961^{42} < 1000^{42} = 10^{126} = 100.10^{124};$

$100.23^{93} = 100.(23^3)^{31} > 100.(10^4)^{31} = 100.10^{124} \Rightarrow 961^{42} < 100.23^{93}$

Bài 3: So sánh

a. $1990^{10} + 1990^9$ và 1991^{10}

b. 107^{50} và 73^{75}

c. $33^{39}; 11^{21}$

Lời giải:

a. $1990^{10} + 1990^9 = 1990^9(1990 + 1) = 1991.1990^9 < 1991.1991^9 = 1991^{10}$

b. $107^{50} < 108^{50} = (4.27)^{50} = 2^{100}.3^{150}; 73^{75} > 72^{75} = (8.9)^{75} = 2^{225}.3^{150} \Rightarrow 73^{75} > 107^{50}$

c. Ta có: $3^{39} < 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$

$11^{21} > 11^{20} = (11^2)^{10} = 121^{10} \Rightarrow 121^{10} > 11^{20} \Rightarrow 11^{21} > 3^{39}$

Bài 4: So sánh

a. 99^{20} và 9999^{10}

b. 8^5 và 3.4^7

c. 202^{303} và 303^{202}

d. 10^{10} và 48.50^5

Lời giải

a. Ta thấy : $99^2 < 99.101 = 9999 \Rightarrow (99^2)^{10} < 9999^{10}$ hay $99^{20} < 9999^{10}$

b. Ta có: $8^5 = 2^{15} = 2.2^{14} < 3.2^{14} = 3.4^7 \Rightarrow 8^5 < 3.4^7$

c. Ta có: $202^{303} = (2.101)^{3.101} = (2^3.101^3)^{101} = (8.101.101^2)^{101} = (808.101)^{101}$

$303^{202} = (3.101)^{2.101} = (3^2.101^2)^{101} = (9.101^2)^{101}$

d. Ta có : $10^{10} = 2^{10}.5^{10} = 2.2^9.5^{10} (*)$

$48.50^5 = (3.2^4).(2^5.5^{10}) = 3.2^9.5^{10} (**)$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow 10^{10} < 48.50^5$

Bài 5: Chứng tỏ rằng: $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$ **Lời giải**

Với bài này , học sinh lớp 6 sẽ không định hướng được cách làm , giáo viên có thể gợi ý:
hãy chứng tỏ $2^{63} > 5^{27}$ và $2^{63} < 5^{28}$

Ta có : $2^{63} = (2^7)^9 = 128^9$

$5^{27} = (5^3)^9 = 125^9 \Rightarrow 2^{63} > 5^{27} (1)$

Lại có : $2^{63} = (2^9)^7 = 512^7$

$5^{28} = (5^4)^7 = 625^7 \Rightarrow 2^{63} < 5^{28} (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$

Dạng 2: So sánh thông qua hai lũy thừa trung gian

- Để so sánh hai lũy thừa A và B, ta tìm hai lũy thừa X và Y sao cho:

$A < X < Y < B$ hoặc $A > X > Y > B$

Trong đó các lũy thừa A và X ; X và Y ; Y và B có thể so sánh trực tiếp được

Bài 1: So sánh

a. 17^{20} và 31^{15} b. 199^{20} và 100^{24} c. 31^{11} và 17^{14} **Lời giải:**

$$a. \underset{A}{17^{20}} > \underbrace{16^{20} = 2^{80}}_X > \underbrace{2^{75} = (2^5)^{15} = 32^{15}}_Y > \underset{B}{31^{15}}$$

$$b. 199^{20} > 200^{20} = 2^{20} \cdot 100^{20} < (2^3)^7 \cdot 100^{20} < 10^7 \cdot 100^{20} < 100^{24}$$

$$c. 31^{11} < 32^{11} = 2^{55}; 17^{14} > 16^{14} = 2^{56} \Rightarrow 31^{11} < 17^{14}$$

Bài 2: So sánha. 11^{1979} và 37^{1321} b. 107^{50} và 51^{75} c. 3^{201} và 6^{119} **Lời giải:**

$$\begin{aligned} & 11^{1979} < 11^{1980} = (11^3)^{660} = 1331^{660}; \\ a. & 37^{1321} > 37^{1320} = (37^2)^{660} = 1369^{660} > 1331^{660} = 11^{1979} \\ b. & 107^{50} < 150^{50} = (3 \cdot 50)^{50} = 9^{25} \cdot 50^{50} < 50^{25} \cdot 50^{50} = 50^{75} < 51^{75} \\ c. & 3^{201} > 3^{200} = (3^5)^{40} = 243^{40}; 6^{119} < 6^{120} = (6^3)^{40} = 216^{40} \Rightarrow 3^{201} > 6^{119} \end{aligned}$$

Bài 3: Chứng minh rằng : $2^{1995} < 5^{863}$ **Lời giải**

$$\text{Có } 2^{10} = 1024, 5^5 = 3025 \Rightarrow 2^{10} \cdot 3 < 5^5 \Rightarrow 2^{1720} \cdot 3^{172} < 5^{860}$$

$$\text{Có } 3^7 = 2187; 2^{10} = 1024 \Rightarrow 3^7 > 2^{11}$$

$$3^{172} = (3^7)^{24} \cdot 3^4 > (2^{11})^{24} > (2^{11}) \cdot 2^6 = 2^{270} \Rightarrow 2^{1720} \cdot 2^{270} < 2^{1720} \cdot 3^{172} < 5^{860}$$

$$\text{Vậy } 2^{1990} < 5^{860} \text{ và } 2^5 < 5^3 \Rightarrow 2^{1995} < 5^{863}$$

Bài 4: Chứng minh rằng : $2^{1993} < 7^{714}$ **Lời giải**

$$\begin{cases} 2^{10} = 1025 \\ 7^3 = 343 \end{cases} \Rightarrow 2^{10} < 3 \cdot 7^3 \Rightarrow (2^{10})^{238} < 3^{238} \cdot (7^3)^{238} \Rightarrow 2^{2380} < 3^{238} \cdot 7^{714}$$

$$\begin{cases} 2^8 = 256 \\ 3^5 = 243 \end{cases} \Rightarrow 3^5 < 2^8$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } & \begin{cases} 3^{238} = 3^3 \cdot 3^{235} = 3^3 \cdot (3^5)^{47} < 3^3 (2^8)^{47} < 2^5 \cdot 2^{376} = 2^{381} \Rightarrow 3^{238} < 2^{381} \\ 2^{2380} < 3^{238} \cdot 7^{714} \end{cases} \\ & \Rightarrow 2^{2380} < 2^{381} \cdot 7^{714} \Rightarrow 2^{1999} < 7^{714} \end{aligned}$$

Bài 1: So sánh

a. 2^{500} và 5^{200}

b. 8^5 và 3.4^7

Lời giải:

a. $2^{500} = 32^{100}; 5^{200} = 25^{100} \Rightarrow 2^{500} > 5^{200}$

b. $8^5 = 2^{15} < 3.2^{14} = 3.4^7$

Bài 2: So sánh

a. 125^{80} và 25^{118}

b. 3^{210} và 2^{350}

c. 2^{3n} và 3^{2n} (n thuộc N^*)

d. $93^{67} - 93^{66}$ và $93^{66} - 93^{65}$

Lời giải:

a. $125^{80} = (5^3)^{80} = 5^{240}; 25^{118} = (5^2)^{118} = 5^{236} \Rightarrow 125^{80} > 25^{118}$

b. $3^{210} = 27^{70}; 2^{350} = 32^{70} \Rightarrow 2^{350} > 3^{210}$

c. $2^{3n} = 8^n; 3^{2n} = 9^n \Rightarrow 2^{3n} < 3^{2n} (\forall n \in N^*)$

d. $93^{66}(93-1) = 92.93^{66}; 93^{66} - 93^{65} = 93^{65}.92 \Rightarrow \dots$

Bài 3: So sánh

a. 54^4 và 21^{12}

b. 9^{20} và 27^{13}

c. 199^{20} và 2003^{15}

Lời giải:

a. $54^4 = 2^4.3^{12}; 21^{12} = 3^{12}.7^{12}; 2^4 < 7^{12} \Rightarrow 54^4 < 21^{12}$

b. $9^{20} = 3^{40}; 27^{13} = 3^{39} \Rightarrow 9^{20} > 27^{13}$

c.

$$199^{20} < 200^{20} = 2^{20}.10^{40} = 2^{15}.2^5.10^{40} < 2^{15}.10^5.10^{40} = 2^{15}.10^{45} = 2^{15}.1000^{15} = 2000^{15} < 2003^{15}$$

Bài 4: So sánh

a. 3^{39} và 11^{21}

b. 31^{11} và 17^{14}

c. 99^{20} và 9999^{10}

Lời giải:

a. $3^{39} < 3^{40} = 9^{20} < 11^{20} < 11^{21}$

b. $31^{11} < 32^{11} = 2^{55} < 2^{56} = 16^{14} < 17^{14}$

c. $99^{20} = (99^2)^{10} = 9801^{10} < 9999^{10}$

Bài 5: Cho $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^9$. Hãy so sánh S với 5.2^8 **Lời giải:**

$$S = 2^{10} - 1 < 2^{10} = 2^2 \cdot 2^8 = 4.2^8 < 5.2^8$$

Bài 6:

$$\text{a. So sánh } A = \frac{2008^{2008} + 1}{2008^{2009} + 1} \text{ và } B = \frac{2008^{2007} + 1}{2008^{2008} + 1}; b. M = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1} \text{ và } N = \frac{100^{101} + 1}{100^{100} + 1}$$

Lời giải:

Chú ý: Với a, b, c thuộc $\mathbb{N}^*$, có: +) Nếu $\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}; \frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$

$$\text{a. ta có: } A < 1 \Rightarrow \frac{2008^{2008} + 1}{2008^{2009} + 1} < \frac{2008^{2008} + 1 + 2007}{2008^{2009} + 1 + 2007} = \frac{2008(2008^{2007} + 1)}{2008(2008^{2008} + 1)} = B$$

$$\text{Cách khác: } 2008.A = 1 + \frac{2007}{2008^{2009} + 1}; \text{ và } 2008.B = 1 + \frac{2007}{2008^{2008} + 1} \Rightarrow B > A$$

$$\text{b. } N > 1 \Rightarrow \frac{100^{101} + 1 + 99}{100^{100} + 1 + 99} = \frac{100^{101} + 100}{100^{100} + 100} = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1} = M$$

$$\text{Bài 7: So sánh: } A = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1}; B = \frac{100^{69} + 1}{100^{68} + 1}$$

Lời giải:

Quy đồng mẫu số của A và B ta được:

$$A = \frac{(100^{100} + 1)(100^{68} + 1)}{(100^{99} + 1)(100^{68} + 1)}; B = \frac{(100^{69} + 1)(100^{99} + 1)}{(100^{99} + 1)(100^{68} + 1)}$$

Xét hiệu hai tử:

$$\begin{aligned} & (100^{100} + 1)(100^{68} + 1) - (100^{69} + 1)(100^{99} + 1) = (100^{168} + 100^{68} + 100^{100} + 1) - (100^{168} + 100^{99} + 100^{69}) \\ & = 100^{100} + 100^{68} - 100^{99} - 100^{69} = (100^{100} - 100^{99}) - (100^{69} - 100^{68}) = 100^{99}(100 - 1) - 100^{68}(100 - 1) \\ & = 99(100^{99} - 100^{68}) > 0 \end{aligned}$$

Vậy $A > B$.

Bài 4: SO SÁNH BIỂU THỨC LŨY THỪA VỚI MỘT SỐ (SO SÁNH HAI BIỂU THỨC LŨY THỪA)

- Thu gọn biểu thức lũy thừa bằng cách vận dụng các phép tính lũy thừa, cộng trừ các số theo quy luật
- Vận dụng phương pháp so sánh hai lũy thừa ở phần B.
- Nếu biểu thức lũy thừa là dạng phân thức: Đối với từng trường hợp bậc của lũy thừa ở tử lớn hơn hay bé hơn bậc của lũy thừa ở mẫu mà ta nhân với hệ số thích hợp nhằm tách phần nguyên rồi so sánh từng phần tương ứng.

***) Với $a, n, m, K \in \mathbb{N}^*$. Ta có:**

- Nếu $m > n$ thì $K - \frac{a}{m} > K - \frac{a}{n}$ và $K + \frac{a}{m} < K + \frac{a}{n}$

- Nếu $m < n$ thì $K - \frac{a}{m} < K - \frac{a}{n}$ và $K + \frac{a}{m} > K + \frac{a}{n}$

(còn gọi là phương pháp so sánh phần bù)

- Với biểu thức là tổng các số $\frac{1}{a^2}$ (với $a \in \mathbb{N}^*$) ta có vận dụng so sánh sau:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a}$$

Bài 1: Cho $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9$. So sánh S với 5.2^8

Lời giải:

$$2.S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^9 + 2^{10}$$

$$2S - S = 2^{10} - 1 \text{ hay } S = 2^{10} - 1 < 2^{10} = 2^8 \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^8 < 5 \cdot 2^8$$

Bài 2: Cho $A = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72}$ và $B = 2012^{73} - 1$. So sánh A và B.

Lời giải:

$$\text{Ta có } 2012A = 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{73}$$

$$\text{Lấy } 2012A - A = 2012^{73} - 1$$

$$\text{Vậy } A = (2012^{73} - 1) : 2011 < B = 2012^{73} - 1.$$

Bài tập 3: So sánh hai biểu thức: $B = \frac{3^{10} \cdot 11 + 3^{10} \cdot 5}{3^9 \cdot 2^4}$; $C = \frac{2^{10} \cdot 13 + 2^{10} \cdot 65}{2^8 \cdot 104}$

Lời giải:

$$B = \frac{3^{10} \cdot 11 + 3^{10} \cdot 5}{3^9 \cdot 2^4} = \frac{3^{10}(11+5)}{3^9 \cdot 16} = 3$$

$$C = \frac{2^{10} \cdot 13 + 2^{10} \cdot 65}{2^8 \cdot 104} = \frac{2^{10}(13+65)}{2^8 \cdot 104} = \frac{2^2 \cdot 78}{104} = 3$$

Vậy $B = C$

Bài tập 4: So sánh 2 biểu thức A và B trong từng trường hợp:

$$a) A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1} \quad \text{và} \quad B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}$$

$$b) C = \frac{2^{2008} - 3}{2^{2007} - 1} \quad \text{và} \quad D = \frac{2^{2007} - 3}{2^{2006} - 1}$$

Lời giải

- Ở câu a, biểu thức A và B có chứa lũy thừa cơ số 10 $\rightarrow$ ta so sánh $10A$ và $10B$

- Ở câu b, biểu thức C và D có chứa lũy thừa cơ số 2 nên ta so sánh $\frac{1}{2}C$ và $\frac{1}{2}D$

$$a) \text{ Ta có } A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1} \Rightarrow 10A = 10 \cdot \left(\frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1} \right) = \frac{10^{16} + 10}{10^{16} + 1} = \frac{10^{16} + 1 + 9}{10^{16} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{16} + 1}$$

$$B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1} \Rightarrow 10B = 10 \cdot \left(\frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1} \right) = \frac{10^{17} + 10}{10^{17} + 1} = \frac{10^{17} + 1 + 9}{10^{17} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{17} + 1}$$

$$\text{Vì } 10^{16} + 1 < 10^{17} + 1 \text{ nên } \frac{9}{10^{16} + 1} > \frac{9}{10^{17} + 1}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{9}{10^{16} + 1} > 1 + \frac{9}{10^{17} + 1} \Rightarrow 10A > 10B \text{ hay } A > B$$

$$b) \text{ Ta có } C = \frac{2^{2008} - 3}{2^{2007} - 1} \Rightarrow \frac{1}{2}C = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2^{2008} - 3}{2^{2007} - 1} \right) = \frac{2^{2008} - 3}{2^{2008} - 2} = \frac{2^{2008} - 2 - 1}{2^{2008} - 2} = 1 - \frac{1}{2^{2008} - 2}$$

$$D = \frac{2^{2007} - 3}{2^{2006} - 1} \Rightarrow \frac{1}{2}D = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2^{2007} - 3}{2^{2006} - 1} \right) = \frac{2^{2007} - 3}{2^{2007} - 2} = \frac{2^{2007} - 2 - 1}{2^{2007} - 2} = 1 - \frac{1}{2^{2007} - 2}$$

$$\text{Vì } 2^{2008} - 2 > 2^{2007} - 2 \text{ nên } \frac{1}{2^{2008} - 2} < \frac{1}{2^{2007} - 2}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2^{2008} - 2} > 1 - \frac{1}{2^{2007} - 2} \Rightarrow \frac{1}{2}C > \frac{1}{2}D \text{ hay } C > D$$

Bài tập 5: So sánh $M = \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4}$ và $N = \frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4}$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4} = \frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} + \frac{4}{8^4} = \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} \right) + \frac{4}{8^4}$$

$$\frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4} = \frac{3}{8^3} + \frac{4}{8^3} + \frac{3}{8^4} = \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} \right) + \frac{4}{8^3}$$

$$\text{Vì } \frac{4}{8^4} < \frac{4}{8^3} \Rightarrow \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} \right) + \frac{4}{8^4} < \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} \right) + \frac{4}{8^3} \Rightarrow M < N$$

Bài tập 6: So sánh M và N biết: $M = \frac{19^{30} + 5}{19^{31} + 5}$; $N = \frac{19^{31} + 5}{19^{32} + 5}$

Lời giải:

$$M = \frac{19^{30} + 5}{19^{31} + 5} \text{ nên } 19M = \frac{19 \cdot (19^{30} + 5)}{19^{31} + 5} = \frac{19^{31} + 95}{19^{31} + 5} = 1 + \frac{90}{19^{31} + 5}$$

$$N = \frac{19^{31} + 5}{19^{32} + 5} \text{ nên } 19N = \frac{19 \cdot (19^{31} + 5)}{19^{32} + 5} = \frac{19^{32} + 95}{19^{32} + 5} = 1 + \frac{90}{19^{32} + 5}$$

$$\text{Vì } \frac{90}{19^{31} + 5} > \frac{90}{19^{32} + 5}$$

$$\text{Suy ra } 1 + \frac{90}{19^{31} + 5} > 1 + \frac{90}{19^{32} + 5}$$

$$\text{Hay } 19M > 19N \Rightarrow M > N$$

Bài tập 7: So sánh $\frac{1}{101^2} + \frac{1}{102^2} + \frac{1}{103^2} + \frac{1}{104^2} + \frac{1}{105^2}$ và $\frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7}$

Lời giải:

$$\text{Nếu } n \text{ là số tự nhiên lớn hơn 1 thì ta có: } \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n-1)}{(n-1) \cdot n} = \frac{n - n + 1}{(n-1) \cdot n} = \frac{1}{(n-1)n} > \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Áp dụng vào bài toán ta được:

$$\frac{1}{101^2} < \frac{1}{100} - \frac{1}{101}$$

$$\frac{1}{102^2} < \frac{1}{101} - \frac{1}{102}$$

.....

$$\frac{1}{105^2} < \frac{1}{104} - \frac{1}{103}$$

$$\frac{1}{101^2} + \frac{1}{102^2} + \dots + \frac{1}{105^2} < \frac{1}{100} - \frac{1}{105} = \frac{105 - 100}{100 \cdot 105} = \frac{5}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{1}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 7}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{102^2} + \dots + \frac{1}{105^2} < \frac{1}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 7}$$

Bài tập 8: So sánh $A = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$ và $-\frac{1}{2}$

Lời giải:

A là tích của 99 số âm. Do đó:

$$-A = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100^2}\right)$$

$$-A = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \cdots \frac{9999}{100^2} = \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \cdots \frac{99.101}{100^2}$$

Để dễ rút gọn ta viết từ dưới dạng tích các số tự nhiên liên tiếp như sau:

$$-A = \frac{1.2.3.4.5.6 \cdots 98.99}{2.3.4.5 \cdots 99.100} \cdot \frac{3.4.5 \cdots 100.101}{2.3.4 \cdots 99.100} = \frac{1}{100} \cdot \frac{101}{2} = \frac{101}{200} > \frac{1}{2}$$

Vậy $A < -\frac{1}{2}$

BÀI 5: PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG ĐỂ TÌM THÀNH PHẦN CHƯA BIẾT CỦA LŨY THỪA

A. Phương pháp

- +) $x^n = 0$ (n thuộc N^*) khi $x = 0$
- +) $x^n = a^n$ (n thuộc N^*) khi $x = a$
- +) $a^x = 0$ ($a \neq 0$) $\rightarrow$ không tồn tại $x \rightarrow$ vô nghiệm
- +) $a^x = 1$ ($a \neq 1$) khi $x = 0$
- +) $a^x = a^n$ ($a \neq 0$; $a \neq 1$) khi $x = n$
- +) $a^x = b^x$ ($a \neq b$; $a, b \neq 0$) khi $x = 0$

B. Bài tập

Bài 1: Tìm số tự nhiên x thỏa mãn:

- | | |
|------------------|------------------------|
| a. $6^x = 216$ | c. $(x-2)^6 = (x-2)^8$ |
| b. $3^{2x} = 81$ | d. $2.(2x-1)^2 = 50$ |

Lời giải:

a. $6^x = 216 \Leftrightarrow 6^x = 6^3 \Leftrightarrow x = 3$

b. $3^{2x} = 81 \Leftrightarrow 3^{2x} = 9^2 = 3^4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

c. $(x-2)^6 = (x-2)^8 \Leftrightarrow (x-2)[(x-2)^2 - 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^6 = 0 \\ (x-2)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x-2=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \\ x=1 \end{cases}$

Bài 2: Tìm x , biết:

- | | | |
|--------------------------------------|---|---|
| a. $(7x-11)^3 = 2^5 \cdot 5^2 + 200$ | b. $7^{3x-2} - 3 \cdot 7^3 = 7^3 \cdot 4$ | c. $\frac{1}{9} \cdot 3^5 \cdot 3^x = 3^{2x+1}$ |
|--------------------------------------|---|---|

Lời giải

a. $(7x-11)^3 = 2^5 \cdot 5^2 + 200 \Leftrightarrow (7x-11)^3 = 1000 = 10^3 \Leftrightarrow 7x-11=10 \Leftrightarrow x=3.$

b. $7^{3x-2} - 3 \cdot 7^3 = 7^3 \cdot 4 \Leftrightarrow 7^{3x-2} = 7^3(3+4) \Leftrightarrow 7^{3x-2} = 7^4 \Leftrightarrow x=2$

c. $\frac{1}{9} \cdot 3^5 \cdot 3^x = 3^{2x+1} \Leftrightarrow 3^3 \cdot 3^x = 3^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{x+3} = 3^{2x+1} \Leftrightarrow x+3=2x+1 \Leftrightarrow x=2$

Bài 3: Tìm x, biết:

a. $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$ b. $5^{x+1} - 5^x = 2.2^x + 8.2^x$ c. $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2.2^x + 4.2^x$

Lời giải

a.

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480 \Leftrightarrow 2^x(1 + 2 + 2^2 + 2^3) = 480 \Leftrightarrow 2^x.15 = 480 \Leftrightarrow 2^x = 2^5 \Leftrightarrow x = 5$$

$$5^{x+1} - 5^x = 2.2^x + 8.2^x \Leftrightarrow 5^x(5 - 1) = 2^x(2 + 8) \Leftrightarrow 2^2.5^x = 2^{x+1}.5$$

b. $\Leftrightarrow \frac{2^2.5^x}{2^2.5} = \frac{2^{x+1}.5}{2^2.5} \Leftrightarrow 5^{x-1} = 2^{x-1} \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

c. $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2.2^x + 4.2^x \Leftrightarrow 7.6^x = 7.2^x \Leftrightarrow 6^x = 2^x \Leftrightarrow x = 0$

Bài 4: Tìm x thuộc N, biết rằng

a. $x^{15} = x$ b. $(2x+1)^3 = 343$ c. $3^x + 25 = 26.2^3 + 2.3^0$
d. $2^{x+2} - 2^x = 96$ e. $720 : [41 - (2x-5)] = 2^3.5$ f. $5^{2x-3} - 2.5^2 = 5^2.3$

Lời giải

a. $x^{15} = x \Leftrightarrow x^{15} - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ b. $(2x+1)^3 = 343 = 7^3 \Leftrightarrow x = 3$

c. $3^x + 25 = 26.2^3 + 2.3^0 \Leftrightarrow 3^x = 185$ (vonghiem) d.

$$2^{x+2} - 2^x = 96 \Leftrightarrow 2^x = 32 \Leftrightarrow x = 5$$

e. $720 : [41 - (2x-5)] = 2^3.5 \Leftrightarrow x = 14$ f. $5^{2x-3} - 2.5^2 = 5^2.3 \Leftrightarrow x = 3$

Bài 5: Tìm x nguyên dương, biết

a. $3^x + 3^{x+1} - 3^{x+2} + 3^{x+3} = 594$ b. $(2^x + 1)(3^x + 1) = 1394$

Lời giải

a. $3^x + 3^{x+1} - 3^{x+2} + 3^{x+3} = 594 \Leftrightarrow 3^x(1 + 3 - 9 + 27) = 594 \Leftrightarrow x = 3$

b. $(2^x + 1)(3^x + 1) = 1394 = 2.697 = 2.17.41 = 17.82$

Nhận xét: $2^x + 1$ lẻ nếu $x \geq 1$; $2^x + 1$ chẵn nếu $x = 0$; $3^x + 1$ luôn chẵn

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x + 1 = 17 \\ 3^x + 1 = 82 \end{cases} \Rightarrow x = 4$$

Bài 6: Tìm x thuộc N, biết: $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 1080$

Lời giải

$$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 1080 \Leftrightarrow 3^x(1 + 3 + 9 + 27) = 1080 \Leftrightarrow 3^x = 27 \Leftrightarrow x = 3$$

Bài 7: Tìm x, biết: $x \cdot (6-x)^{2003} = (6-x)^{2003}$

Lời giải:

$$x = 1 \text{ hoặc } x = 6$$

Bài 8: Tìm x, biết: $(x-1)^{x+2} = (x-1)^{x+4}$ (1)

Lời giải:

$$\text{Đặt } x-1 = y \text{ suy ra: } x+2 = y+3; x+4 = y+5$$

$$(1) \Leftrightarrow y^{y+3} = y^{y+5} \Leftrightarrow y^{y+3}(y^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y^{y+3} = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \Rightarrow x \in \{0; 1; 2\} \\ x = 2 \end{cases}$$

Bài 9: Tìm hai số tự nhiên m, n biết: $2^m + 2^n = 2^{m+n}$

Lời giải:

$$2^m + 2^n = 2^{m+n} \Leftrightarrow 2^{m+n} - 2^m - 2^n = 0 \Rightarrow 2^m \cdot 2^n - 2^m - 2^n + 1 = 1 \Rightarrow 2^m(2^n - 1) - (2^n - 1) = 1 \Leftrightarrow (2^m - 1)(2^n - 1) = 1$$

Vì: 2^m và $2^n \geq 1$ với mọi m, n thuộc N

$$\text{Nên: } \Rightarrow \begin{cases} 2^m - 1 = 1 \\ 2^n - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^m = 2 \\ 2^n = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \end{cases}$$

Vậy $m = n = 1$.

Bài 10: Tìm x thuộc N, biết

a. $16^x < 128^4$

b. $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} \leq \underbrace{100 \dots 00}_{18 \text{ chũ số}} : 2^{18}$

Lời giải

a. $16^x < 128^4 \Rightarrow (2^4)^x < (2^7)^4; 4^{4x} < 2^{28} \Rightarrow 4x < 28 \Rightarrow x < 7 \Rightarrow x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

b. $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} \leq \underbrace{100 \dots 00}_{18 \text{ chũ số}} : 2^{18} \Rightarrow$

$$5^{3x+3} \leq 10^{18} : 2^{18} \Rightarrow 5^{3x+3} \leq 5^{18-3x-3} \leq 18 \Rightarrow x \leq 5 \Rightarrow x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Bài 11: Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$. Tìm số tự nhiên n, biết $2A + 3 = 3^n$.

Lời giải

Có $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$.

$$3A = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101}.$$

$$\text{Suy ra: } 3A - A = 3^{101} - 3$$

$$\text{Hay: } 2A = 3^{101} - 3 \Rightarrow 2A + 3 = 3^{101}, \text{ mà theo đề bài ta có: } 2A + 3 = 3^n.$$

$$\text{Suy ra: } 3^{101} = 3^n \Rightarrow n = 101.$$

Bài 12: Tìm các số nguyên dương m và n sao cho: $2^m - 2^n = 256$

Lời giải

Ta có : $2^m - 2^n = 256 = 2^8 \Rightarrow 2^n(2^{m-n} - 1) = 2^8$ (1)

Để thấy $m \neq n$ Ta xét 2 trường hợp:

- Nếu $m - n = 1$ thì (1) ta có $2n(2-1) = 2^8 \Rightarrow n = 8; m = 9$

- Nếu $m - n \geq 2 \Rightarrow 2^{m-n} - 1$ là một số lẻ lớn hơn 1 nên vế trái của (1) chứa thừa số nguyên tố lẻ khi phân tách ra thừa số nguyên tố. Còn vế phải của (1) chỉ chứa thừa số nguyên tố 2 $\Rightarrow$ Mâu thuẫn.

Vậy $n = 8; m = 9$ là đáp số duy nhất

Bài 13: Tìm số nguyên dương n biết:

a. $64 < 2^n < 256$

b. $243 > 3^n \geq 9$

Lời giải

a) $64 < 2^n < 256 \Rightarrow 2^6 < 2^n < 2^8 \Rightarrow 6 < n < 8$, n nguyên dương. Vậy $n =$

b) $243 > 3^n \geq 9 \Rightarrow 3^5 > 3^n \geq 3^2 \Rightarrow 5 > n \geq 2$, n nguyên dương. Vậy $n = 4; 3; 2$

Bài 14: Tìm số nguyên n lớn nhất sao cho: $n^{200} < 6^{300}$

Lời giải

Ta có: $n^{200} = (n^2)^{100}; 6^{300} = (6^3)^{100} = 216^{100}$

Để $n^{200} < 6^{300} \Leftrightarrow (n^2)^{100} < 216^{100} \Leftrightarrow n^2 < 216$ và $n \in \mathbb{Z}$ (*)

Số nguyên lớn nhất thỏa mãn (*) là $n = 14$

Bài 15: Tìm các số nguyên n thỏa mãn: $3^{64} < n^{48} < 5^{72}$

Lời giải

Ta giải từng bất đẳng thức $3^{64} < n^{48}$ và $n^{48} < 5^{72}$

Ta có : $n^{48} > 3^{64} \Leftrightarrow (n^3)^{16} > (3^4)^{16} \Leftrightarrow (n^3)^{16} > 81^{16} \Leftrightarrow n^3 > 81$

Vì $n \in \mathbb{Z}$ nên $n > 4$ (1)

Mặt khác $n^{48} < 5^{72} \Leftrightarrow (n^2)^{24} < (5^3)^{24} \Leftrightarrow (n^2)^{24} < 125^{24} \Leftrightarrow n^2 < 125$

và $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow -11 \leq n \leq 11$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 4 < n \leq 11$. Vậy $n \in \{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$

*** Từ bài toán trên có thể thay đổi câu hỏi để được các bài toán sau:**

Số1: Tìm tổng các số nguyên n thỏa mãn: $3^{64} < n^{48} < 5^{72}$

(giải tương tự trên ta có các số nguyên n thỏa mãn là $5+6+7+8+9+10+11=56$)

Số2: Tìm tất cả các số nguyên có một chữ số sao cho $3^{64} < n^{48} < 5^{72}$ (số 5; 6; 7; 8; 9;)

Số3: Tìm tất cả các số nguyên có 2 chữ số sao cho $3^{64} < n^{48} < 5^{72}$ (số 10; 11)

BÀI 6: PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ ĐỂ TÌM THÀNH PHẦN CHƯA BIẾT CỦA LŨY THỪA

A. PHƯƠNG PHÁP

Nội dung bài toán : Tìm x để $VT(x) = VP$, ta đi đánh giá như sau :

- Nếu $x > x_0$ thì $VT(x) > VP$
- Nếu $x < x_0$ thì $VT(x) < VP$
- Nếu $x = x_0$ thì $VT(x) = VP$

Kết luận $x = x_0$ là giá trị cần tìm

Bài 1: Tìm STN $x > 0$, thỏa mãn :

a. $4^{x-1} + 4^x = 5$

b. $3^x + 3^{2x-1} = 2268$

Lời giải :

a. Nhận thấy nếu $x > 1$ thì $4^{x-1} > 4^{1-1} = 4^0 = 1$; $4^x > 4^1 = 4 \Rightarrow 4^{x-1} + 4^x > 5$ (loại)

+) Nếu $x = 1$ thì $4^{x-1} + 4^x = 4^0 + 4^1 = 5 = VP$ (thỏa mãn)

Vậy $x = 1$ thỏa mãn bài toán.

b. Nhận thấy nếu $x = 4$ thì : $VT = VP$

+) Nếu $x > 4$ thì $3^x + 3^{2x-1} > 3^4 + 3^7 = 2268$ (Loại)

+) Nếu $x < 4$ thì $3^x + 3^{2x-1} < 2268 = VP$ (Loại)

Bài 2: Tìm STN x , thỏa mãn

a. $2^x + 5^x + 7^x = 14$

b. $2^x + x = 20$

c. $2^x = 46 - 3x$ (1)

Lời giải :

a. Nhận thấy

+) Nếu $x = 0$ thì $2^x + 5^x + 7^x = 3 \neq 14$ (Loại)

+) Nếu $x = 1$ thì thỏa mãn

+) Nếu $x > 1$ thì $2^x + 5^x + 7^x > 14$ (Loại)

Vậy $x = 1$

b. Nhận thấy

+) Nếu $x = 4$ thì $2^x + x = 20$ (thỏa mãn)

+) Nếu $x > 4$ thì $2^x + x > 2^4 + 4 = 20$ (Loại)

+) Nếu $0 < x < 4$ thì $2^x + x < 2^4 + 4 = 20$ (Loại)

Vậy $x = 4$.

c. $2^x = 46 - 3x \Rightarrow 2^x + 3x = 46$

+) Nếu $x \geq 5 \Rightarrow 2^x \geq 2^5 = 32$; $3x \geq 3.5 = 15 \Rightarrow 2^x + 3x \geq 47 > 46$ (Loại)

+) Nếu $x \leq 4 \Rightarrow 2^x \leq 2^4 = 16$; $3x \leq 3.4 = 12 \Rightarrow 2^x + 3x \leq 28 < 46$ (Loại)

Vậy không tồn tại giá trị nào của x thỏa mãn bài toán.

Bài 3: Tìm x thuộc $\mathbb{N}$, biết: $3^x + 3^{x+1} + 2^{x+2} = 388$ (1)

Lời giải :

Nếu $x < 4$, VT(1) < VP (1) $\rightarrow$ Loại

Nếu $x > 4$, VT > VP $\rightarrow$ Loại

Nếu $x = 4 \rightarrow$ VT = VP (thỏa mãn). Vậy $x = 4$

Bài 4: Tìm x, y, z thuộc $\mathbb{N}$, biết: $x \leq y \leq z$ và: $2^x + 3^y + 5^z = 156$ (1)

Lời giải :

Từ (1) $\rightarrow 5^z < 165 \rightarrow z \leq 3 \Rightarrow z \in \{0, 1, 2, 3\}$

+) Nếu $z = 3 \rightarrow x \leq y \leq 3$, thay vào (1) ta được: $2^x + 3^y + 125 = 156 \Leftrightarrow 2^x + 3^y = 31$ (2)

Ta có: $3^y < 31$ và $y \leq 3$

+) Nếu $y = 3$, thay vào (2) ta được: $2^x = 4 \rightarrow x = 2$ (thỏa mãn)

Vậy $x = 2; y = 3; z = 4$

Cách khác :

Ta có: $5^z < 156 \rightarrow z \leq 3$

+) $z = 2 \rightarrow x \leq y \leq 2$, thay vào (1): VT(1) $\leq 2^2 + 3^2 + 5^2 < 156$ (loại) $\rightarrow z = 3$

Thay vào (1): $2^x + 3^y + 5^3 = 156 \rightarrow 2^x + 3^y = 31$ (*) ($x \leq y \leq 3$)

Nếu $y \leq 2 \rightarrow x \leq 2 \rightarrow 2^x + 3^y \leq 2^2 + 3^2 = 13 < 31$ (loại)

Vậy $y = 3 \rightarrow 2^x + 3^3 = 31 \rightarrow 2^x = 4 \rightarrow x = 2$. Vậy $x = 2; y = 3; z = 4$

Bài 5: Tìm các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn: $2^{x^2+2} + 3^{2y+1} + 5^z = 40$ (1)

Lời giải:

Nhận thấy $2^{x^2+2} < 40 \Leftrightarrow x^2 + 2 \leq 5 \Leftrightarrow x^2 \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

+) Nếu $x = 0$, (1) trở thành: $2^2 + 3^{2y+1} + 5^z = 40 \Leftrightarrow 3^{2y+1} + 5^z = 36$ (2)

Ta có: VT (2) không chia hết cho 3; VP(3) chia hết cho 3 $\rightarrow$ Loại (Hoặc cứ xét tiếp)

+) Nếu $x = 1$, (1) trở thành: $2^3 + 3^{2y+1} + 5^z = 40 \Leftrightarrow 3^{2y+1} + 5^z = 32$ (3)

Ta có: $3^{2y+1} < 32 \Leftrightarrow 2y+1 \leq 3 \Leftrightarrow y \leq 1$

+) $y = 1$, (3) trở thành: $27 + 5^z = 32 \Leftrightarrow z = 1$

+) $y = 0$, (3) trở thành: $3 + 5^z = 32 \Leftrightarrow 5^z = 29$ (loại)

Vậy $x = y = z = 1$.

Bài 6: (khó). Tìm các STN x, y, z thỏa mãn: $2^x + 2^y + 2^z = 2^{10}$

Lời giải :

Vì x, y, z có vai trò như nhau nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $x \leq y \leq z$.

$$\text{Ta có : } 2^{10} = 1024 = 2^x + 2^y + 2^z \geq 3 \cdot 2^x \Rightarrow 2^x \cdot 3 \leq 2^{10} \Rightarrow x \leq 8.$$

$$\text{Ta có : } 2^x + 2^y + 2^z = 2^{10} \Leftrightarrow 2^x(1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}) = 2^{10} \Leftrightarrow 1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 2^{10-x} \geq 2^{10-8} = 4(*)$$

$$+) \text{ Nếu } y > x \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow y - x \geq 1; z - x \geq 1$$

VT(*) là số lẻ, VP(*) là số chẵn (Loại) $\Rightarrow y = x$, thay vào (*)

$$(*) \Leftrightarrow 1 + 2^0 + 2^{z-x} = 2^{10-x} \geq 2^{10-8} (**)$$

Nếu $z - x = 0 \Rightarrow VT(**) = 3; VP(**)$ là số chẵn (Loại)

$$\Rightarrow z - x \geq 1 \Rightarrow (**) \Leftrightarrow 2 + 2^{z-x} = 2^{10-x} \Leftrightarrow 1 + 2^{z-x-1} = 2^{9-x} (***)$$

$\geq 1 \Rightarrow VT(***)$ là số lẻ; $VP(***)$ là số chẵn $\Rightarrow$ Loại

$$\text{Nếu } z - x - 1 \Rightarrow z - x - 1 = 0, (***) \Rightarrow 2 = 2^{9-x} \Rightarrow x = 8 \Rightarrow y = 8; z = 9$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Tìm x thuộc $\mathbb{N}$ thỏa mãn : $5^x + 5^{x+2} = 650$

Lời giải :

$$5^x + 5^{x+2} = 650 \Leftrightarrow 5^x(1 + 5^2) = 650 \Leftrightarrow x = 2$$

Bài 2: Tìm x thuộc $\mathbb{N}$, biết rằng : $2^x = 46 - 3x$

Lời giải :

$$+) \text{ Nếu } x \geq 5 \Rightarrow 2^x \geq 2^5 = 32; 3x \geq 15 \Rightarrow 2^x + 3x \geq 47(\text{loại})$$

$$+) \text{ Nếu } \Rightarrow 2^x \leq 2^4 = 16; 3x \leq 12 \Rightarrow VT \leq 28(\text{loại}) . \text{ Vậy không tồn tại } x$$

Bài 3: $x \in \mathbb{N}$, biết: $3^x + 3^{x+1} + 2^{x+2} = 388$

Lời giải :

Đánh giá nếu $x < 4$ thì $VT < VP$; Nếu $x > 4$ thì $VT > VP$. Vậy $x = 4$

Bài 4: Tìm x, y thuộc $\mathbb{N}$, biết rằng: $x \leq y \leq z$ và: $2^x + 3^y + 5^z = 156(1)$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } 5^z \leq 156 \text{ suy ra } z \leq 3$$

$$+) \text{ Nếu } z \leq 2 \text{ thì } x \leq y \leq 2$$

$$VT(1) \leq 2^2 + 3^2 + 5^2 < 156 (\text{ loại}) \text{ suy ra } z = 3$$

$$\text{Thay vào (1) được : } 2^x + 3^y + 5^3 = 156 \Leftrightarrow 2^x + 3^y = 31(2)(x \leq y \leq 3)$$

$$\text{Nếu } y \leq 2 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow 2^x + 3^y \leq 2^2 + 3^2 = 13(\text{loại}) \Rightarrow y = 3 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$$

Bài 5: Tìm các số nguyên dương x sao cho : $3^x + 4^x = 5^x$

Lời giải :

$$3^x + 4^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$$

+) $x = 1$ không thỏa mãn ; $x = 2$ thỏa mãn

$$\text{Nếu } x \geq 3 \text{ thì : } \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 ; \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 < 1$$

Vậy $x = 2$ là giá trị cần tìm

Bài 6: Tìm các số nguyên x, y sao cho : $5x^3 = 3^y + 317$

Lời giải:

+) nếu $y = 0$ không thỏa mãn

+) Nếu $y = 1$ thì $x = 4$ thỏa mãn

+) Nếu $y \geq 2$ thì 3^y chia hết cho 9, mà 317 chia 9 dư 2 và $5x^3 = 3^y + 317$ nên $5x^3$ chia 9 dư 2.

Điều này mâu thuẫn vì $5x^3$ chia 9 dư 0, hoặc 4

Vậy $x = 4 ; y = 1$ thỏa mãn bài toán.

BÀI 7: MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC TÌM THÀNH PHẦN CHƯA BIẾT CỦA LŨY THỪA

Bài 1: Tìm các STN x, y, z khác 0, biết : $x^2 + y^2 + z^2 = 116$ và khi chia x, y, z cho 2, 3, 4 thì được thương bằng nhau và số dư bằng 0

Lời giải :

Theo đầu bài, ta đặt $x = 2m ; y = 3m ; z = 4m$ (m thuộc $\mathbb{N}^*$)

$$\text{Vì } x^2 + y^2 + z^2 = 116 \text{ nên : } (2m)^2 + (3m)^2 + (4m)^2 = 116 \Leftrightarrow 29m^2 = 116 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy $x = 4 ; y = 6 ; z = 8$

Bài 2: Tìm các số tự nhiên x, y biết rằng

a. $2^x + 124 = 5^y$

b. $2^x + 80 = 3^y$

Lời giải :

a. Nếu $x \geq 1$ thì 2^x luôn là một số chẵn $\rightarrow 2^x + 124$ luôn là một số chẵn

Mặt khác 5^y luôn là một số lẻ với mọi y thuộc $\mathbb{N} \rightarrow 2^x + 124 \neq 5^y$ (loại)

b. Tương tự $x = 0 ; y = 4$

Bài 3: Tìm các số nguyên dương x, a, b , biết rằng : $4x + 19 = 3^a$ (1) và $2x + 5 = 3^b$

Lời giải :

Ta phải khử 1 trong 3 ẩn là a, b hoặc x

Theo đề bài, ta có : $2x + 5 = 3^b$ suy ra $4x + 10 = 2 \cdot 3^b$ (2)

$$(1) - (2) : 9 = 3^a - 2 \cdot 3^b (*)$$

$$\Rightarrow a > b \geq 3 \Rightarrow VP(*) : 3 \Rightarrow VP : 3^3; \text{ mà } VT(*) = 9 : 3$$

$$\text{Nếu } b > 2 \text{ theo } (*) \Rightarrow VT(*) \neq VP(*) \text{ (loại)} \Rightarrow b \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ b=2 \end{cases}$$

+) Nếu $b = 1$ suy ra $9 = 3^a - 6$ suy ra $3^a = 15$ (loại)

+) Nếu $b = 2$ suy ra $a = 3$. Vì $2x + 5 = 3^b$ suy ra $x = 2$

Bài 4: Tìm x, y thuộc $\mathbb{N}^*$, thỏa mãn : $2^x + 57 = y^2$ (1)

Lời giải :

Nếu x là số lẻ, đặt $x = 2k + 1 \Rightarrow 2^x = 2^{2k+1} = 4^k \cdot 2$ Chia cho 3 dư 2
:3 dư 1

$VT(1)$ chia 3 dư 2 ; $VP(1)$ chia 3 dư 0 hoặc 1 $\Rightarrow$ Loại. vậy x phải là số chẵn

$$\text{Đặt } x = 2k \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2^{2k} + 57 = y^2 \Leftrightarrow y^2 - (2^k)^2 = 57 \Leftrightarrow (y - 2^k)(y + 2^k) = 57 = 1 \cdot 57 = 3 \cdot 19$$

$$+) \text{ TH1 : } \begin{cases} y - 2^k = 1 \\ y + 2^k = 57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 29 \\ 2^k = 28 \text{ (không } \exists k) \end{cases}$$

$$+) \text{ TH2 : } \begin{cases} y - 2^k = 3 \\ y + 2^k = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 11 \\ 2^k = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 11 \\ k = 3 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$$

Bài 5: Hai số tự nhiên x, y thỏa mãn : $x^2 - 2y^2 = 1$. CMR : y là số chẵn

Lời giải :

$$x^2 - 2y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2y^2 + 1$$

Giả sử y là số lẻ $\Rightarrow y^2$ chia 4 dư 1 ; $2y^2$ chia 4 dư 2 ; $2y^2 + 1$ chia 4 dư 3 ; mà x^2 chia 4 dư 0 hoặc 1 suy ra : y phải chẵn (đpcm)

Bài 6: Tìm các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn : $a^3 + 3a^2 + 5 = 5^b$ và $a + 3 = 5^c$

Lời giải:

$$a^3 + 3a^2 + 5 = 5^b \Leftrightarrow a^2(a + 3) + 5 = 5^b \Leftrightarrow a^2 \cdot 5^c + 5 = 5^b \Rightarrow \begin{cases} b > c \geq 1 \\ b > 1 \text{ (hoặc } b > 5) \end{cases}$$

$$\text{mà } 5^b \text{ chia hết 25 với mọi } b \geq 3 \Rightarrow c \geq 2 \text{ (loại)} \Rightarrow c = 1; a = 2; b = 2$$

Bài 7: Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn: $x \leq y$ và $x^2 + y^2 = 20^2$ (1)

Lời giải:

Ta có 20^2 là số chẵn suy ra x, y phải cùng tính chẵn lẻ

Nếu x, y lẻ $\Rightarrow VT : 4$ dư 2 ; $VP : 4$ dư 0 $\Rightarrow$ vô lý $\Rightarrow x, y$ cùng chẵn

$$\text{Đặt } x = 2x_1 ; y = 2y_1, \text{ thay vào (1), được: } \underbrace{x_1^2 + y_1^2}_{\text{:4 dư 2}} = \underbrace{10^2}_{\text{chia 4 dư 0}}$$

Suy ra $x_1; y_1$ phải chẵn ; Đặt $x_1 = 2x_2; y_1 = 2y_2 \Rightarrow x_2^2 + y_2^2 = 5^2$

Ta có : $x \leq y \Rightarrow x_2^2 \leq y_2^2$

$$\text{Từ } x_2^2 + y_2^2 = 5^2 \Rightarrow \begin{cases} y_2 < 5 \\ 2y_2^2 \geq 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 < 5 \\ y_2 \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 12 \end{cases}$$

Bài 8: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình : $3^x + 63 = y^2$ (1)

Lời giải:

Giả sử x là số lẻ : $x = 2k + 1$ (k thuộc $\mathbb{N}$) $\Rightarrow 3^x = 3^{2k+1} = 3 \cdot 9^k$

Ta có 9 chia 4 dư $1 \Rightarrow 9^k$ chia 4 dư $1 \Rightarrow 3 \cdot 9^k$ chia 4 dư $3 \Rightarrow 9^k + 63$ chia 4 dư 2 ; mà y^2 chia 4 dư 0 hoặc 1 . Suy ra loại.

Vậy x là số chẵn. Đặt $x = 2k$ và thay vào (1), được : $3^{2k} + 63 = y^2$

$$\Leftrightarrow (3^k)^2 + 63 = y^2 \Leftrightarrow 63 = y^2 - (3^k)^2 = (y - 3^k)(y + 3^k)$$

$$+) \text{ TH1 : } \begin{cases} y - 3^k = 1 \\ y + 3^k = 63 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 32 \\ 3^k = 31(\text{loại}) \end{cases}$$

$$+) \text{ TH2 : } \begin{cases} y - 3^k = 3 \\ y + 3^k = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 12 \\ 3^k = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 12 \\ k = 2 \end{cases} (t/m)$$

$$+) \text{ TH3 : } \begin{cases} y - 3^k = 7 \\ y + 3^k = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 8 \\ 3^k = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 8 \\ k = 0 \end{cases} (\text{loại})$$

Vậy $x=4; y=12$

BÀI 7: TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG

A. Chữ số tận cùng của một tích

- Chữ số tận cùng của một tích bằng chữ số tận cùng của tích các chữ số hàng đơn vị.
- Tích các số lẻ luôn là một số lẻ
- Tích của số chẵn và một số TN bất kỳ luôn là một số chẵn
- $\overline{x0.a} = \overline{y0}$ - $\overline{x5.a} = \overline{y0}$ (với a chẵn) - $\overline{x5.a} = \overline{y5}$ (với a lẻ)

B. Chữ số tận cùng của lũy thừa

- $\overline{x0^n} = \overline{y0}$ (các STN tận cùng bằng 0 khi nâng lên lũy thừa bậc n thì chữ số tận cùng bằng 0)
- $\overline{x1^n} = \overline{y1}; \overline{x5^n} = \overline{y5}; \overline{x6^n} = \overline{y6} (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\overline{x2^{4k}} = \overline{y6} (k \neq 0); \overline{x2^{4k+1}} = \overline{y2}; \overline{x2^{4k+2}} = \overline{y4}; \overline{x2^{4k+3}} = \overline{y8}$

$$\overline{x9}^{2k} = \overline{y1}; \overline{x9}^{2k+1} = \overline{y9}$$

b. $207^{201^{202^{203}}}$

Ta có : 201 chia 4 dư 1 $201^{202^{203}} = 4k + 1 \Rightarrow 207^{4k+1} = 207^{4k} \cdot 207 \Rightarrow \overline{.....7}$

c. $198^{199^{200}}$

Ta có : $199 = 4k + 3$; $199^2 = (4k+3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 4q + 1$

$\Rightarrow 199^{200} = (199^2)^{100} = (4q+1)^{100} = 4n+1 \Rightarrow 198^{4n+1} = 198^{4n} \cdot 198 \Rightarrow \overline{....8}$

Bài 4: Cho $A = 17^{2008} - 11^{2008} - 3^{2008}$. Tìm chữ số tận cùng của A

Lời giải:

$$A = (172)^{1004} - \overline{...1} - (3^2)^{1004} = \overline{...9}^{1004} - \overline{...1} - 9^{1004} = \overline{...1} - \overline{...1} - \overline{...1} = \overline{...9}$$

$$(172)^{1004} - \overline{...1} - (3^2)^{1004} = \overline{...9}^{1004} - \overline{...1} - 9^{1004} = \overline{...1} - \overline{...1} - \overline{...1} = \overline{...9} \text{ Cho } M = 17^{25} + 24^{24} - 13^{21}$$

chia hết cho 10

$$17^{25} = 17 \cdot 17^{24} = 17 \cdot (17^2)^{12} = 17 \cdot \overline{...1} = \overline{...7}; 24^4 = \overline{...6}$$

$$13^{21} = 13^{20} \cdot 13 = (13^2)^{10} \cdot 13 = \overline{...1}13 = \overline{...3}$$

Bài 5: Chứng tỏ rằng:

a. $A = 2^{2^n} - 1 : 5 (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$; b. $B = 2^{4n} + 4 : 10 (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$

a. $A = 2^{2^n} - 1 = [(2^4)^{2^{n-2}}] - 1 = 16^{2^{n-2}} - 1 = \overline{...6} - 1 = \overline{...5} : 5$

b. $B = 2^{4n} + 4 = (2^4)^{n-1} + 4 = 16^{n-1} + 4 = \overline{....6} + 4 = \overline{....0} : 10$

Bài 6:

a. Cho $A = 999993^{2015} - 666667^{2013}$, chứng minh rằng A chia hết cho 10

b. Tìm chữ số tận cùng của: $B = 2.4.6 \dots 2016 - 1.3.5.7 \dots 2015$

Lời giải:

a. Ta có: $2015 = 4k + 3$; $2013 = 4q + 1$

$$\Rightarrow 999993^{2015} = \underbrace{999993^{4k}}_{tc1} \cdot \underbrace{999993^3}_{tc7} \Rightarrow \overline{....7}; 666667^{2013} = \underbrace{666667^{49}}_{tc1} \cdot \underbrace{666667^1}_{tc7} \Rightarrow \overline{....7}$$

Vậy A có chữ số tận cùng là 0 suy ra A chia hết cho 10.

b. $\underbrace{2.4.6 \dots 2016}_{\overline{.....0}} - \underbrace{1.3.5.7 \dots 2015}_{\overline{.....5}} \Rightarrow \overline{.....5}$

Bài 7: Chứng minh rằng các số sau là số tự nhiên

a. $A = 0,7 \cdot (2013^{2003} - 1997^{1997})$ b. $B = \frac{1}{10} \cdot (2007^{2012^{2017}} - 2003^{2014^{2016}})$

Lời giải:

a. $2013^{4k+3} \Rightarrow \overline{...7}; 1997^{1997} = 1997^{4q+1} \Rightarrow \overline{...7} \Rightarrow 2013^{2013} - 1997^{1997} = \overline{....0} \Rightarrow A \in \mathbb{N}$

$$b. 2007^{2012^{2017}} = 2007^{4k} \text{ (do } 2012 : 4 \Rightarrow 2012^{2017} : 4) \Rightarrow 2007^{2012^{2017}} = \overline{\dots 1}$$

$$2003^{2014^{2016}} = 2003^{4q} \Rightarrow \overline{\dots 1}; 2007^{2012^{2017}} - 2003^{2014^{2016}} = \overline{\dots 0} \Rightarrow B \in N$$

Bài 8: Cho $S = 7^{2015} - 3^{2015}$

a. Tìm chữ số tận cùng của S b. CMR: chữ số hàng chục của S là lẻ

Lời giải:

a. Chữ số tận cùng của S là 6

b. Cách 1: Dùng công thức $a^n - b^n$ chia hết cho $a - b$ (a, b thuộc $N, a > b$)

$7^{2015} - 3^{2015}$ chia hết cho $(7 - 3) = 4$. Vậy S chia hết cho 4

Cách 2: $7^{2015} = (7^2)^{1007} \cdot 7 = 49^{1007} \cdot 7$ chia 4 dư 3

$3^{2015} = (3^2)^{1007} \cdot 3 = 9^{1007} \cdot 3$ chia cho 3 dư 3

Vậy $7^{2015} - 3^{2015}$ chia hết cho 4, mà S có tận cùng là 6. Suy ra chữ số hàng chục là lẻ (đpcm)

***) Chú ý:** một số có chữ số tận cùng là 6 mà chia hết cho 4 thì chữ số hàng chục phải là lẻ.

BÀI TẬP VỀ NHÀ:

Bài 1: Tìm chữ số tận cùng của

a. $2014^{2014^{2014}}$

Có : $2014 = 4q + 2$; $(2014)^2 = 4m$ suy ra : 2014^{2014} chia hết cho 4 $\Rightarrow 2014^{4q}$ tận cùng là 6

b. $42^{207^{42}}$

Có: 207 chia 4 dư 3 $\Rightarrow 207 = 4k + 3$; $207^2 = 4q + 1$; $207^{42} = 4q + 1$ suy ra 42^{4q+1} tận cùng là 2

Bài 2: Chứng minh rằng: $1983^{1983} - 1917^{1917}$ là một số tự nhiên chia hết cho 10

Lời giải:

$1983^{1983} = 1983^{4k+3}$ có tận cùng là 7; $1917^{1917} = 1917^{4q+1}$ có tận cùng là 7

Vậy $1983^{1983} - 1917^{1917}$ có tận cùng là 0 suy ra chia hết cho 10.

Bài 3: Tìm chữ số tận cùng của

a. $S_1 = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}$ (100 số hạng) b. $S_2 = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{50}$ (51 số hạng)

Lời giải:

$$a. S_1 = \underbrace{(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)}_{:10} + \dots + \underbrace{(2^{97} + 2^{98} + 2^{99} + 2^{100})}_{:10} \Rightarrow S_1 : 10 \Rightarrow S = \overline{\dots 0}$$

$$b. S_2 = (1 + 3 + 3^2) + (3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{47} + \dots + 3^{50}) = 13 + BS(10) \Rightarrow \overline{\dots 3}$$

Bài 4: Chứng tỏ rằng các số có dạng

a. $A = (2^{2^n} - 1) : 5 (n \in N; n \geq 2)$

b. $B = (2^{4^n} + 4) : 10 (n \in N, n \geq 1)$

c. $C = (9^{2^n} + 3) : 2 (n \in N, n \geq 1)$

Lời giải:

a. Với n thuộc $\mathbb{N}$, $n \geq 2$ ta có: $2^{2^n} = 2^{2^2 \cdot 2^{n-2}} = (2^4)^{2^{n-2}} = 16^{2^{n-2}} = \overline{\dots 6} \Rightarrow A:5$

b. $2^{4^n} = 2^{4 \cdot 4^{n-1}} = (2^4)^{4^{n-1}} = 16^{4^{n-1}} = \overline{\dots 6} \Rightarrow :10$

c. $9^{2^n} = 9^{2 \cdot 2^{n-1}} = (9^2)^{2^{n-1}} = 81^{2^{n-1}} = \overline{\dots 1} \Rightarrow :4 \Rightarrow :2$

Bài 5: Tồn tại hay không STN n để: $n^2 + n + 1$ chia hết cho 1995^{2000}

Lời giải

1995^{2000} tận cùng bởi chữ số 5 nên chia hết cho 5, vậy tư tưởng $n^2 + n + 1$ chia hết cho 5

Ta có: $n^2 + n = n \cdot (n + 1)$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp suy ra có tận cùng là 0, 2, 6

Suy ra $n^2 + n + 1$ tận cùng 1, 3, 7 suy ra không chia hết cho 5. Suy ra không tồn tại

Dạng 2 : TÌM HAI CHỮ SỐ TẬN CÙNG

Công thức:

+) $\overline{\dots 01}^n = \overline{01}; \overline{25}^n = \overline{25}; \overline{76}^n = \overline{76}; \overline{26}^n = \overline{76} (n \in \mathbb{N}^*)$

+) $4^{10}; 16^5; 6^5; 18^4; 24^2; 68^4; 74^2 \Rightarrow \overline{76}$

+) $3^{10}; 9^{16}; 81^5; 7^4; 51^2; 99^2 \Rightarrow \overline{01}$

Bài 1: Tìm hai chữ số tận cùng của: $51^{51}; 99^{99}; 6^{666}; 14^{101} \cdot 16^{101}$

Lời giải

a. $51^{51} = 51^{50} \cdot 51 = (51^2)^{25} \cdot 51 = \overline{\dots 01}^{25} \cdot 51 = \overline{\dots 01} 51 = \overline{\dots 51}$

b. $99^{99} = 99^{98} \cdot 99 = (99^2)^{49} \cdot 99 = \overline{\dots 01}^{49} \cdot 99 = \overline{\dots 01} 99 = \overline{\dots 99}$

c. $6^{666} = 6^{665} \cdot 6 = (6^5)^{123} \cdot 6 = \overline{\dots 76}^{123} \cdot 6 = \overline{\dots 76} 6 = \overline{\dots 56}$

d.

$14^{101} \cdot 16^{101} = (14 \cdot 16)^{101} = 224^{101} = 224^{100} \cdot 224 = (224^2)^{50} \cdot 224 = \overline{\dots 76}^{50} \cdot 224 = \overline{\dots 76} 224 = \overline{\dots 24} (laaaaay76.24)$

Bài 2: Tìm hai chữ số tận cùng của (k, n thuộc $\mathbb{N}^*$)

a. $51^{2k} = (51^2)^k = \overline{\dots 01}^k = \overline{\dots 01}; 51^{2k+1} = 51^{2k} \cdot 51 = \overline{\dots 01} 51 = \overline{\dots 51}$

b.

$99^{2n} = (99^2)^n = \overline{\dots 01}^n = \overline{\dots 01}; 99^{2n+1} = 99^{2n} \cdot 99 = \overline{\dots 01} 99 = \overline{\dots 99}; 99^{99^{99}} = 99^{le} = 99^{2n+1} = \overline{\dots 99}$

c. $6^{5n} = (6^5)^n = \overline{\dots 76}^n = \overline{\dots 76}; 6^{5n+1} = 6^{5n} \cdot 6 = \overline{\dots 76} 6 = \overline{\dots 56}$

d. $2^{203} = 2^{200} \cdot 8 = (2^{20})^{10} \cdot 8 = \overline{\dots 76}^{10} \cdot 8 = \overline{\dots 76} 8 = \overline{\dots 08}$

Dạng 3 : TÌM BA CHỮ SỐ TẬN CÙNG

Công thức: $\overline{001}^n = \overline{001}$; $\overline{625}^n = \overline{625}$; $\overline{376}^n = \overline{\dots 376} (n \in \mathbb{N}^*)$

Bài 1: Tìm ba chữ số tận cùng của

a. $5^{2000} = (5^4)^{500} = 625^{500} = \overline{\dots 625}$

b. $2^{3n} \cdot 47^n = 8^n \cdot 47^n = (8 \cdot 47)^n = 376^n = \overline{\dots 376}$

c. $2^{3n+3} \cdot 47^{n+2} = 2^{3 \cdot (n+1)} \cdot 47^{n+2} = 8^{n+1} \cdot 47^{n+1} \cdot 47 = (8 \cdot 47)^{n+1} \cdot 47 = \overline{\dots 376} \cdot 47 = \overline{\dots 672}$

Bài 2: Chứng tỏ rằng: $2001^n + 2^{3n} \cdot 47^n + 25^{2n} (n \in \mathbb{N}^*) = \overline{\dots 002}$

Lời giải:

$$2001^n = \overline{\dots 001}; 2^{3n} \cdot 47^n = \overline{\dots 376}; 25^{2n} = \overline{\dots 625} \Rightarrow \overline{\dots 002} \Rightarrow \text{dpcm}$$