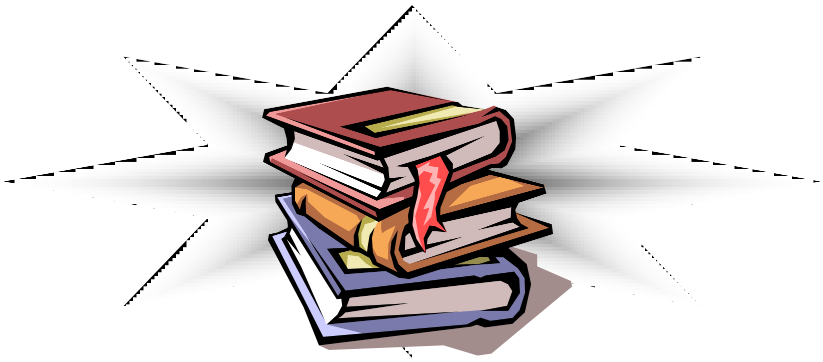
Sưu tầm



CHUYÊN ĐỀ

SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

Thanh Hóa, tháng 9 năm 2019

CHUYÊN ĐỀ: SỐ NGUYÊN TỐ - HỢP SỐ

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa số nguyên tố: Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1 và chỉ chia hết cho 1 và chính nó.

P là số nguyên tố $\Leftrightarrow U(p)=\{1, p\}$

Vd : 2, 3, 5, 7, ….

- Số nguyên tố nhỏ nhất là 2, đó là số nguyên tố chẵn duy nhất. Tất cả số nguyên tố còn lại đều là số lẻ.

2. Định nghĩa hợp số : Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 và có nhiều hơn 2 ước

- Ước nguyên tố nhỏ nhất của một hợp số a là một số không vượt quá $\sqrt{a}$.

3. Các tính chất

a. Số 0, 1 không phải số nguyên tố, không phải hợp số

b. Số 2 là số nguyên tố nhỏ nhất

c. Số 2 là số nguyên tố chẵn duy nhất

d. Tập hợp các số nguyên tố là vô hạn

e. Mọi hợp số đều có thể phân tích ra thừa số nguyên tố và kết quả phân tích đó là duy nhất

f. Mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng : $4k \pm 1; 6n \pm 1$

g. Tập hợp các số tự nhiên bao gồm : Số 0, 1, số nguyên tố, hợp số

h. Nếu a.b chia hết cho p (p là số nguyên tố) thì a chia hết cho p hoặc b chia hết cho p

i. Số ước số của hợp số

Giả sử $n = p_1^{n_1}.p_2^{n_2}....p_k^{n_k} (n_1, n_2, ..., n_k \in N^*) \Rightarrow$

$p_1, p_2, ..., p_k$: Số nguyên tố $\quad n_1, n_2, ..., n_k (k \in N^*)$

$\Rightarrow$ số ước số của n là : $(n_1+1)(n_2+1)(....(n_k+1)$

Vd : $100 = 2^2.5^2 \Rightarrow 100$ có : $(2+1)(2+1) = 9$ ước.

4. Phân tích một số ra thừa số nguyên tố

- Là viết số đó dưới dạng tích của nhiều thừa số, mỗi thừa số là một số nguyên tố hoặc là lũy thừa của một số nguyên tố.

- Dù phân tích một thừa số ra thừa số nguyên tố bằng cách nào thì cuối cùng ta cũng được một kết quả duy nhất.

5. Số nguyên tố cùng nhau.

- Hai hay nhiều số được gọi là nguyên tố cùng nhau khi UCLN của chúng bằng 1.

- Hai số tự nhiên liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.

B. Bài tập

*) Phương pháp kiểm tra một số là số nguyên tố hay hợp số

Với $n \in N^*, n > 1$ ta kiểm tra theo các bước sau :

- Tìm số nguyên tố k sao cho : $k^2 \le n \le (k+1)^2$

- Kiểm tra xem n có chia hết cho các số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng k không ?

+) Nếu có chia hết thì n là số hợp số

+) Nếu không chia hết thì n là hợp số

Bài 1: Tìm số tự nhiên n, sao cho

a. $(2n+5)(3n+1)$ là số nguyên tố

b. $(n-2)(n^2+n+7)$ là số nguyên tố

c. $(n+1)(n^2+n+7)$ là số nguyên tố

d. n^2-1 là số nguyên tố

Lời giải

a. Nếu $n \ge 1 \to \begin{cases} 2n+5>1 \\ 3n+1>1 \end{cases} \to (2n+5)(3n+1)$ là hợp số

Nếu $n=0 \to (2n+5)(3n+1)=5$ là số nguyên tố. Vậy n = 0

b. $n=0 \to A=3(tm); n=1 \to A=-1(loai); n=2 \to A=0(loai); n=3 \to A=11(tm)$

+) $n>3 \to \begin{cases} n-2 \ge 2 \\ n^2+n-1=n(n+1)-1>1 \end{cases} \to lahopso$ là hợp số

Vậy n = 0 hoặc n = 3.

c. $n=0(t/m); n \ge 1(loai)$

d. Ta có: $n^2-1=(n+1)(n-1) \to \begin{cases} n \ge 3(loai) \\ n=2(tm) \end{cases}$

Bài 2: Nếu p là số nguyên tố thì

a. p^2+p+2 là số nguyên tố hay hợp số

b. p^2+200 là số nguyên tố hay hợp số

Lời giải

a. Ta có: $p^2+p+2=\underbrace{p(p+1)}_{chan}+2 \to$ là số chẵn lớn hơn 2 nên là hợp số

b.

- Với $p=2 \to p^2+200$ là số chẵn $\to p^2+200$ là hợp số

- Với $p=3 \to 2009 \vdots 7 \to$ là số chẵn $\to p^2+200$ là hợp số

- Với $p>3 \to \left.\begin{matrix} p^2 : 3.du.1 \\ 2000 \vdots 3.du.2 \end{matrix}\right\} \to p^2+2000 \vdots 3 \to p^2+200$ là hợp số

Vậy $p^2 + 200$ luôn là hợp số

Bài 3: Chứng minh rằng nếu một số tự nhiên A có đúng 3 ước số phân biệt thì A sẽ là bình phương của một số nguyên tố

Lời giải

Giả sử $A = p_1^{n_1}.p_2^{n_2}...p_k^{n_k}$

Trong đó: $p_1, p_2, ..., p_k$ là số nguyên tố; $n_1, n_2, ..., n_k \in N^*$

$\rightarrow$ Số ước số của A là: $(n_1+1)(n_2+1)...(n_k+1) = S(A)$

- Nếu
$k \geq 2 \rightarrow S(A) \geq (n_1+1)(n_2+1) \geq 2.2 = 4 > 3(loai) \rightarrow k = 1 \rightarrow S(A) = n_1 + 1 = 3 \rightarrow n_1 = 2$

Vậy $A = p_1^2(dpcm)$

Bài 4: Tổng hiệu sau là số nguyên tố hay hợp số:

a) 3.4.5 + 6.7

b) 5.7.9.11 - 2.3.4.7

c) 3.5.7 + 11.13.17

d) 16354 + 67541

Lời giải

a) Ta có: $3.4.5+6.7 = 3(4.5+2.7)\,\vdots\,3 \rightarrow$ tổng trên là hợp số

b) Ta có: $5.7.9.11-2.3.4.7 = 7(5.9.11-2.3.4)\,\vdots\,7 \rightarrow$ tổng trên là hợp số

c) Ta có : $16354+67541$ có chữ số tận cùng là 5 nên chia hết cho 5, Vậy tổng trên là hợp số

Bài 5: Tổng hiệu sau là số nguyên tố hay hợp số:

a) 5.6.7 + 8.9

b) 5.7.9.11.13 - 2.3.7

c) 5.7.11 + 13.17.19

d) 4253 + 1422

Lời giải

a) Ta có : $5.6.7+8.9 = 3(5.2.7+8.3)\,\vdots\,3 \rightarrow$ tổng trên là hợp số

b) Ta có : $5.7.9.11.13-2.3.7 = 7(5.9.11.13-2.3)\,\vdots\,7 \rightarrow$ tổng trên là hợp số

c) Ta có : $5.7.11$ là 1 số lẻ, và $13.17.19$ cũng là 1 số lẻ, Nên tổng là số chẵn $\vdots\,2$=> Là hợp số

d) Ta có : $4253+1422$ có chữ số tận cùng là 5 nên chia hết cho 5, Vậy tổng trên là hợp số

Bài 6: Tổng hiệu sau là số nguyên tố hay hợp số:

a) 17.18.19.31 + 11.13.15.23

b) 41.43.45.47 + 19.23.29.31

c) 987654 + 54321

Lời giải

a) Ta có: $17.18.19.31+11.13.15.23 = 3(17.6.19.31+11.13.5.23)\,\vdots\,3 \rightarrow$ là hợp số

b) Ta có: $41.43.45.47$ là số lẻ, $19.23.29.31$ là số lẻ, nên tổng là số chẵn nên là hợp số

c) Ta có : $987654+54321$ có chữ số tận cùng là 5 nên chia hết cho 5, là hợp số

Bài 7: Tổng hiệu sau là số nguyên tố hay hợp số: 1.2.3…. n + 1

Lời giải

Xét $n=3 => 1.2.3+1=7$ là số nguyên tố

Xét $n=4 => 1.2.3.4+1=25$ là hợp số. Vậy không kết luận được

Bài 8: Cho a = 2. 3. 4. 5….2008. Hỏi 2007 số tự nhiên liên tiếp sau có đều là hợp số không

a + 2, a + 3, a + 4, ….. , a + 2008

Lời giải

Ta có: 2007 số trên đều là hợp số vì chúng lần lượt chia hết cho 2; 3; 4;… ; 2008, Và lớn hơn 2

Bài 9: Tìm số tự nhiên k để 3.k là số nguyên tố, 7.k là số nguyên tố

Lời giải

- Vì 3.k chia hết cho 3, nên để là số nguyên tố thì 3k chỉ có 2 ước là 1 và chính nó, Vậy k=1
- Vì 7.k chia hết cho 7, nên để là số nguyên tố thì 7k chỉ có 2 ước là 1 và chính nó, Vậy k=7

BÀI 2: PHƯƠNG PHÁP DÃY SỐ ĐỂ TÌM SỐ NGUYÊN TỐ

A. Bài toán: Tìm số nguyên tố p để 2 hoặc nhiều số phụ thuộc vào p cũng là số nguyên tố

- Tính chất : Cho q là một số nguyên tố, k là số tự nhiên khác 0, k không chia hết cho q. Khi đó mọi dãy số cách đều gồm bốn số hạng, khoảng cách giữa các số hạng bằng k thì tồn tại duy nhất 1 số chia hết cho q.

Vd : q = 2 , k = 3 (k không chia hết cho q)

n ; n + 3

+) q = 3 , k = 2

n ; n + 2 ; n + 4 , chẳng hạn $\{3;5;7\}$

+) q = 5, k = 4

n, n + 4, n + 8, n + 12, n + 16 $\rightarrow \{7,11,15,19,23\}$

B. Bài tập

Bài 1: Tìm số nguyên tố p sao cho các số sau cũng đồng thời là số nguyên tố

a. p + 2 và p + 10

b. p + 4 và p + 8

c. p + 10 và p + 20

d. p + 8 và p + 10

e. p + 10 và p + 14

Lời giải

a. Ta có : p p + 2, p + 10 là số nguyên tố

Xét dãy số : p + 2, p + 6, p + 10 luôn tồn tại một số chia hết cho 3

Mà : $p+2\geq 4$

P + 2 và p + 10 là số nguyên tố > 3 $\rightarrow p+2\not\vdots 3; p+10\not\vdots 3\rightarrow p+6\vdots 3\rightarrow p\vdots 3\rightarrow p=3$

Thử lại : p + 2 = 5, p + 10 = 13 là các số nguyên tố.

b. Xét dãy số : $\underbrace{p+10; p+15; p+20}_{\vdots 3\rightarrow p=3}$

c. $p+10; p+12; p+14$ d. $p+4; p+6; p+8$

d. $p+8; p+9; p+10$

Bài 2: Tìm ba số tự nhiên lẻ liên tiếp và đều là các số nguyên tố

Lời giải

Gọi ba STN thỏa mãn bài toán là : $p; p+2; p+4$ (p lẻ)

Trong ba số p, p + 2, p + 4 có duy nhất 1 số chia hết cho 3

Có số 3 là số nguyên tố duy nhất chia hết cho 3

Bài 3: Tìm số nguyên tố p, sao cho các số sa đồng thời là số nguyên tố

a. $p+2; p+6; p+8; p+14$ b.

$p+6; p+8; p+12; p+14\rightarrow \mathrm{mod}:5$

c. $p+4; p+6; p+10; p+16; p+22$

Lời giải

a. Xét dãy số : $p; p+2; p+4; p+6; p+8\rightarrow$ tồn tại 1 số chia hết cho 5

+) $p=2\rightarrow p+2=4\rightarrow loai$

+) $p=3\rightarrow p+6=9\rightarrow loai$

+) $p\geq 5\rightarrow\left[\begin{array}{l} p\vdots 5\rightarrow p=5\\ p+4\vdots 5\rightarrow p+14\vdots 5(loai)\end{array}\right.\Rightarrow p=5$

b. $\underbrace{p+6; p+8; p+10; p+12; p+14}_{\vdots 5}$

c. $p; p+2; p+4; p+6; p+8; p+10; p+12$

+) p = 2, 3, 5 (loại)

+) $p\geq 7\rightarrow\left[\begin{array}{l} p+2\vdots 7\rightarrow p+16\vdots 7(loai)\\ p+8\vdots 7\rightarrow p+22\vdots 7(loai)\end{array}\right.\Rightarrow p=7$ thử lại đúng

Bài 4: Tìm số nguyên tố p sao cho

a. $p^2-4; p^2+4$ đều là các số nguyên tố b. $p+94; p+1994$ là các số nguyên tố

Lời giải

a. Vì p^2-4 là số nguyên tố nên p > 2

+) Nếu p = 3 $\rightarrow$ thỏa mãn

+) p > 3, xét dãy số : $p^2-4; p; p^2+4 \rightarrow$ có 1 số chia hết cho 3

$\rightarrow p^2 \vdots 3 \rightarrow p \vdots 3 \rightarrow p=3(voly)$

Bài 5: Chứng minh rằng : $200p^2-1; 200p^2+1$ không thể đồng thời là số nguyên tố

Lời giải

Giả sử số $200p^2-1; 200p^2+1$ là số nguyên tố

Xét dãy số : $200p^2-1; 200p^2; 200p^2+1 \rightarrow$ có 1 số chia hết cho 3

$$\rightarrow \begin{cases} 200p^2 \vdots 3 \\ (200,3)=1 \end{cases} \rightarrow p \vdots 3 \rightarrow p=3$$

+) $p=3 \rightarrow 200.3^2-1=1799 \vdots 7(hopso) \rightarrow voly \rightarrow dpcm$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1: Tìm số nguyên tố p sao cho:

a) p + 2, p + 4 cũng là số nguyên tố

b) p + 10, p + 14 là số nguyên tố

Lời giải

a) Giả sử với $p=2$ là số nguyên tố $\rightarrow p+2=4$ là hợp số $\rightarrow p=2(loai)$

- Với $p=3$ là số nguyên tố $\rightarrow p+2=5, p+4=7$ đều là số nguyên tố $\rightarrow p=3(t/m)$

- Với $p>3 \Rightarrow p=3k+1, p+3k+2, (k \in N)$

- Nếu $p=3k+1$ giả sử là số nguyên tố $\rightarrow p+2=3k+1+2 \vdots 3$ là hợp số $\rightarrow p=3k+1(loai)$

- Nếu $p=3k+2$ giả sử là số nguyên tố $\rightarrow p+4=3k+2+4 \vdots 3$ là hợp số $\rightarrow p=3k+2(loai)$

Vậy p = 3 là số nguyên tố cần tìm

b) Giả sử với $p=2$ là số nguyên tố $\rightarrow p+10=12 \vdots 2$ là hợp số $\rightarrow p=2(loai)$

- Với $p=3$ là số nguyên tố => $p+10=13, p+14=17$ đều là số nguyê tố => $p=3(t/m)$

- Với $p>3 \Rightarrow p=3k+1, p=3k+2, (k \in N)$

- Nếu $p=3k+1$ giả sử là số nguyên tố=> $p+14=3k+1+14 \vdots 3$ là hợp số=> $p=3k+1(l)$

- Nếu $p=3k+2$ giả sử là số nguyên tố => $p+10=3k+2+10 \vdots 3$ là hợp số=> $p=3k+1(l)$

Vậy p = 3 là số nguyên tố cần tìm

Bài 2: Tìm số nguyên tố p sao cho:

a) p + 2, p + 6, p + 8, p + 14 cũng là số nguyên tố

b) p + 6, p + 8, p + 12, p + 14 cũng là số nguyên tố

Lời giải

Cách khác :

a) Giả sử với $p=2$ là số nguyên tố => $p+2=4\vdots 2$ là hợp số=> $p=2(l)$

- Với $p=3$ là số nguyên tố => $p+6=9\vdots 3$ là hợp số=> $p=3(l)$

- Với $p=5$ là số nguyên tố => $p+2=7, p+6=11, p+8=13, p+14=19$ đều là số nguyên tố

- Với $p>5$ => $p=5k+1, p=5k+2, p=5k+3, p=5k+4, (k\in N)$

+) Nếu $p=5k+1$ giả sử là số nguyên tố=> $p+14=5k+1+14\vdots 5$ là hợp số=> $p=5k+1(l)$

+) Nếu $p=5k+2$ giả sử là số nguyên tố=> $p+8=5k+10\vdots 5$ là hợp số => $p=5k+1(l)$

+) Nếu $p=5k+3$ giả sử là số nguyên tố=> $p+2=5k+3+2\vdots 5$ là hợp số=> $p=5k+3(l)$

+) Nếu $p=5k+4$ giả sử là số nguyên tố=> $p+6=5k+4+6\vdots 5$ là hợp số=> $p=5k+4(l)$

Vậy p = 5 là số nguyên tố cần tìm

Bài 3: Tìm số nguyên tố p sao cho:

a) p + 4, p + 8 cũng là số nguyên tố

b) p + 94, p + 1994 cũng là số nguyên tố

Lời giải

Cách khác :

b, Giả sử với $p=2$ là số nguyên tố => $p+94=96$ là hợp số $p=2(l)$

- Với $p=3$ là số nguyên tố => $p+94=97, p+1994=1997$ đều là số nguyên tố=> $p=3(t/m)$

- Với $p>3$ => $p=3k+1, p+3k+2, (k\in N)$

+) Nếu $p=3k+1$ giả sử là số nguyên tố => $p+1994=3k+1+1994\vdots 3$ là hợp số => $p=3k+1(l)$

+) Nếu $p=3k+2$ giả sử là số nguyên tố => $p+94=3k+2+94\vdots 3$ là hợp số=> $p=3k+2(l)$

Vậy p = 3 là số nguyên tố cần tìm

Bài 4: Tìm số nguyên tố p sao cho:

a) 2p - 1, 4p - 1 cũng là số nguyên tố

b) 2p + 1, 4p + 1 cũng là số nguyên tố

Lời giải

a) Giả sử với $p=2$ là số nguyên tố $\Rightarrow 2p-1=3, 4p-1=7$ là số nguyên tố $\Rightarrow p=2(t/m)$

- Với $p=3$ là số nguyên tố $\Rightarrow 2p-1=5, 4p-1=11$ đều là số nguyên tố $\Rightarrow p=3(t/m)$

- Với $p>3 \Rightarrow p=3k+1, p+3k+2, (k\in N)$

+) Nếu $p = 3k+1$, giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow 4p-1 = 4(3k+1)-1 = 12k+3 \vdots 3$ là hợp số

$\Rightarrow p = 3k+1(l)$

+) Nếu $p = 3k+2$, giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow 2p-1 = 2(3k+2)-1 = 6k+3 \vdots 3$ là hợp số

$\Rightarrow p = 3k+2(loai)$

Vậy p = 3 và p = 2 là số nguyên tố cần tìm

b) Giả sử với $p = 2$ là số nguyên tố $\rightarrow 4p+1 = 9$ là hợp số $\rightarrow p = 2(loai)$

Với $p = 3$ là số nguyên tố $\rightarrow 2p+1 = 7, 4p+1 = 13$ đều là số nguyên tố $\rightarrow p = 3(t/m)$

Với $p > 3 \rightarrow p = 3k+1, p+3k+2, (k \in N)$

Nếu $p = 3k+1$, giả sử là số nguyên tố $\rightarrow 2p+1 = 2(3k+1)+1 = 6k+3 \vdots 3$ là hợp số

$\rightarrow p = 3k+1(l)$

Nếu $p = 3k+2$, giả sử là số nguyên tố $\rightarrow 4p+1 = 4(3k+2)+1 = 12k+9 \vdots 3$ là hợp số

$\rightarrow p = 3k+2(l)$

Vậy p = 3 là số nguyên tố cần tìm

BÀI 3: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CHIA SỐ NGUYÊN ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN SỐ NGUYÊN TỐ

A. Kiến thức cần nhớ

- Trong n số nguyên liên tiếp có một và chỉ một số chia hết cho n.

- Mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng $4n \pm 1$.

- Mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng $6n \pm 1$.

B. Bài tập áp dụng

Bài 1: Cho p là số nguyên tố và một trong 2 số 8p + 1 và 8p - 1 là 2 số nguyên tố, hỏi số thứ 3 (ngoài 2 số nguyên tố, số còn lại) là số nguyên tố hay hợp số?

Lời giải

- Với p = 3 ta có 8p + 1 = 25 là hợp số, còn 8p - 1 là số nguyên tố.

- Với $p \neq 3$ ta có 8p - 1, 8p, 8p + 1 là 3 số nguyên tố liên tiếp nên có một số chia hết cho 3. Do p là nguyên tố khác 3 nên 8p không chia hết cho 3,do đó 8p - 1 hoặc 8p + 1 có một số chia hết cho 3. Vậy số thứ 3 là hợp số.

Bài 2: Hai số $2^n - 1$ và $2^n + 1 (n > 2)$ có thể đồng thời là số nguyên tố được không? Tại sao?

Lời giải

Trong 3 số nguyên liên tiếp $2^n - 1, 2^n, 2^n + 1$ có một số chia hết cho 3, nhưng 2^n không chia hết cho 3, do đó $2^n - 1$ hoặc $2^n + 1$ có một số chia hết cho 3 và lớn hơn 3.

Vậy $2^n - 1, 2^n + 1$ không đồng thời là số nguyên tố.

Bài 3: Chứng minh rằng nếu p và p + 2 là hai số nguyên tố lớn hơn 3 thì tổng của chúng chia hết cho 12

Lời giải

Ta có: p + (p + 2) = 2(p + 1).

p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số nguyên tố lẻ $\rightarrow p+1 \vdots 2 \Rightarrow 2(p+1) \vdots 4$ (*)

p, p + 1, p + 2 là 3 số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 3, mà p và p + 2 không chia hết cho 3 nên: $p+1 \vdots 3 \Rightarrow 2(p+1) \vdots 3$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra: $2(p+1) \vdots 12$ (đpcm)

Bài 4:

a) Tìm 3 số lẻ liên tiếp đều là các số nguyên tố.

b) Tìm số nguyên tố p sao cho p vừa là tổng vừa là hiệu của hai số nguyên tố.

Lời giải

a) Trong 3 số lẻ liên tiếp có một số chia hết cho 3. Vậy trong 3 số nguyên tố đã cho phải có một số chia hết cho 3 và 3 số nguyên tố lẻ liên tiếp là 3, 5, 7.

b) Giả sử $p = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ với p_1, p_2, p_3, p_4 là các số nguyên tố.

+ Vì p_1, p_2 là số nguyên tố nên $p > 2$, suy ra p lẻ.

+ Trong hai số p_1, p_2 phải có một số chẵn, trong hai số p_3, p_4 cũng phải có một số chẵn. Chẳng hạn $p_2 = p_4 = 2$. Khi đó: $p = p_1 + 2 = p_3 - 2 \Rightarrow p_4 + 1 = p_3$. Ta có $p_1, p_1 + 2, p_1 + 4$ là các số nguyên tố lẻ liên tiếp nên theo câu a) $p_1 = 3$ từ đó $p = 5$. Thử lại: $5 = 3 + 2 = 7 - 2$.

Bài 5: Tìm các số tự nhiên k để dãy: $k+1, k+2, k+3, ..., k+10$ chứa nhiều số nguyên tố nhất.

Lời giải

- Với k = 0 ta có dãy $1, 2, 3, ..., 10$ chứa 4 số nguyên tố là 2, 3, 5, 7.
- Với k = 1 ta có dãy 2, 3, 4, ..., 11 chứa 5 số nguyên tố là 2, 3, 5, 7, 11.
- Với k = 2 ta có dãy 3, 4, 5, ..., 12 chứa 4 số nguyên tố là 3, 5, 7, 11.
- Với $k \geq 3$ dãy $k+1, k+2, k+3, ..., k+10$ chứa 5 số lẻ liên tiếp, các số lẻ này lớn hơn 3 nên chia có một số chia hết cho 3, mà 5 số chẵn trong dãy hiển nhiên không là số nguyên tố. Vậy trong dãy ít hơn 5 số nguyên tố.

Tóm lại k = 1 thì dãy $k+1, k+2, ..., k+10$ chứa nhiều số nguyên tố nhất.

Bài 6: Ta gọi p, q là hai số tự nhiên liên tiếp, nếu giữa p và q không có số nguyên tố nào khác. Tìm 3 số nguyên tố liên tiếp p, q, r sao cho $p^2 + q^2 + r^2$ cũng là số nguyên tố.

Lời giải

Nếu 3 số nguyên tố p, q, r đều khác 3 thì p, q, r đều có dạng $3k \pm 1$ suy ra p^2, q^2, r^2 chia cho 3 đều dư 1. Khi đó $p^2 + q^2 + r^2 \vdots 3$ và $p^2 + q^2 + r^2 > 3$ nên $p^2 + q^2 + r^2$ là hợp số.

Vậy p = 3, q = 5, r = 7, khi đó $p^2 + q^2 + r^2 = 3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$ là số nguyên tố.

Bài 7: Tìm 3 số nguyên tố sao cho $p^q + q^p = r$

Lời giải

Giả sử có 3 số nguyên tố p, q, r sao cho $p^q + q^p = r$.

Khi đó $r > 3$ nên r là số lẻ, suy ra p, q không cùng tính chẵn lẻ.

Giả sử p = 2 và q là số lẻ. Khi đó ta có $2^q + q^2 = r$.

Nếu q không chia hết cho 3 thì $q^2 \equiv 1 (\text{mod } 3)$.

Mặt khác vì q lẻ nên $2^q \equiv -1 (\text{mod } 3)$, từ đó suy ra $2^q + q^2 \vdots 3 \Rightarrow r \vdots 3$, vô lí.

Vậy q = 3, lúc đó $r = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố.

Vậy $p = 2, q = 3, r = 17$ hoặc $p = 3, q = 2, r = 17$.

Bài 8:

a) Chứng minh rằng số dư trong phép chia của một số nguyên tố cho 30 chỉ có thể là 1 hoặc là số nguyên tố. Khi chia cho 30 thì kết quả ra sao?

b) Chứng minh rằng nếu tổng của n lũy thừa bậc 4 của các số nguyên tố lớn hơn 5 là một số nguyên tố thì (n,30) = 1.

Lời giải

a) Giả sử p là số nguyên tố và $p = 30k + r$ với $0 < r < 30$. Nếu r là hợp số thì r có ước nguyên tố $q \le \sqrt{30} \Rightarrow q = 2;3;5$. Nhưng với q =2; 3; 5 thì q lần lượt chia hết cho 2; 3; 5, vô lí. Vậy r = 1 hoặc r là số nguyên tố.

Khi chia cho 60 thì kết quả không còn đúng nữa, chẳng hạn p= 109= 60.1+ 49, 49 là hợp số.

b) Số nguyên tố p khi chia cho 30 chỉ có thể dư là 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Với r = 1, 11, 19, 29 thì $p^2 \equiv 1$ (mod 30).

Với r = 7, 13, 17, 23 thì $p^2 \equiv 19$ (mod 30).

Suy ra $p^4 \equiv 1$ (mod 30).

Giả sử $p_{1,} p_2, ... p_n$ là các số nguyên tố lớn hơn 5.

Khi đó $q = p_1^4 + p_2^4 + ... + p_n^4 \equiv n(\text{mod}\, 30) \Rightarrow q = 30k + n$ là số nguyên tố nên (n,30)=1.

Bài 9: Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c sao cho $abc < ab + bc + ca$.

Lời giải

Vì a, b, c có vai trò như nhau nên giả sử $a \le b \le c$.

Khi đó $ab + bc + ca \le 3bc \Rightarrow abc < 3bc \Rightarrow a < 3 \Rightarrow a = 2$ (vì a là số nguyên tố).

Với a =2 ta có $2bc < 2b + 2c + bc \Rightarrow bc < 2(b + c) \le 4c \Rightarrow b < 4 \Rightarrow b = 2$ hoặc b = 3.

+ Nếu b = 2 thì $4c < 2 + 4c$ thỏa với c là số nguyên tố bất kì.

+ Nếu b = 3 thì $6c < 6 + 5c \Rightarrow c < 6 \Rightarrow c = 3$ hoặc $c = 5$.

Vậy các cặp số (a, b, c) cần tìm là (2, 2, p), (2, 3, 3), (2, 3, 5) và các hoán vị của chúng, với p là số nguyên tố.

Bài 10: Cho dãy số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_n$ được xác định như sau: $a_1 = 2$, a_n là ước nguyên tố lớn nhất của $a_1 a_2 a_3 ... a_{n-1} + 1$ với $n \ge 2$. Chứng minh rằng $a_k \ne 5$ với mọi k.

Lời giải

Ta có $a_1 = 2, a_2 = 3$, giả sử với $n \ge 3$ nào đó mà có số 5 là ước nguyên tố lớn nhất của số $A = 2.3.a_3....a_{n-1} + 1$ thì A không thể chia hết cho 2, cho 3. Vậy chỉ có thể xảy ra $A = 5^m$ với $m \ge 2$ $\rightarrow A - 1 = 5^m - 1 \vdots 4$.

Mà $A - 1 = 2.3.a_3....a_{n-1}$ không chia hết cho 4 do $a_{3,...} a_{n-1}$ là các số lẻ, vô lí.

Vậy A không có ước nguyên tố của 5, tức là $a_k \ne 5$, $\forall k \in N^*$.

Bài 11: Tìm tất cả các số nguyên tố p để $2^p + p^2$ cũng là số nguyên tố

Lời giải

Với p = 2 ta có $2^p + p^2 = 2^2 + 2^2 = 4$ không là số nguyên tố.

Với p = 3 ta có $2^p + p^2 = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố.

Với $p > 3$ ta có $p^2 + 2^p = (p^2 - 1) + (2^p + 1)$. Vì p lẻ và p không chia hết cho 3 nên $p^2 - 1 \vdots 3$ và $2^p + 1 \vdots 3$, do đó $2^p + p^2$ là hợp số.

Vậy, với p=3 thì $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

BÀI 4: MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ SỐ NGUYÊN TỐ

Bài 1: Tìm só nguyên tố, biết rằng số đó là tổng của hai số nguyên tố và bằng hiệu của hai số nguyên tố

Lời giải

Gọi số nguyên tố cần tìm là : a

Theo bài ra ta có : a = b + c = d – e (a, b, c, d là các số nguyên tố)

Dễ thấy : a = b + c > 2 $\rightarrow a$ là số nguyên tố lẻ $\rightarrow b, c$ khác tính chẵn lẻ

Giả sử b > c $\rightarrow c = 2$

Có : $\begin{cases} a = d - e \\ a : le \end{cases} \to \begin{cases} d, e \neq chan, le \\ d > e \end{cases} \to e = 2$

Vậy a = b + 2 = d – 2 $\to d = b + 4 \to b, b+2, b+4$ là số nguyên tố $\to b = 3 \to a = 5, d = 7$

Vậy a = 5 là số nguyên tố cần tìm

Bài 2: Cho $a, k \in N^*$. Chứng minh rằng nếu $a, a+k, a+2k$ là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì $k \vdots 6$

Lời giải

Ta có các số nguyên tố lớn hơn 3 là các số nguyên tố lẻ $\to a, a+k$ lẻ $\to (a+k) - a = k$ chẵn $\to k \vdots 2 (1)$(hiệu của hai số lẻ là số chẵn)

Ta có: $a, a+k, a+2k$ là số nguyên tố lớn hơn 3 $\to \not\vdots 3 \to$ trong 3 số có 2 số có cùng số dư khi chia cho 3

+) Nếu $a, a+k$ có cùng số dư $\to (a+k) - a \vdots 3 \to k \vdots 3$

+) Nếu $a+k, a+2k$ có cùng số dư $\to (a+2k) - (a+k) \vdots 3 \to k \vdots 3$

+) Nếu $a, a+2k$ có cùng số dư $\to \begin{cases} 2k \vdots 3 \\ (2,3) = 1 \end{cases} \to k \vdots 3$

Vậy $k \vdots 3 (2) \to (1)(2) \to k \vdots 6$

Bài 3: Tìm ba số nguyên tố liên tiếp sao cho $p^2 + q^2 + r^2$ cũng là số nguyên tố

Lời giải

+) Nếu p, q, r > 0 $\to p^2, q^2, r^2 \equiv 1 (\bmod 3) \to p^2 + q^2 + r^2 \equiv 3 \equiv 0 (\bmod 3) \to h/so$

Vậy có ít nhất 1 trong 3 số chia hết cho 3 $\to$ số đó là 3 $\to \left[\begin{array}{l} \{p, q, r\} = \{2, 3, 5\} \\ \{p, q, r\} = \{3, 5, 7\} \end{array} \right.$

Bài 4: Tìm tất cả bộ ba số nguyên tố a, b, c sao cho : abc < ab + bc + ca

Lời giải

Vì a, b, c có vai trò như nhau, không mất tính tổng quát : Giả sử

$a \le b \le c \to abc < ab + bc + ca \le 3bc \to a < 3 \to a = 2 \to 2bc < 2b + bc + 2c (1) \to bc < 2(b+c) \le 2.2c$

$\to bc < 4c \to b < 4 \to \left[\begin{array}{l} b = 2 \\ b = 3 \end{array} \right.$

+) $b = 2 \to (1) : 4c < 4 + 4c (dung) \forall c \ge 2$

+) $b = 3 \to (1) : 6c < 6 + 5c \leftrightarrow \begin{cases} c < 6 \\ c \ge b \end{cases} \to \left[\begin{array}{l} c = 3 \\ c = 5 \end{array} \right.$

Vậy bộ ba số là :

+) (2,2,p) : Với p là số nguyên tố

+) (2,3,3) hoặc (2,3,5)

Bài 5: Tìm tất cả các số nguyên tố thỏa mãn

a. $3x^2+1=19y^2$ b. $5x^2-11y^2=1$ c. $x^2-12y^2=1$

Lời giải

a. Nếu x chẵn $\to x=2\to 13=19y^2(loai)$

Nếu x lẻ

$\to 3x^2:le\to 3x^2+1:chan\to 19y^2:chan\to y:chan\to y=2\to x=5\to (x,y)=(5,2)$

b. Nếu y lẻ $\to 11y^2+1:chan\to x:chan\to x=2$

+) Nếu y chẵn $\to y=2\to x=3\to (x,y)=(3,2)$

c. Không xét được tính chẵn lẻ

+) Với $y=2\to x=7\to tm$

+) Với y > 2 $\to x>7\to x:le$

Đặt x = 2k + 1, thay vào (1), được :

$$(2k+1)^2=12y^2+1\leftrightarrow 4k(k+1)=12y^2\leftrightarrow \underbrace{k(k+1)}_{chan}=\underset{le}{3y^2}\ (2)$$

Vì $x>7\to k>3, y:le\to \left.\begin{matrix} VT(2):chan \\ VP(2):le \end{matrix}\right\}\to VT\neq VP$

Vậy x = 7, y = 2

Bài 6: Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho 7p + q và pq + 11 cũng là số nguyên tố

Lời giải

- Nếu $pq+11$ là số nguyên tố thì nó phải là số lẻ vì nó là số nguyên tố lớn hơn 2

$\to pq$ là số chẵn, khi đó ít nhất 1 trong 2 số p hoặc q bằng 2

Giả sử : $p=2\to 7p+q=14+q$ là số nguyên tố

- Nếu $q=2\to 7p+q=7.2+2=16(l)$

- Nếu $q=3\to p.q+11=2.3+11=17(t/m)$ và $7p+q=7.2+3=17(t/m)$

- Nếu $q>3 => q=3k+1, q=3k+2, (k\in N)$

+) Với $q=3k+1 => 7p+q=14+3k+1\vdots 3$ là hợp số $\to q=3k+1(l)$

+) Với $q=3k+2 => pq+11=2q+11=2(3k+2)+11=6k+15\vdots 3$ là hợp số $\to q=3k+2(l)$

Vậy $p=2, q=3$

Xét tiếp TH giả sử $q=2$ thì ta được $p=3$

Bài 7: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, chữ số hàng nghìn bằng chữ số hàng đơn vị, chữ số hàng trăm bằng chữ số hàng chục và số đó viết được dưới dạng tích của ba số nguyên tố liên tiếp

Lời giải

$\overline{abba} = 1001a + 110b \vdots 11 \to 3 : TH$

+) TH1 : $\overline{abba} = 5.7.11 = 385 \to loai$

+) TH2 : $\overline{abba} = 7.11.13 = 1001 \to tm$

+) TH3 : $\overline{abba} = 11.13.17 = 2431 \to loai$

Bài 8: Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa mãn: $x^y + 1 = z$

Lời giải

+) Nếu x lẻ $\to x^y : le \to x^y + 1 : chan \to z = 2 \to loai$ do z > 2 vì $z = x^y + 1 > 2$

$\to x : chan \to x = 2 \to 2^y + 1 = z$ mà $y \geq 2 \to z \geq 5$

+) Nếu y lẻ $\to y = 2k + 1 \to z = 2^{2k+1} + 1 = 4^k.2 + 1$

Ta có:

$4^k : 3du1 \to 2.4^k : 3du2 \to 4^k.2 + 1 \vdots 3 \to z \vdots 3, z \geq 5 \to$ *không*$\exists$z $\to$ y:chan $\to$ y = 2 $\to$ z = 5

Bài 9: Tìm ba số nguyên tố p, q, r sao cho : $p^q + q^p = r$

Lời giải

+) Có : $r \geq 2^2 + 2^2 = 8 \to r : le$

Nếu p, q lẻ $\to p^q + q^p : chan \to r = 2 \to loai \to p, q$ khác tính chẵn lẻ

Giả sử p chẵn, q lẻ $\to p = 2 \to 2^q + q^2 = r$

+) Nếu $q > 3 \to q : le \to q = 2k + 1 \to 2^q = 4^k.2chia3du2$

q > 3 nên q không chia hết cho 3 nên q² chia 3 dư 1 $\to 2^q + q^2 \vdots 3 \to r \vdots 3 \to loai.do.r > 8$

Vậy $q \leq 3 \to q = 3 \to r = 17(tm)$

Vậy p = 2, q = 3, r = 17 hoặc p = 3, q= 2, r = 17

Hoặc cách khác

$p > 3 \to 2^p + p^2 = \underbrace{(2^p + 1)}_{\vdots 3} + \underbrace{(p^2 - 1)}_{\vdots 3} \to hop.so$

Bài 10: Tìm tất cả các số x, y sao cho

a. $7x^2 - 3y^2 = 1$ b. $x^2 = 8y + 1$

Lời giải

a. $7x^2 - 3y^2 = 1 \to x, y$ khác tính chẵn lẻ

+) $x=2\to y=3(tm); y=2\to loai$

b. $x^2=8y+1\to x:le$

+) $x=3\to y=1\to loai$

+) $x>3\to x\not\vdots 3\to x^2:3du1\to 8y+1:3du1\to 8y\vdots 3\to y\vdots 3\to y=3\to x=5$

Bài 11: Tìm tất cả các số tự nhiên n để

a) n^2+12n là số nguyên tố b) 3^n+6 là số nguyên tố

Lời giải

a) Ta có : $n^2+12n=n(n+12)$, vì $n+12>1\to n(n+12)$ có thêm 2 ước là n và n + 2

Để $n(n+12)$ là số nguyên tố thì $n=1\to n^2+12n=13$ (thỏa mãn)

b) Nếu $n=0\to 3^n+6=7$ là số nguyên tố

Nếu $n\neq 0\to 3^n+6\vdots 3$ là hợp số

Bài 12: Tìm số nguyên tố p sao cho p^2+23 có đúng 6 ước dương

Lời giải

Đặt $A=p^2+23(p\geq 2)\to A\geq 27$, để A có 6 ước thì 6 = 2. 3$\to A=a^x.b^y\to(x+1)(y+1)=6$

Với $x\geq y\geq 1$

- Nếu A chứa 1 thừa số nguyên tố thì x + 1 = 6 => x = 5, Chọn thừa số nguyên tố bé nhất là 2 thì $A=2^5=32$

- Nếu A chứa hai thừa số nguyên tố thì: x = 2, y = 1 hoặc ngược lại, để A nhỏ nhất ta chọn thừa số nguyên tố bé có số mũ lớn và thừa số lớn có số mũ bé là $A=2^2.3^1=6$ ước: Đối chiếu đề bài ta thấy A > 27 thì 32 thỏa mãn: $\to p^2=32-23=9=3^2$ và 3 là số nguyên tố.

Bài 13: Cho 3 số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn số sau lớn hơn số trước là k đơn vị. CMR: $k\vdots 6$

Lời giải

Gọi 3 số nguyên tố thỏa mãn là: p, p + k và p + 2k

=> k là số chẵn => k chia hết cho 2, Giả sử k không chia hết cho 3 khi đó
$k=3m+1, k=3m+2$

TH1: $k=3m+1$

Với p chia 3 dư 1 thì: p=3n+1=> p+2k=3n+1+6m+2 chia hết cho 3 (loại)

Với p chia 3 dư 2 thì: p=3n+2=> p+k = 3n+2+3m+1 chia hết cho 3(loại)

TH2: k=3m+2

Với p chia 3 dư 1 thì: p=3n+1=>p+k=3n+1+3m+2 chia hết cho 3 (loại)

Với p chia 3 dư 2 thì: p=3n+2=> p+2k=3n+2+6m+4 chia hết cho 3(loại) nên k phải chia hết cho 3 nên k chia hết cho 3=> k chia hết cho 6

Bài 14: Tìm mọi số nguyên tố thỏa mãn: $x^2 - 2y^2 = 1$

Lời giải

Từ giả thiết => $x^2 - 1 = 2y^2$, nếu x chia hết cho 3 vì x nguyên tố nên x = 3, lúc đó y = 2 nguyên tố

Nếu x không chia hết cho 3 thì $x^2 - 1$ chia hết cho 3 khi đó $2y^2$ chia hết cho 3, mà (2, 3) =1

Nên y chia hết cho 3 => y = 3 vậy $x^2 = 19$ không thỏa mãn,

Bài 15: Tìm $n \in N*$ để:

a) $n^4 + 4$ là số nguyên tố. b) $n^{2003} + n^{2002} + 1$ là số nguyên tố.

Lời giải

a) Ta có: $n^4 + 4 = (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2 + 2n)(n^2 + 2 - 2n)$.

Nếu $n^4 + 4$ là số nguyên tố thì $n^2 - 2n + 2 = 1 \Leftrightarrow n = 1$.

Thử lại: Với $n = 1$ thì $n^4 + 4 = 5$ là số nguyên tố.

Vậy, với n = 1 thì $n^4 + 4$ là số nguyên tố.

b) Ta có: $n^{2003} + n^{2002} + 1 = n^2(n^{2001} - 1) + n(n^{2001} - 1) + n^2 + n + 1$.

Với $n > 1$ ta có: $n^{2001} - 1 \vdots n^3 - 1 \vdots n^2 + n + 1$

=> $n^{2003} + n^{2002} + 1 \vdots n^3 + n + 1$ và $n^2 + n + 1 > 1$ nên $n^{2003} + n^{2002} + 1$ là hợp số.

Với n = 1 thì $n^{2003} + n^{2002} + 1 = 3$ là số nguyên tố.

Bài 16:

a) Tìm các số nguyên số p để 2p + 1 là lập phương của một số tự nhiên.

b) Tìm các số nguyên tố p để 13p + 1 là lập phương của một số tự nhên.

Lời giải

a) Giả sử $2p + 1 = n^3$ (với $n \in N$); n là số lẻ nên $n = 2m + 1$ ($m \in N$), khi đó

$2p + 1 = (2m + 1)^3 \Rightarrow p = m(4m^2 + 6m + 3)$.

Vì p là số nguyên tố nên $m = 1$, suy ra $p = 13$.

Thử lại: $2p + 1 = 2.13 + 1 = 27 = 3^3$. Vậy $p = 13$.

b) Giả sử $13p + 1 = n^3 (n \in N); p \geq 2$ suy ra $n \geq 3$.

$13p + 1 = n^3 \Rightarrow 13p = (n - 1)(n^2 + n + 1)$.

13 và p là các số nguyên tố, mà $n - 1 > 1$ và $n^2 + n + 1 > 1$

=> $n - 1 = 13$ hoặc $n - 1 = p$.

+ Với $n - 1 = 13$ thì $n = 14$, khi đó $13p = n^3 - 1 = 2743 \Rightarrow p = 211$ là số nguyên tố.

+ Với $n - 1 = p$ thì $n^2 + n + 1 = 13 \Rightarrow n = 3$, khi đó $p = 2$ là số nguyên tố.

Vậy với p=2, p=211 thì 13p+1 là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 17: Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa $x^2-2y^2=1$.

Lời giải

Giả sử x, y là các số nguyên tố thỏa: $x^2-2y^2=1$.

Khi đó $x^2=2y^2+1$, suy ra x là số lẻ, đặt $x=2n+1(n\in N^*)$. Ta có:

$(2n+1)^2=2y^2+1\Rightarrow 4n^2+4n+1=2y^2+1\Rightarrow y^2=2(n^2+n)\vdots 2\Rightarrow y\vdots 2$,

mà y là số nguyên tố nên suy ra y = 2.

Với y = 2, ta có $x=3$.

Thử lại với $x=3, y=2$ thì $x^2-2y^2=1$.

Bài 18: Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa $x^y+1=z$.

Lời giải

Vì x, y là các số nguyên tố nên $x\geq 2, y\geq 2$ suy ra $z\geq 5$.

z là số nguyên tố lẻ nên x^y là số chẵn suy ra x=2, khi đó $z=2^y+1$.

Nếu y lẻ thì $2^y+1\vdots 3$, suy ra $z\vdots 3$, vô lí. Vậy y chẵn, suy ra y=2, $z=2^2+1=5$.

Vậy các số nguyên tố cần tìm là $x=y=2; z=5$.

Bài 19: Chứng minh rằng nếu $1+2^n+4^n(n\in N^*)$ là số nguyên tố thì $n=3^k$ với $k\in N$.

Lời giải

Đặt $n=3^k.m$ với (m, 3)=1. Giả sử m>1, xét hai trường hợp:

i) $m=3l+1(l\in N^*)$. Ta có:

$1+2^n+4^n=1+2^{3^k(3l+1)}+4^{3^k(3l+1)}=1+a^{(3l+1)}+a^{(6l+2)}$, (với $a=2^{3^k}$), suy ra

$1+2^n+4^n=a(a^{3l}-1)+a^2(a^{6l}-1)+a^2+a+1\vdots a^2+a+1\Rightarrow 1+2^n+4^n$ là hợp số.

ii) $m=3l+2,(l\in N^*)$. Ta có:

$1+2^n+4^n=1+2^{3^k(3l+2)}+4^{3^k(3l+2)}=1+a^{3l+2}+a^{6l+4}=a(a^{6l+3}-1)+a^2(a^{3l}-1)+a^2+a+1\vdots a^2+a+1$

(với $a=2^{3^k}$).

Suy ra $1+2^n+4^n$ là hợp số.

Vậy m = 1 tức là n = 3^k.

Bài 20: Cho $a,b,c,d\in N^*$ thỏa mãn $ab=cd$. Chứng minh rằng: $A=a^n+b^n+c^n+d^n$ là hợp số với mọi $n\in N$.

Lời giải

Giả sử (a, b) = t, khi đó: $a=ta_1, c=tc_1$ với $((a_1,c_1)=1$.

Từ $ab=cd\rightarrow a_1b=c_1d\Rightarrow b\vdots c_1$.

Đặt: $b = kc_1 \Rightarrow c_1 d = a_1.kc_1 \Rightarrow d = ka_1$.

Khi đó: $A = a^n + b^n + c^n + d^n = t^n a_1^n + k^n c_1^n + t^n c_1^n + k^n a_1^n = (k^n + t^n)(a_1^n + c_1^n)$.

Vì $k, t, a_1, c_1 \in N^*$ nên A là hợp số.

Bài 21: Tìm tất cả các số nguyên tố p dạng $\frac{n(n+1)}{2} - 1 \quad (n \geq 1)$.

Lời giải

Ta có: $p = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2 + n - 2}{2} = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$.

Với n = 2 ta có p = 2.

Với n = 3 ta có p = 5.

Với n > 3 thì $\frac{n-1}{2} > 1$ và n+2 >1 nên p là hợp số.

Vậy với n = 2, n = 3 thì p là số nguyên tố có dạng $\frac{n(n+1)}{2} - 1$.

Bài 22: Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho $\frac{ab}{|a-b|}$ là số nguyên tố.

Lời giải

Vì a,b có vai trò như nhau nên có thể giả sử a > b.

Giả sử $\frac{ab}{|a-b|} = p$ với p là số nguyên tố.*

Suy ra $ab \vdots p \Rightarrow a \vdots p$ hoặc $b \vdots p \Rightarrow p \in \{2,3,5,7\}$.

Từ * ta có ab=ap-bp $(a+p)(p-b) = p^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a + p = p^2 \\ p - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = p^2 - p \\ b = p - 1 \end{cases}$

Với p = 2 ta có $\overline{ab} = 21$ hoặc $\overline{ab} = 12$.

Với p = 3 ta có $\overline{ab} = 62$ hoặc $\overline{ab} = 26$.

Với p = 5 và p = 7 ta có a có 2 chữ số (loại).

Vậy các số $\overline{ab}$ cần tìm là 12, 21, 26, 62.

Bài 23: Cho các số $p = b^c + a, q = a^b + c, r = c^a + b$ là các số nguyên tố ($a, b, c \in N^*$). Chứng minh rằng ba số p, q, r có ít nhất hai số bằng nhau.

Lời giải

Ba số a, b, c có ít nhất hai số có cùng tính chẵn lẻ.

Giả sử a,b cùng chẵn hoặc cùng lẻ, khi đó $p = b^c + a$ là số nguyên tố chẵn, vậy p = 2.

Từ đó suy ra a = b = 1; q = c +1 và r = c+ 1 nên q = r.

Bài 24:

a) Cho $2^k + 1$ là số nguyên tố (gọi là nguyên tố Fermat). Chứng minh rằng $k = 0$ hoặc $k = 2^n$.

b) Cho $2^k - 1$ là số nguyên tố (gọi là số nguyên tố Mersenne). Chứng minh rằng k là số nguyên tố.

Lời giải

a) Giả sử phản chứng rằng $k > 0$ và $k \neq 2^n$ với mọi n.

Khi đó $k = 2^n . t$, với t lẻ > 1. Vô lí với $2^k + 1$ là số nguyên tố.

Vậy $k = 0$ hoặc $k = 2^n$.

b) Giả sử $k = m . t$ với $1 < t < k$

=> khi đó $2^k - 1 = \left(2^t\right)^m - 1 \vdots 2^t - 1 \Rightarrow 2^k - 1$ là hợp số vì $2^t - 1 > 1$.

Vậy k là số nguyên tố.

BÀI 5: MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ HỢP SỐ

A. Lý thuyết

- Hợp số là số có nhiều hơn 2 ước

- Chứng minh số A là hợp số

+) Ta đi chứng minh $A > p$ và $A \vdots p$ (trong đó p là số nguyên tố)

B. Bài tập

Bài 1:

a) Cho p là số nguyên tố, hỏi $p^5 - 1$ là số nguyên tố hay hợp số

b) Cho p và p + 4 là các số nguyên tố (p > 3). Chứng minh p + 8 là hợp số

Lời giải

a. Nếu $p = 2 \rightarrow p^5 - 1 = 2^5 - 1 = 31$ là số nguyên tố

- Nếu $p > 2 \rightarrow p : le \rightarrow p^5 : le \rightarrow p^5 - 1 : chan \rightarrow p^5 - 1$ là hợp số

b. $p, p+4, p+8$ là dãy số cách đều 4 đơn vị $\rightarrow$ có 1 số chia hết cho 3

Vì $p > 3 \rightarrow p, p+4$ là số nguyên tố $\rightarrow p \vdots/ 3; p+4 \vdots/ 3 \rightarrow p+8 \vdots 3 \rightarrow p+8$ là hợp sô

Bài 2: Cho p và 8p + 1 là các số nguyên tố (p > 3). Chứng minh rằng 4p + 1 là hợp số

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p chia 3 dư 1 hoặc dư 2 $\rightarrow p$ có dạng

$3k+1; 3k+2 (k \in N^*)$

- Nếu $p = 3k+1 \rightarrow 8p+1 = 24k+9 \vdots 3 \rightarrow 8p+1$ là hợp số (loại)

- Nếu $p = 3k+2 \rightarrow 4p+1 = 12k+9 \vdots 3 (dpcm)$ là hợp số (loại)

Bài 3: Chứng minh rằng các số sau là hợp số :

$121; 121+1; 112111; \underset{n}{11...1}2\underbrace{11.....1}_{n} (n > 2)$

Lời giải

Ta có: $121 = 110 + 11 = 11.10 + 11 = 11(10+1); 11211 = 1110 + 111 = 111(10^2 + 1)$

$1112111 = 1111000 + 1111 = 1111(10^3 + 1); \underbrace{111...1}_{n}2\underbrace{111...1}_{n} = \underbrace{111...1}_{n+1}\underbrace{000...0}_{n} + \underset{n+1}{11...1}$

$= \underbrace{111....1}_{n+1}(\underset{n}{10....0} + 1) = \underset{n+1}{11...1}(10^n + 1)$ là hợp số

Bài 4:

a) Cho p và p + 2 là số nguyên tố (p > 3). CMR: p + 1 là hợp số và $p+1 \vdots 6$

b) Cho p và p + 4 là số nguyên tố. CMR: p + 2021 là hợp số

Lời giải

a) Xét dãy $p, p+1, p+2 \rightarrow p+1 \vdots 3 (la.hop.so)(1)$

Lại có $p > 3 \rightarrow p : le \rightarrow p+1 : chan \rightarrow p+1 \vdots 2 (2)$

Từ $(1)(2) \rightarrow p+1 \vdots 6$

b) Ta có: $p + 2012 = p + 2 + 2010$

Xét dãy $p, p+2, p+4$

+) $p=3 \to p+2012=2015 \vdots 5 \to p+2012$ là hợp số

+) $p>3 \to p+2 \vdots 3 \to p+2012 \vdots 3 \to p+2012$ là hợp số

+) $p=2 \to p+4$ là hợp số $\to$ loại

Bài 5: Một số nguyên tố chia cho 42 có số dư là hợp số. Tìm số dư đó

Lời giải

Gọi p là số nguyên tố theo đầu bài, khi đó: $p=42.k+r=2.3.7k+r(0<r<42)$

Vì r là hợp số $\to 2 \le r < 42$

Vì p là số nguyên tố $\to r \not\vdots 2,3,7 \to r$ có thể là số nguyên tố hoặc bằng 25 $\to r=25$ là giá trị cần tìm

Bài 6: Một số nguyên tố chia cho 60 có số dư là r. Tìm số dư, biết rằng r là số nguyên tố

Lời giải

Giả sử p là số nguyên tố:

$p=60k+r(k\in N;0<r<60);60=2^2.3.5 \to p=2^2.3.5.k+r \to r \not\vdots 2,3,5$

$\to r=1$ hoặc r là số nguyên tố hoặc là hợp số và không chia hết cho 2, 3, 5

$\to r=1$ hoặc r là số nguyên tố khác 2 3, 5 hoặc r = 49 $\to \left[\begin{array}{l} r=1 \\ r=49 \end{array}\right.$

Bài 7: Chứng minh rằng tổng bình phương của ba số nguyên tố lớn hơn 3 luôn là một hợp số

Lời giải

Giả sử: p, q, r là ba số nguyên tố lớn hơn 3

p^2, q^2, r^2 chia cho 3 có dư là $1 \to (p^2+q^2+r^2) \vdots 3 \to p^2+q^2+r^2$ là hợp số

Bài 8: Cho p và 8p - 1 là số nguyên tố, chứng minh rằng 8p + 1 là hợp số

Lời giải

- Dự đoán thấy $p=3$ là số cần tìm

Đặt $p=3a+r\left(r=0;1;2\right)$

- Nếu $r=0 \Rightarrow p=3a$ là số nguyên tố nên $a=1 \Rightarrow p=3, 8p-1=23$ là các số nguyên tố, thỏa mãn điều kiện đầu bài, khi đó $8p+1=25$ là hợp số (đpcm)

- Nếu $r=1 \Rightarrow p=3a+1$ giả sử là số nguyên tố

và $8p-1=8\left(3a+1\right)-1=24a+7$ giả sử cũng là số nguyên tố, khi đó:

$8p+1=8\left(3a+1\right)+1=24a+9 \vdots 3$ là hợp số (đpcm)

- Nếu $r=2 \Rightarrow 8p-1=8(3a+2)-1=24a+15 \vdots 3$ là hợp số nên $r=2(loai)$

Bài 9: Chứng minh rằng: nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 và 2p + 1 là số nguyên tố thì 4p + 1 là hợp số

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p=3k+1, p=3k+2 (k \in N)$

- Nếu $p=3k+1$ là số nguyên tố $\Rightarrow 2p+1=6k+3 \vdots 3 (l)$

- Nếu $p=3k+2$ là số nguyên tố $\Rightarrow 2p+1=6k+5$ giả sử cũng là số nguyên tố, khi đó : $4p+1=12k+9 \vdots 3$ là hợp số, (đpcm)

Bài 10: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3, biết p + 2 cũng là số nguyên tố, Chứng minh rằng p + 1 chia hết cho 6

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3, nên $p=3k+1, p=3k+2, (k \in N^*)$

- Nếu $p=3k+1$ giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow p+2=3k+3 \vdots 3 (l)$

- Nếu $p=3k+2$ giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow p+2=3k+4$ giả sử cũng là số nguyên tố, khi đó : $p+1=3k+3=3(k+1) \vdots 3$

Mà p nguyên tố nên $3k+2$ là số lẻ $\rightarrow 3k$ là số lẻ =>3k là số lẻ => k là số lẻ => k + 1 là số chẵn $\rightarrow 3(k+1) \vdots 6$ (đpcm)

Bài 11: Cho p và p + 4 là số nguyên tố lớn hơn 3, chứng minh rằng : p + 8 là hợp số

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3, nên p có dạng : $p=3k+1, p=3k+2, (k \in N^*)$

- Nếu $p=3k+2 \Rightarrow p+4=3k+6 \vdots 3$ là hợp số (loại)

- Nếu $p=3k+1$ giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow p+4=3k+5$ giả sử cũng là số nguyên tố, khi đó : $p+8=3k+9 \vdots 3$ là hợp số (đpcm)

Bài 12: Chứng minh rằng với p là số nguyên tố lớn hơn 3 và $8p^2 + 1$ là 2 số nguyên tố thì $8p^2 - 1$ là hợp số

Lời giải

Vì $p, 8p^2+1$ là 2 số nguyên tố lớn hơn 3 nên không chia hết cho 3

Khi đó ta có : $8p^2-1; 8p^2; 8p^2+1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số chia hết cho 3

Mà $8p^2+1 \not\vdots 3, p \not\vdots 3 \Rightarrow 8p^2 \not\vdots 3$, Vậy $8p^2-1 \vdots 3$ hay là hợp số

Bài 13: Chứng minh rằng nếu p và p + 2 là hai số nguyên tố lớn hơn 3 thì tổng của chúng chia hết cho 12

Lời giải

Đặt $A = p + (p+2) = 2p + 2 = 2(p+1)$

Và $p + 2 = p - 1 + 3$

Xét 3 số liên tiếp $p-1, p, p+1$ phải có 1 số chia hết cho 3

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3, nên p không chia hết cho 3,

Mặt khác $p - 1 \not\vdots\, 3$ vì nếu chia hết cho 3 thì $p+2$ sẽ chia hết cho 3, như vậy

$p + 1 \vdots 3 => 2(p+1) \vdots 3$

Lại có p là số nguyên tố >3 nên p lẻ => $p+1$ là số chẵn $\vdots 2$

Vậy $2(p+1) \vdots 12$

Bài 14: Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì (p - 1)(p + 1) chia hết cho 24

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ không chia hết cho 2 và 3

Với p không chia hết cho 2 => $(p-1),(p+1)$ là hai số chẵn liên tiếp => $(p-1)(p+1) \vdots 8$

Mặt khác p không chia hết cho 3 nên $p = 3k+1, p = 3k+2$

- Nếu $p = 3k+1 => (p-1) \vdots 3 => (p-1)(p+1) \vdots 24$

- Nếu $p = 3k+2 => (p+1) \vdots 3 => (p-1)(p+1) \vdots 24$

Bài 15: Cho p và 10p + 1 là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng: 5p + 1 là hợp số

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p = 3k+1, p = 3k+2, \left(k \in N^*\right)$

Với $p = 3k+1$ giả sử là số nguyên tố $=> 10p + 1 = 30k + 11$ giả sử cũng là số nguyên tố

Khi đó: $5p + 1 = 15k + 6 \vdots 3$ là hợp số (đpcm)

Với $p = 3k+2$ giải sử là số nguyên tố $=> 10p + 1 = 30k + 21 \vdots 3$ (loại)

Bài 16: Ta biết rằng có 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100, hỏi tổng 25 số nguyên tố đó là số chẵn hay số lẻ

Lời giải

Trong 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100, có 1 số nguyên tố chẵn là số 2

Còn lại 24 số nguyên tố còn lại là số lẻ => tổng của 24 số lẻ cho ta 1 số chẵn

Vậy xét tổng của 25 số nguyên tố đó cho ta được 1 số chẵn

Bài 17: Tổng của ba số nguyên tố là 1012, Tìm số nguyên tố nhỏ nhất trong 3 số nguyên tố đó

Lời giải

Tổng của 3 số nguyên tố là 1012 là 1 số chẵn, nên bắt buộc phải có 1 số chẵn,

Mà số nguyên tố chẵn duy nhất cũng là nhỏ nhất là số 2

Bài 18: Chứng minh rằng mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng 4n + 1 hoặc 4n - 1

Lời giải

Mọi số nguyên tố p lớn hơn 2 đều có dạng $p = 2k+1\left(k \in N^*\right)$

TH1: Nếu k chẵn $=> k = 2n => p = 2k+1 = 2.2n+1 = 4n+1$

TH2: Nếu k lẻ $=> k = 2n-1 => p = 2k+1 = 2(2n-1)+1 = 4n-1 \left(n \in N^*\right)$

Bài 19: Chứng minh rằng p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì p có dạng 6k + 1 hoặc 6k + 5

Lời giải

Mọi số tự nhiên p lớn hơn 3 đều có dạng $p = 3n+1, p = 3n-1$

Vì nếu n lẻ thì p là số chẵn như vậy p không là số nguyên tố

Nên n phải chẵn $=> n = 2k(k > 0, k \in N)$, xét 2 trường hợp

TH1: $p = 3n+1 = 6k+1$

TH2: $p = 3n-1 = 3.2k-1 = 6k-1 = 6k+5$

Bài 20: Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3, sao cho 14p + 1 cũng là số nguyên tố thì 7p + 1 là bội số của 6

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ không chia hết cho 2 và 3

Khi đó $7p+1$ là 1 số chẵn nên chia hết cho 2

Mặt khác vì p không chia hết cho 3 nên p có dạng $p = 3k+1, p = 3k+3, \left(k \in N^*\right)$

Với $p = 3k+1$ giả sử là số nguyên tố, $=> 14p+1 = 45k+15 \vdots 3$ nên $p = 3k+1(l)$

Với $p = 3k+2 => 14p+1 = 42k+29$ giả sử là số nguyên tố, khi đó: $7p+1 = 21k+15 \vdots 3$

Như vậy $7p+1 \vdots 6$

Bài 21: Chứng minh rằng nếu p là tích của n số nguyên tố đầu tiên thì $p-1$ và $p+1$ không thể là các số chính phương

Lời giải

Vì p là tích của n số nguyên tố đầu tiên nên $p \vdots 2$ và p không thể chia hết cho 4 (1)

- Giả sử p + 1 là số chính phương, đặt $p+1 = m^2 (m \in N)$

Vì p chẵn nên $p+1$ lẻ $=> m^2$ lẻ => m lẻ

Đặt $m = 2k+1(k \in N)$, ta có: $m^2 = 4k^2+4k+1 \to p+1 = 4k^2+4k+1 \to p = 4k^2+4k = 4k(k+1)$

Mâu thuẫn với (1)

=> p + 1 không thể là số chính phương

- Giả sử $p = 2.3.5....$ là $\vdots 3 \Rightarrow p-1$ có dạng 3k+2 $\rightarrow p-1$ không là số chính phương

Vậy nếu p là tích của $n(n>1)$ số nguyên tố đầu tiên thì p – 1 và p + 1 không là số chính phương

Bài 22: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn : $10p+1$ cũng là số nguyên tố. CMR : $5p+1 \vdots 6$

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3, nên 10p cũng không chia hết cho 3 (1)

Lại có $10p+1$ là số nguyên tố và $10p+1>3 \Rightarrow 10p+1 \not\vdots 3$ (2)

Ta có $10p(10p+1)(10p+2)$ là tích 3 số tự nhiên liên tiếp nên phải có 1 số chia hết cho 3

$\Rightarrow 10p+2 \vdots 3 \Rightarrow 5p+1 \vdots 3$

Lại có p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ $\Rightarrow 5p+1$ là số chẵn nên chia hết cho 2, khi đó $5p+1 \vdots 6$

Bài 23: Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn: $a^2+c^2=b^2+d^2$. Chứng minh rằng: $a+b+c+d$ là hợp số

Lời giải

Ta có: $\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)-(a+b+c+d)=\left(a^2-a\right)+\left(b^2-b\right)+\left(c^2-c\right)+\left(d^2-d\right)$

$\Rightarrow a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)+d(d-1) \vdots 2$ mà

$a^2+c^2=b^2+d^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2=2\left(b^2+d^2\right) \vdots 2$

Do đó $a+b+c+d \vdots 2$

Vậy $a+b+c+d \geq 4$ nên $a+b+c+d$ là hợp số

Bài 24: Chứng minh các số sau là hợp số

a) $12^{11}+13^{17}+17^{19}$ b) $1+23^{23}+29^{29}+25^{125}$ c) $45^{25}+37^{15}$ d) $95^{354}+51^{25}$

Lời giải

a) Ta có: $12^{11}+13^{17}+17^{19}$ là 1 số chẵn nên là hợp số

b) $1+23^{23}+29^{29}+25^{125}$ là số chẵn nên là hợp số

c) Ta có : $45^{25}+37^{15}$ là 1 số chẵn nên là hợp số

d) Ta có $95^{354}+51^{25}$ là 1 số chẵn nên là hợp số

Bài 25: Chứng minh các số sau là hợp số

a) $21^{123}+23^{124}+25^{125}$ b) $10^{8}+10^{7}+7$ c) $17^{5}+24^{4}-13^{21}$ d) $425^{25}-37^{15}$

Lời giải

a) Ta có : $10^{8}+10^{7}+7$ có tổng các chữ số chia hết cho 9 nên là hợp số

b) Ta có : $17^{5}+24^{4}-13^{21}$ là số chẵn nên là hợp số

c) $425^{25}-37^{15}$ là số chẵn nên là hợp số

Bài 26: Chứng minh các số sau là hợp số

a) $1+2^{7}+3^{11}+5^{13}+7^{17}+11^{19}$ b) $195^{354}-151^{25}$ c) $2^{2^{2n+1}}+3, n\in N$ d) $2^{2^{4n+1}}+7, n\in N$

Lời giải

b) Ta có: $195^{354}-151^{25}$ là số chẵn nên là hợp số

c) Ta có : $2^{2n+1}=2^{2n}.2=4^{n}.2 \Rightarrow 2^{2^{2n+1}}=2^{4^{n}.2}=2^{4^{n}}.4$ nên

$4^{n}=4^{1+n-1}=4.4^{n-1} \Rightarrow 2^{4^{n}}.4=2^{4.4^{n-1}}.4=\left(2^{4}\right)^{4^{n-1}}.4=\overline{...6}.4=\overline{...4}$, khi đó $2^{2^{2n+1}}+3=\overline{...5}\,\vdots\,5$ là hợp số

Bài 27: Chứng minh các số sau là hợp số:

a) $\overline{abcabc}+7$ b) $\overline{abcabc}+22$ c) $\overline{abcabc}+39$

Lời giải

a) Ta có: $\overline{abcabc}=a.10^{5}+b.10^{4}+c.10^{3}+a.10^{2}+b.10+c+7$

$=a.100100+b.10010+1001c+7=1001(100a+101b+c)+7$

Vì 1001 chia hết cho 7 nên $\overline{abcabc}\,\vdots\,7$ là hợp số

b) Tách tương tự, nhưng vì $1001\,\vdots\,11$ nên là hợp số

c) Tách tương tự, nhưng vì $1001\,\vdots\,13$ nên là hợp số