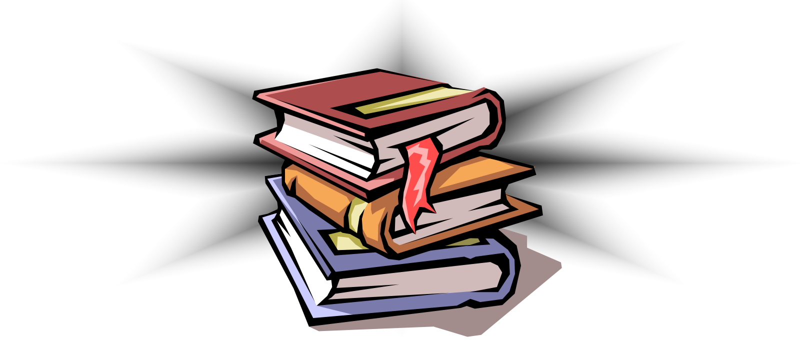
BÙI VĂN TUYÊN



CHUYÊN ĐỀ
ĐỒNG DƯ THỨC

TÀI LIỆU SƯU TẦM

Chuyên đề: ĐỒNG DƯ THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

I. Định nghĩa: Cho số nguyên m > 0. Nếu hai số nguyên a và b khi chia cho m có cùng số dư thì ta nói a đồng dư với b theo môđun m và ký hiệu :

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Chú ý : a) $a \equiv b \pmod{m}$ là một đồng dư thức với a là vế trái, b là vế phải.

b) $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b \,\vdots\, m \Leftrightarrow \exists t \in z$ sao cho $a = b + mt$.

c) Nếu a và b không đồng dư với nhau theo môđun m ta ký hiệu :

$$a \not\equiv b \pmod{m}.$$

II. Tính chất :

1. Tính chất phản xạ : $a \equiv a \pmod{m}$.

2. Tính chất đối xứng : $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$.

3. Tính chất bắc cầu :

$a \equiv b \pmod{m}; b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$.

4. Cộng hay trừ từng vế của đồng dư thức có cùng môđun :

$a \equiv b \pmod{m}$; $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$

Tổng quát : $a_i \equiv b_i \pmod{m}$, $i = 1; 2; ...; k \Rightarrow$

$$a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_k \equiv b_1 \pm b_2 \pm ... \pm b_k \pmod{m}.$$

5. a) Nhân hai vế của đồng dư thức với một số nguyên :

$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ka \equiv kb \pmod{m}$ với $k \in Z$

b)Nhân hai vế và môđun của đồng dư thức với một số nguyên dương:

$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ka \equiv kb \pmod{km}$ với $k \in N^*$

6. Nhân từng vế của nhiều đồng dư thức có cùng môđun :

$a \equiv b \pmod{m}$; $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$

Tổng quát $a_i \equiv b_i \pmod{m}$, $i = 1; 2; ...; k \Rightarrow a_1 a_2 ... a_k \equiv b_1 b_2 ... b_k \pmod{m}$.

7. Nâng hai vế của một đồng dư thức lên cùng một lũy thừa :

$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{m}$ $(k \in N^*)$

8. Nếu hai số đồng dư với nhau theo nhiều môđun thì chúng đồng dư với nhau theo môđun là BCNN của các môđun ấy :

$a \equiv b \pmod{m_i}$, $i = 1; 2; ...; k \Rightarrow a \equiv b \pmod{[m_1; m_2; ...; m_k]}$. Đặc biệt nếu $(m_i, m_j) = 1$ $(i, j = 1; 2; ...; k)$ thì

$$a \equiv b \pmod{m_i} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m_1 . m_2 . ... . m_k}.$$

9. Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì tập hợp các ước chung của a và m bằng tập hợp các ước chung của b và m.

Đặc biệt : $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow (a, m) = (b, m)$

10. Chia hai vế và môđun của một đồng dư cho một ước dương chung của chúng :

$$a \equiv b \pmod{m},\ k \in UC(a,b,m),\ k > 0 \Rightarrow \frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k}\left(\bmod \frac{m}{k}\right)$$

Đặc biệt : $ac \equiv bc \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b\left(\bmod \frac{m}{(c,m)}\right)$

III. Một số định lý (ta thừa nhận không chứng minh)

1. Định lý Fermat bé. Cho a là số nguyên dương và p là số nguyên tố. Khi đó ta luôn có $a^p \equiv a \pmod{p}$. Đặc biệt nếu $(a, p) = 1$ thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

2. Định lý Wilson. Với mọi số nguyên tố p thì $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

3. Định lý Euler. Cho m là số nguyên dương và a là số nguyên tố cùng nhau với m; $\varphi(m)$ là số các số nguyên dương nhỏ hơn m và nguyên tố cùng nhau với m. Khi đó $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Chú ý: Nếu số nguyên dương m có dạng phân tích thành thừa số nguyên tố: m = $p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.....p_k^{\alpha_k}$ thì $\varphi(m) = m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$.

B. Một số ví dụ

1. Dạng toán tìm số dư trong phép chia có dư

* *Tìm cách giải* : Với hai số nguyên a và m, m > 0 luôn có duy nhất cặp số nguyên q, r sao cho a = mq + r, $0 \le r < m$. Để tìm số dư r trong phép chia a cho m ta cần tìm r sao cho $\begin{cases} a \equiv r \pmod{m} \\ 0 \le r < m \end{cases}$.

Ví dụ 1. a) Tìm số dư trong phép chia $1532^5 - 1$ cho 9.

b) Tìm số dư trong phép chia $2016^{2018} + 2$ cho 5

Giải

a) Ta có $1532 = 9.170 + 2 \equiv 2 \pmod{9}$ do đó $1532^5 \equiv 2^5 \pmod{9} \Rightarrow 1532^5 - 1 \equiv 2^5 - 1 \pmod{9}$. Vì $2^5 - 1 = 31 \equiv 4 \pmod{9}$. Do đó

$1532^5 - 1 \equiv 4 \pmod{9}$. Vậy số dư cần tìm là 4.

b) Ta có $2016 \equiv 1 \pmod{5}$ do đó $2016^{2018} \equiv 1^{2018} \pmod{5} \Rightarrow$

$2016^{2018} + 2 \equiv 1^{2018} + 2 \pmod{5}$. Vì $1 + 2 = 3 \equiv 3 \pmod{5}$. Do đó

$2016^{2018} + 2 \equiv 3 \pmod{5}$. Vậy số dư cần tìm là 3.

Ví dụ 2. Chứng minh $(2013^{2016} + 2014^{2016} - 2015^{2016})^{10} \vdots 106$

Giải

Ta phải tìm số tự nhiên r sao cho

$0 = r \equiv (2013^{2016} + 2014^{2016} - 2015^{2016})^{10} \pmod{106}$

Ta có $2013 = 106.19 - 1 \Rightarrow 2013 \equiv -1 \pmod{106} \Rightarrow 2013^{2016} \equiv 1 \pmod{106}$

$2014 = 106.19 \Rightarrow 2014 \equiv 0 \pmod{106} \Rightarrow 2014^{2016} \equiv 0 \pmod{106}$

$2015 = 106.19 + 1 \Rightarrow 2015 \equiv 1 \pmod{106} \Rightarrow 2015^{2016} \equiv 1 \pmod{106}$

Do đó $(2013^{2016} + 2014^{2016} - 2015^{2016})^{20} \equiv 0 \pmod{106}$.

Ví dụ 3. a) Hãy tìm chữ số tận cùng của $9^{9^{10}}$

b) Hãy tìm hai chữ số tận cùng của 3^{1000}

Giải

a) Tìm chữ số tận cùng của một số là tìm dư trong phép chia số đó cho 10. Vì $9^{2n+1} = 9.81^n \equiv 9 \pmod{10}$. Do 9^{10} là số lẻ nên số $9^{9^{10}}$ có chữ số tận cùng là 9.

b) Tìm hai chữ số tận cùng của một số là tìm dư trong phép chia số đó cho 100.

Ta có $3^4 = 81 \equiv -19 \pmod{100} \Rightarrow 3^8 \equiv (-19)^2 \pmod{100}$

Mà $(-19)^2 = 361 \equiv 61 \pmod{100}$ Vậy $3^8 \equiv 61 \pmod{100}$

$3^{10} \equiv 61.9 \equiv 549 \equiv 49 \pmod{100}$

$3^{20} \equiv 49^2 \equiv 01 \pmod{100}$ (do $49^2 = 2401 = 24.100 + 1$)

Do đó $3^{1000} \equiv 01 \pmod{100}$ nghĩa là hai chữ số sau cùng của 3^{1000} là 01.

2. Dạng toán chứng minh sự chia hết:

Khi số dư trong phép chia a cho m bằng 0 thì $a \vdots m$. Như vậy để chứng tỏ $a \vdots m$ ta chứng minh $a \equiv 0 \pmod{m}$

Ví dụ 4. Chứng minh $4^{2018} - 7 \vdots 9$

Giải

Ta có $4^3 = 64 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 4^{2016} = \left(4^3\right)^{672} \equiv 1 \pmod{9}$

Mặt khác $4^2 = 16 \equiv 7 \pmod{9} \Rightarrow 4^{2018} = 4^{2016}.4^2 \equiv 1.7 \pmod{9}$

Vậy $4^{2018} - 7 \equiv 0 \pmod{9}$ hay $4^{2018} - 7 \vdots 9$.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng $12^{2n+1} + 11^{n+2} \vdots 133$ ($n \in N$)

Giải

Cách 1:Ta có $12^2 = 144 \equiv 11 \pmod{133}$; $11^2 = 121 \equiv -12 \pmod{133}$

Do đó $12^{2n+1} = 12.\left(12^2\right)^n \equiv 12.11^n \pmod{133}$

$11^{n+2} = 11^2.\ 11^n \equiv -12.\ 11^n \pmod{133}$

Do đó $12^{2n+1} + 11^{n+2} \equiv 12.\ 11^n - 12.\ 11^n \equiv 0 \pmod{133}$.

Vậy với $n \in N$ thì $12^{2n+1} + 11^{n+2} \,\vdots\, 133$.

Cách 2: Ta có $12^2 = 144 \equiv 11 \pmod{133} \Rightarrow 12^{2n} \equiv 11^n \pmod{133}$ (1)

Mà $12 \equiv -11^2 \pmod{133}$ (2) Nhân vế với vế của (1) và (2) ta có :

$12^{2n}.\ 12 \equiv 11^n.\ (-11^2) \pmod{133} \Rightarrow 12^{2n+1} \equiv -11^{n+2} \pmod{133}$

$12^{2n+1} + 11^{n+2} \equiv 0 \pmod{133}$ hay $12^{2n+1} + 11^{n+2} \,\vdots\, 133$.

3. Dạng toán xác định dấu hiệu chia hết

Ví dụ 6. Cho số $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ $(1 \le a_n \le 9\ ;\ \ 0 \le a_i \le 9;\ i = 0;\ 1;\ \ldots;\ n-1)$

Hãy xác định dấu hiệu chia hết :

a) Cho 3; b) Cho 4.

Giải

Ta có $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_1.10 + a_0$.

a) Ta có $10 \equiv 1 \pmod 3$ do đó $a_i.\ 10^i \equiv a_i \pmod 3$, $i = 1; 2; 3; \ldots; n$

Do đó $a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_1.10 + a_0 \equiv (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) \pmod 3$

Vậy $a \,\vdots\, 3 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod 3$

$\Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \,\vdots\, 3$.

b) Ta có $10^2 = 100 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow a_i.\ 10^i \equiv 0 \pmod 4$, $i = 2; 3; \ldots; n$

$\Rightarrow a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_1.10 + a_0 \equiv (a_1.10 + a_0) \pmod 4$

Vậy $a \,\vdots\, 4 \Leftrightarrow a_1.\ 10 + a_0 \equiv 0 \pmod 4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \,\vdots\, 4$.

4. Dạng toán sử dụng các định lý

Ví dụ 7. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì :

$$2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007 \text{ chia hết cho } 22$$

Giải

Theo Định lý Fermat bé ta có $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$; $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

Ta có $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow 3^{4n+1} = 3.\ (3^4)^n \equiv 3 \pmod{10}$

$\Rightarrow 3^{4n+1} = 10k + 3$, $(k \in N)$

Mặt khác $2^4 = 16 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 2^{4n} \equiv 1 \pmod 5$

$\Rightarrow 2^{4n+1} = 2.(2^4)^n \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} = 10t + 2$, $(t \in N)$

Do đó $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007 = 2^{10k+3} + 3^{10t+2} + 2002 + 5$

$= 2^3.\left(2^{10}\right)^k + 3^2.\left(3^{10}\right)^t + 22.91 + 5 \equiv 2^3 + 3^2 + 0 + 5 \equiv 0 \pmod{11}$

Mà $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007 \,\vdots\, 2$ (vì $2^{3^{4n+1}}$ là số chẵn $3^{2^{4n+1}}$ là số lẻ 2007 là số lẻ).

Do (2 ; 11) = 1 nên $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007 \vdots 22$.

Ví dụ 8. Cho $a_1 ; a_2 ; ... ; a_{2016}$ là 2016 số nguyên dương . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + ... + a_{2016}^5 \vdots 30$ là $a_1 + a_2 + ... + a_{2016} \vdots 30$.

Giải

Theo định lý Fermat bé , do 2; 3; 5 là các số nguyên tố và a là số nguyên dương bất kỳ ta có :

$a^2 \equiv a \pmod 2 \Rightarrow a^4 = (a^2)^2 \equiv a^2 \equiv a \pmod 2 \Rightarrow a^5 \equiv a \pmod 2$

$a^3 \equiv a \pmod 3 \Rightarrow a^5 = a^3 . a^2 \equiv a.a^2 \equiv a^3 \equiv a \pmod 3$

$a^5 \equiv a \pmod 5$

Theo tính chất nếu hai số đồng dư với nhau theo nhiều môđun thì chúng đồng dư với nhau theo mô đun là BCNN của các môđun ấy.

Do đó $a^5 \equiv a \pmod{2.3.5}$ hay $a^5 \equiv a \pmod{30} \Rightarrow a^5 - a \equiv 0 \pmod{30}$

Nghĩa là $\left(a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + ... + a_{2016}^5\right) - (a_1 + a_2 + ... + a_{2016}) \equiv 0 \pmod{30}$

Vậy $a_1 + a_2 + ... + a_{2016} \vdots 30 \Leftrightarrow a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + ... + a_{2016}^5 \vdots 30$

Ví dụ 9. Chứng minh rằng trong các số tự nhiên thế nào cũng có số k sao cho $1983^k - 1$ chia hết cho 10^5.

(Đề thi học sinh giỏi toán cấp 2 toàn quốc năm 1983).

Giải

Vì 1983 không chia hết cho 2 và không chia hết cho 5 mà $10^5 = 2^5.5^5$ nên $(1983; 10^5) = 1$. Áp dụng định lý Euler ta có :

$$1983^{\varphi(10^5)} \equiv 1 \left(\mod 10^5\right).$$

Ta có $\varphi\left(10^5\right) = 10^5\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4.10^4$. Nghĩa là $1983^{4.10^4} - 1 \vdots 10^5$

Vậy $k = 4. 10^4$.

4. Dạng toán khác

Ví dụ 10. Chứng minh rằng $1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k}$ không chia hết cho 5.

Giải

Do 5 là số nguyên tố nên theo Định lý Fermat bé ta có: với a = 1; 2; 3; 4 ta có $a^5 \equiv a \pmod 5 \Leftrightarrow a^4 \equiv 1 \pmod 5 \Leftrightarrow a^{4k} \equiv 1 \pmod 5$.

Do đó $1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} \equiv 1 + 1 + 1 + 1 \equiv 4 \pmod 5$.

Chứng tỏ $1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} \not\vdots\ 5$.

Ví dụ 11. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p tồn tại vô số số có dạng $2^n - n$, $(n \in \mathbb{N})$ chia hết cho p. (*Thi vô địch Canađa năm 1983*)

Giải : * Nếu p = 2 thì $2^n - n \vdots 2$, $\forall n = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$.

* Nếu $p \neq 2$ do $(2 ; p) = 1$ nên theo định lý Fermat bé ta có :

$2^{p-1} \equiv 1 \pmod p \Rightarrow 2^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p \Rightarrow 2^{(p-1)^{2k}} - 1 \equiv 0 \pmod p$.

Hay là $2^{(p-1)^{2k}} - 1 \vdots p \quad (k \in \mathbb{N} ; k \geq 2)$.

Mặt khác $(p-1)^{2k} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1 \pmod p$

$$\Rightarrow 2^{(p-1)^{2k}} - (p-1)^{2k} = \underbrace{\left[2^{(p-1)^{2k}} - 1\right]}_{\vdots p} - \underbrace{\left[(p-1)^{2k} - 1\right]}_{\vdots p} \vdots p$$

Vậy tồn tại vô số số tự nhiên n có dạng $n = (p-1)^{2k}$, $(\forall k \in \mathbb{N} ; k \geq 2)$ sao cho $2^n - n \vdots p$.

C. Bài tập vận dụng

Dạng toán tìm số dư trong phép chia có dư

26.1. Tìm số dư trong phép chia

a) $8! - 1$ cho 11. b) $2014^{2015} + 2016^{2015} + 2018$ cho 5.

c) $2^{50} + 41^{65}$ cho 7 d) $1^5 + 3^5 + 5^5 + ... + 97^5 + 99^5$ cho 4.

26.2. Tìm số dư trong phép chia :

a) $1532^5 - 4$ cho 9 ; b) 2^{2000} cho 25;

c) $2014^{2015^{2016}}$ cho 13.

26.3. Tìm số dư trong phép chia :

a) $A = 35^2 - 35^3 + 35^4 - 35^8 + 35^{16} + 35^{32}$ cho 425.

b) $B = 10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + ... + 10^{10^{10}}$ cho 7.

26. 4. a) Tìm chữ số tận cùng của 4^{3^2}

b) Tìm hai chữ số tận cùng của 3^{999}.

c) Tìm ba chữ số tận cùng của số 2^{512}.

Dạng toán chứng minh sự chia hết

26.5. Chứng minh :

a) $41^{2015} - 6 \vdots 7$; b) $2^{4n+1} - 2 \vdots 15 \quad (n \in \mathbb{N})$;

c) $3^{76} - 2^{76} \vdots 13$; d) $20^{15} - 1 \vdots 341$.

26.6. Chứng minh $1890^{79} + 1945^{2015} + 2017^{2018} \vdots 7$.

26.7. a) Chứng minh $5555^{2222} + 2222^{5555} + 15554^{1111} \vdots 7$

b) Cho $M = 220^{119^{69}} + 119^{69^{220}} + 69^{220^{119}} + (220 + 119 + 69)^{102}$

Chứng minh $M \vdots 102$.

26.8. Chứng minh rằng $5^{2n-1} . 2^{n+1} + 2^{2n-1} . 3^{n+1} \vdots 38 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Dạng toán xác định dấu hiệu chia hết

26.9. Cho số a = $\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$ $(1 \le a_n \le 9\ ;\ \ 0 \le a_i \le 9\,; i = 0; 1; ...; n-1)$

Hãy xác định dấu hiệu chia hết :

a) Cho 9; b) Cho 25; c) Cho 11; d) Cho 8.

Dạng toán sử dụng các định lý cơ bản

26.10. Cho $A = 2^{2^{10n+1}} + 19$ với $n \in N^*$. Chứng minh rằng A là một hợp số.

26.11. Cho B = $(12!)^{13} + 2016^{2015}$. Chứng minh rằng B chia hết cho 13.

26.12. Chứng minh rằng với $n \in N$:

a) $2^{2^{2n+1}} + 3.2^{3n} \vdots 7$;

b) $2^{2^{4n+1}} + 2.12^{5n+1} + 5.10^{2n} \vdots 11$.

Dạng toán khác:

26.13. a) Với giá trị nào của số tự nhiên n thì $3^n + 63$ chia hết cho 72.

b) Cho $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1$. Tìm giá trị tự nhiên của n để $A \vdots 323$.

26.14. Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + 1 \vdots p$.

26.15. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p^2 + 20$ là số nguyên tố .

26.16. Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng số $ab^p - ba^p \vdots p$ với mọi số nguyên dương a, b.

26.17. a) Chứng minh rằng tổng các bình phương của ba số nguyên trong phép chia cho 8 không thể có dư là 7.

b) Chứng minh phương trình $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 2015$ không có nghiệm nguyên.

26.18. Tìm hai chữ số tận cùng của $2011^{2010^{2009}}$

(Đề thi Olympic Toán Singapore năm 2010)

26.19. Cho biểu thức $A = (a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}) - (a^{2008} + b^{2008} + c^{2008})$ với a, b, c là các số nguyên dương. Chứng minh rằng A chia hết cho 30.

(Đề thi chọn học sinh giỏi môn toán lớp 9 TP Hà Nội năm học 2011 – 2012)

26.20. Chứng minh rằng không tồn tại các bộ ba số nguyên (x; y; z) thỏa mãn đẳng thức $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$.

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2011 – 2012).

26.21. Tìm hai chữ số cuối cùng của số $A = 41^{106} + 57^{2012}$.

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2012 – 2013).

26.22. Cho a, b là hai số nguyên dương thỏa mãn a + 20 và b + 13 cùng chia hết cho 21. Tìm số dư trong phép chia $A = 4^a + 9^b + a + b$ cho 21.

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên Trần Phú Hải Phòng năm học 2013 – 2014)

26.23. Cho n là một số nguyên dương chứng minh $A = 2^{3n+1} + 2^{3n-1} + 1$ là hợp số.

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9 TP Hà Nội năm học 2014 – 2015)

26.24. Chứng minh $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh năm học 2015 – 2016)

HƯỚNG DẪN GIẢI

26.1. Với những bài toán dạng này, phương pháp chung là tính toán để đi đến $a \equiv b \pmod{m}$ với b là số có trị tuyệt đối nhỏ nhất có thể được (tốt nhất là $b = \pm 1$) từ đó tính được thuận lợi $a^n \equiv b^n \pmod{m}$

a) $8! = 1.2.3.4.5.6.7.8$.

Ta có $3.4 = 12 \equiv 1 \pmod{11}$; $2.6 = 12 \equiv 1 \pmod{11}$; $7.8 \equiv 1 \pmod{11}$ Vậy $8! \equiv 5 \pmod{11}$ $\Rightarrow 8! - 1 \equiv 4 \pmod{11}$. Số dư trong phép chia $8! - 1$ cho 11 là 4.

b) $2014 \equiv -1 \pmod{5} \Rightarrow 2014^{2015} \equiv -1 \pmod{5}$

$2016 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 2016^{2015} \equiv 1 \pmod{5}$; $2018 \equiv 3 \pmod{5}$

$2014^{2015} + 2016^{2015} + 2018 \equiv 3 \pmod{5}$.

c) $2^3 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 2^{50} = (2^3)^{16}.4 \equiv 4 \pmod{7}$

$41 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 41^{65} \equiv (-1)^{65} \equiv -1 \pmod{7}$

$2^{50} + 41^{65} \equiv 4 - 1 \equiv 3 \pmod{7}$.

d) $1^5 \equiv 1 \pmod{4}$; $3^5 \equiv -1 \pmod{4}$; $5^5 \equiv 1 \pmod{4}$; ...;

$97^5 \equiv 1 \pmod{4}$; $99^5 \equiv -1 \pmod{4}$. Đáp số : Dư 0 .

26.2. a) $1532 \equiv 2 \pmod{9} \Rightarrow 1532^5 \equiv 2^5 \equiv 5 \pmod{9}$

$\Rightarrow 1532^5 - 4 \equiv 1 \pmod{9}$

b) $2^5 = 32 \equiv 7 \pmod{25} \Rightarrow 2^{10} = (2^5)^2 \equiv 7^2 \equiv -1 \pmod{25}$.

$2^{2000} = (2^{10})^{200} \equiv (-1)^{200} \equiv 1 \pmod{25}$.

c) $2014 = 155.13 - 1$ nên $2014 \equiv -1 \pmod{13}$; $2015^{2016} = 2k + 1$ $(k \in N)$

$\Rightarrow 2014^{2015^{2016}} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 \pmod{13}$. Đáp số : dư 12.

26.3. a) Ta có $35^2 = 1225 = 425.3 - 50 \equiv -50 \pmod{425}$

$35^3 = 35^2.35 \equiv -50.35 \equiv -1750 \equiv -50 \pmod{425}$

$35^4 = (35^2)^2 \equiv (-50)^2 \equiv 2500 \equiv -50 \pmod{425}$

Tương tự với 35^8; 35^{16}; 35^{32}. Từ đó có $A \equiv -100 \pmod{425}$.

Hay số dư trong phép chia A cho 425 là 325.

b) Ta có $10^5 = 7.14285 + 5 \equiv 5 \pmod 7$; $10^6 = 5.10 \equiv 1 \pmod 7$;

$10^n - 4 = \underbrace{\overline{99...96}}_{n-1\,số\,9} \equiv 0 \pmod 2$ và $\underbrace{\overline{99...96}}_{n-1\,số\,9} \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow 10^n - 4 \equiv 0 \pmod 6$

$\Rightarrow 10^n \equiv 4 \pmod 6$ và $10^n = 6k + 4$ ($k, n \in N^*$).

Do đó $10^{10^n} = 10^{6k+4} = (10^6)^k.10^4 \equiv 10^4 \pmod 7$

Vậy $B \equiv 10^4 + 10^4 + 10^4 + ... + 10^4 \equiv 10.10^4 \equiv 10^5 \equiv 5 \pmod 7$.

26. 4. a) Ta tìm dư trong phép chia số đó cho 10.

Vì $4^2 \equiv 6 \pmod{10}$ nên $4^{3^2} = 4^9 = (4^2)^4.4 \equiv 6.4 \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow$ chữ số tận cùng là 4.

b) Ta tìm dư trong phép chia số đó cho 100. Theo ví dụ 3 chuyên đề 26 ta đã có $3^{1000} \equiv 01 \pmod{100}$ nghĩa là hai chữ số sau cùng của 3^{1000} là 01. Số 3^{1000} là bội số của 3 nên chữ số hàng trăm của nó khi chia cho 3 phải có số dư là 2 để chia tiếp thì 201 chia hết cho 3 (nếu số dư là 0 hay 1 thì 001; 101 đều không chia hết cho 3). Vậy số $3^{999} = 3^{1000} : 3$ có hai chữ sô tận cùng bằng $201 : 3 = 67$.

c) Ta tìm dư trong phép chia số đó cho 1000. Do $1000 = 125.8$ trước hết ta tìm số dư của 2^{512} cho 125. Từ hằng đẳng thức:

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ ta có nhận xét nếu $a \vdots 25$ thì $(a + b)^5 \equiv b^5 \pmod{125}$.

Vì $2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25}$ nên $2^{10} = 25k - 1$ ($k \in N$).

Từ nhận xét trên ta có $2^{50} = (2^{10})^5 = (25k - 1)^5 \equiv -1 \pmod{125}$

Vì vậy $2^{512} = (2^{50})^{10}.2^{12} \equiv (-1)^{10}.2^{12} \equiv 2^{12} \pmod{125}$.

Do $2^{12} = 2^{10}.2^2 = 1024.4 \equiv 24.4 \equiv 96 \pmod{125}$. Vậy $2^{512} \equiv 96 \pmod{125}$.

Hay $2^{512} = 125m + 96, m \in N$. Do $2^{512} \vdots 8$; $96 \vdots 8$ nên $m \vdots 8 \Rightarrow m = 8n$ ($n \in N$).

$2^{512} = 125.8n + 96 = 1000n + 96$. Vậy ba chữ số tận cùng của số 2^{512} là 096.

26.5. Để chứng tỏ $a \vdots m$ ta chứng minh $a \equiv 0 \pmod m$

a) $41 = 42 - 1 \equiv -1 \pmod 7$. Do đó $41^{2015} \equiv (-1)^{2015} \equiv -1 \pmod 7$

Hay $41^{2015} \equiv 6 \pmod 7 \Rightarrow 41^{2015} - 6 \equiv 0 \pmod 7$

b) Ta có $2^4 = 16 \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow 2^{4n} \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow 2^{4n} - 1 \equiv 0 \pmod{15}$

Do đó $2^{4n+1} - 2 = 2(2^{4n} - 1) \equiv 0 \pmod{15}$.

c) Ta có $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$; $3^{76} = (3^3)^{25}.3 \equiv 3 \pmod{13}$

Ta có $2^4 \equiv 3 \pmod{13} \Rightarrow 2^6 \equiv 12 \equiv -1 \pmod{13}$

$2^{76} = (2^6)^{12}.2^4 \equiv 3 \pmod{13}$

Do đó $3^{76} - 2^{76} \equiv 0 \pmod{13}$ hay $3^{76} - 2^{76} \vdots 13$

d) $341 = 11 \cdot 31$

* Ta có $2^5 = 32 \equiv -1 \pmod{11}$; $20 = 22 - 2 \equiv -2 \pmod{11}$

Do đó $20^{15} \equiv (-2)^{15} \equiv -(2^5)^3 \equiv 1 \pmod{11}$

* $20^{15} = (2^5)^3 . (5^3)^5 \equiv 1 \pmod{31}$ do $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$ và $5^3 \equiv 1 \pmod{31}$

Do đó $20^{15} \equiv 1 \pmod{11.31}$ hay $20^{15} \equiv 1 \pmod{341} \Rightarrow 20^{15} - 1 \,\vdots\, 341$

26.6. $1890 \equiv 0 \pmod 7$; $1945 \equiv -1 \pmod 7$; $2017 \equiv 1 \pmod 7$

$1890^{79} \equiv 0 \pmod 7$; $1945^{2015} \equiv -1 \pmod 7$; $2017^{2018} \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow$ đpcm.

26.7. a)Ta có $5555 = 793.7 + 4 \equiv 4 \pmod 7$; $2222 = 318.7 - 4 \equiv -4 \pmod 7$

$\Rightarrow 5555^{2222} + 2222^{5555} \equiv 4^{2222} + (-4)^{5555} \equiv -4^{2222}(4^{3333} - 1) \pmod 7$

Do $4^{3333} - 1 = \left[\left(4^3\right)^{1111} - 1\right]$; $4^3 = 64 \equiv 1 \pmod 7$ nên $(4^3)^{1111} \equiv 1 \pmod 7$

Hay $4^{3333} - 1 \equiv 0 \pmod 7$. Do đó $5555^{2222} + 2222^{5555} \equiv 0 \pmod 7$ và

$15554^{1111} = (2.\,7777)^{1111} = 2^{1111}.\,7777^{1111} \equiv 0 \pmod 7$ $\Rightarrow$ đpcm.

b) Ta có $102 = 2.3.17$. Ta có $(220 + 119 + 69)^{102} \equiv 0 \pmod{102}$

*$220 \equiv 0 \pmod 2$; $119 \equiv -1 \pmod 2$; $69 \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow M \equiv 0 \pmod 2$

*$220 \equiv 1 \pmod 3$; $119 \equiv -1 \pmod 3$; $69 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow M \equiv 0 \pmod 3$

*$220 \equiv -1 \pmod{17}$;$119 \equiv 0 \pmod{17}$; $69 \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow M \equiv 0 \pmod{17}$

(Để ý 119^{69} và 69^{220} là các số lẻ) ; $\Rightarrow M \equiv 0 \pmod{2.3.17}$. Hay $M \,\vdots\, 102$

26.8. Đặt $A = 5^{2n-1} . 2^{n+1} + 2^{2n-1} . 3^{n+1}$. Ta có $A \,\vdots\, 2$, $\forall n \in N^*$;

Ta có $A = 2^n (5^{2n-1} . 2 + 2^{n-1} . 3^{n+1}) = 2^n (25^{n-1} . 10 + 6^{n-1} . 9)$

Do $25 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow A \equiv 2^n (6^{n-1} .10 + 6^{n-1} . 9) \equiv 2^n.6^{n-1} . 19 \equiv 0 \pmod{19}$

Hay $A \,\vdots\, 19$. Mà $(2 ; 19) = 1 \Rightarrow A \,\vdots\, 19.\,2 \Rightarrow A \,\vdots\, 38$.

26.9. Ta có $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_1.10 + a_0$.

a) Ta có $10 \equiv 1 \pmod 9$ do đó $a_i.\,10^i \equiv a_i \pmod 9$, $i = 1; 2; 3; ...; n$

Do đó $a \equiv (a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0) \pmod 9$. Vậy

$a \,\vdots\, 9 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod 9 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \,\vdots\, 9$.

b) Ta có $10^2 = 100 \equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow a_i.\,10^i \equiv 0 \pmod{25}$, $i = 2; 3; ...; n$.

$\Rightarrow a \equiv (a_1.10 + a_0) \pmod{25}$.

Vậy $a \,\vdots\, 25 \Leftrightarrow a_1.\,10 + a_0 \equiv 0 \pmod{25} \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \,\vdots\, 25$.

c) Do $10 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow a_i.\,10^i \equiv a_i .(-1)^i \pmod{11}$

$a \equiv (a_0 + a_2 + a_4 + ...) - (a_1 + a_3 + a_5 + ...) \pmod{11}$

Do đó $a \,\vdots\, 11 \Leftrightarrow (a_0 + a_2 + a_4 + ...) - (a_1 + a_3 + a_5 + ...) \equiv 0 \pmod{11}$

Tức là hiệu của tổng các chữ số ở vị trí lẻ và tổng các chữ số ở vị trí chẵn bằng 0.

d) Ta có $10^3 = 1000 \equiv 0 \pmod 8 \Rightarrow a_i.10^i \equiv 0 \pmod 8$, $i = 3; 4; ...; n$.

$\Rightarrow a \equiv (a_2.10^2 + a_1.10 + a_0) \pmod 8$.

Vậy $a \vdots 8 \Leftrightarrow a_2.10^2 + a_1.10 + a_0 \equiv 0 \pmod 8 \Leftrightarrow \overline{a_2a_1a_0} \vdots 8$.

26.10. Theo định lý Fermat bé, do 11 là số nguyên tố nên ta có

$2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10n} \equiv 1 \pmod{11}$

$\Rightarrow 2^{10n+1} = 2.2^{10n} \equiv 2 \pmod{22} \Rightarrow 2^{10n+1} = 22k + 2$ $(k \in N)$

Do 23 là số nguyên tố ta cũng có $2^{22} \equiv 1 \pmod{23} \Rightarrow 2^{2^{10n+1}} = 2^{22k+2} = 4.2^{22k} \equiv 4 \pmod{23} \Rightarrow$ $2^{2^{10n+1}} + 19 \equiv 4 + 19 \equiv 0 \pmod{23}$ Tức là $A \vdots 23$. Mà $A > 23$, $\forall n \geq 1$ nên A là hợp số.

26.11. Theo định lý Wilson : Với mọi số nguyên tố p thì $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

Do 13 nguyên tố nên $12! \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow (12!)^{13} \equiv (-1)^{13} \equiv -1 \pmod{13}$.

Ta có $2016 = 13.155 + 1 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 2016^{2015} \equiv 1 \pmod{13}$.

Do đó $B = (12!)^{13} + 2016^{2015} \equiv 0 \pmod{13}$. Hay $B \vdots 13$.

26.12. a) Theo Định lý Fermat bé , do 7 là số nguyên tố nên $2^6 \equiv 1 \pmod 7$.

Ta có $4 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 4^n \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 2.4^n \equiv 2 \pmod 6$. Nghĩa là

$2^{2n+1} = 2(2^2)^n = 2.4^n \equiv 2 \pmod 6 \Rightarrow 2^{2n+1} = 6k + 2$, $(k \in N)$

Mặt khác $2^{3n} = (2^3)^n = 8^n \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 3.2^{3n} \equiv 3 \pmod 7$.

Do đó $2^{2^{2n+1}} + 3.2^{3n} \equiv 2^{6k+2} + 3 \equiv 2^2.(2^6)^k + 3 \equiv 2^2.1 + 3 \equiv 0 \pmod 7$.

b) Do 11 là số nguyên tố nên $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

Ta có $16 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 16^n \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 2.16^n \equiv 2 \pmod{10}$. Nghĩa là $2^{4n+1} = 2(2^4)^n = 2.16^n \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} = 10k + 2$, $(k \in N)$

Mặt khác $12 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 12^{5n+1} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2.12^{5n+1} \equiv 2 \pmod{11}$;

Do $10^2 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 10^{2n} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 5.10^{2n} \equiv 5 \pmod{11}$.

Vì thế $2^{2^{4n+1}} + 2.12^{5n+1} + 5.10^{2n} \equiv 2^{10k+2} + 2 + 5 \equiv 2^2 + 7 \equiv 0 \pmod{11}$.

26.13. a) Ta có $72 = 8.9$ và $(8; 9) = 1$.

*$63 \equiv 0 \pmod 9$; khi $n = 2$ thì $3^n \equiv 0 \pmod 9$ do đó $3^n + 63 \equiv 0 \pmod 9$.

*Mặt khác, với $n = 2k$ $(k \in N^*)$ thì $3^n - 1 = 3^{2k} - 1 = 9^k - 1 \equiv 1^k - 1$

$\equiv 0 \pmod 8$ do đó $3^n + 63 = 3^n - 1 + 64 \equiv 0 \pmod 8$.

Vậy với $n = 2k$ $(k \in N^*)$ thì $3^n + 63 \vdots 72$.

b) Ta có $323 = 17 . 19$ và $(17; 19) = 1$.

*$A = (20^n - 1) + (16^n - 3^n) = P + Q$

Ta có $20^n \equiv 1 (\text{mod } 19) \Rightarrow P \equiv 0 (\text{mod } 19)$.

Nếu $n = 2k$ $(k \in N^*)$ thì $Q = 16^{2k} - 3^{2k} \equiv (-3)^{2k} - 3^{2k} \equiv 3^{2k} - 3^{2k} \equiv 0 (\text{mod } 19) \Rightarrow A = P + Q \equiv 0$ $(\text{mod } 19)$

* $A = (20^n - 3^n) + (16^n - 1) = P' + Q'$

$20^n \equiv 3^n (\text{mod } 17)$. Do đó $P' = 20^n - 3^n \equiv 0 (\text{mod } 17)$.

Nếu $n = 2k$ $(k \in N^*)$ thì $Q' = 16^{2k} - 1 = (-1)^{2k} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 (\text{mod } 17)$

$\Rightarrow A = P' + Q' \equiv 0 (\text{mod } 17)$. Do $(17 ; 19) = 1$ nên $A \equiv 0 (\text{mod } 17.19)$.

Vậy với $n = 2k$ $(k \in N^*)$ thì $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1 \ \vdots\ 323$.

26.14. Theo định lý Fermat bé ta có $2^p \equiv 2 (\text{mod } p)$ nên nếu $2^p \equiv -1 (\text{mod } p)$ thì ta có $3 \equiv 0$ $(\text{mod } p) \Rightarrow p = 3$.

Mặt khác khi $p = 3$ thì $2^3 + 1 = 9 \equiv 0 (\text{mod } 3)$. Vậy $p = 3$ là số cần tìm.

26.15. Với $p = 3$ thì $p^2 + 20 = 29$ là số nguyên tố.

Với $p \neq 3$ thì $p^2 \equiv 1 (\text{mod } 3)$ nên $p^2 + 20 \equiv 21 \equiv 0 (\text{mod } 3)$.

Vậy $p^2 + 20 \ \vdots\ 3$ mặt khác $p^2 + 20 > 3$ nên $p^2 + 20$ là hợp số . Vậy chỉ có 1 số nguyên tố cần tìm là $p = 3$.

26.16. Với $a, b \in N^*$. Nếu $ab \ \vdots\ p$ thì số $ab^p - ba^p \ \vdots\ p$

Nếu $ab \not\vdots\ p$ thì $(a, p) = (b, p) = 1$. Do đó $a^{p-1} \equiv b^{p-1} \equiv 1 (\text{mod } p) \Rightarrow$

$a^{p-1} - b^{p-1} \equiv 0 (\text{mod } p) \Rightarrow ab(a^{p-1} - b^{p-1}) \equiv 0 (\text{mod } p)$

$\Rightarrow ab^p - ba^p \equiv 0 (\text{mod } p)$ hay $ab^p - ba^p \ \vdots\ p$, $\forall a, b \in N^*$.

26.17. a) Giả sử $a, b, c \in Z$ mà $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 7 (\text{mod } 8)$.

Ta có $a \equiv 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; 4 (\text{mod } 8) \Rightarrow a^2 \equiv 0; 1; 4 (\text{mod } 8)$

$\Rightarrow b^2 + c^2 \equiv 7 ; 6 ; 3 (\text{mod } 8)$. Điều này vô lý vì $b^2 \equiv 0; 1; 4 (\text{mod } 8)$ và $c^2 \equiv 0; 1; 4 (\text{mod } 8)$
$\Rightarrow b^2 + c^2 \equiv 0 ; 1 ; 2; 4; 5 (\text{mod } 8)$.

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \not\equiv 7 (\text{mod } 8)$.

b) Áp dụng câu a) ta có với $x , y , z \in Z$

$4x^2 + y^2 + 9z^2 = (2x)^2 + y^2 + (3z)^2 \not\equiv 7 (\text{mod } 8)$.

Mà $2015 = 8.251 + 7 \equiv 7 (\text{mod } 8)$

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

26.18. Ta có $2011 \equiv 11 (\text{mod } 100)$; $11^2 \equiv 21 (\text{mod } 100)$; $11^3 \equiv 31 (\text{mod } 100)$;

$11^5 \equiv 21.31 \equiv 51 (\text{mod } 100) \Rightarrow 11^{10} \equiv 51^2 \equiv 1 (\text{mod } 100)$.

Ta có $2010^{2009} \equiv 0 (\text{mod } 10) \Rightarrow 2010^{2009} = 10k$ $(k \in Z)$

$\Rightarrow 2011^{2010^{2009}} = 2011^{10k} \equiv 11^{10k} \equiv (11^{10})^k \equiv 1 (\text{mod } 100)$. Do đó hai chữ số tận cùng là số 01.

26.19. Bài toán có nhiều cách giải. Sau đây là cách giải theo đồng dư thức:

* Ta có $\forall n \in N^*$ thì $n^5 - n \equiv 0 \pmod{30}$ (ví dụ 8 chuyên đề 26 đã chứng minh)

$A = (a^{2012} - a^{2008}) + (b^{2012} - b^{2008}) + (c^{2012} - c^{2008})$

$A = a^{2007}(a^5 - a) + b^{2007}(b^5 - b) + c^{2007}(c^5 - c)$

Ta có $a^5 - a \equiv 0 \pmod{30} \Rightarrow a^{2007}(a^5 - a) \equiv 0 \pmod{30}$

Tương tự $b^{2007}(b^5 - b) \equiv 0 \pmod{30}$; $c^{2007}(c^5 - c) \equiv 0 \pmod{30}$

Vậy $A \equiv 0 \pmod{30}$. Hay $A \,\vdots\, 30$.

26.20. Giả sử tồn tại bộ ba số nguyên (x; y ; z) thỏa mãn $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$

$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 = 8z^4 + 5$ (1).

Xét với một số nguyên a bất kỳ thì nếu a chẵn thì $a = 2k$ $(k \in Z)$

$\Rightarrow a^4 = 16k^4 \equiv 0 \pmod 8$; nếu a lẻ thì $a^4 = (2k+1)^4 \equiv 1 \pmod 8$

Do đó $x^4 + y^4 + z^4 \equiv 0 ; 1 ; 2 ; 3 \pmod 8$. Trong khi đó $8z^4 + 5 \equiv 5 \pmod 8$ mâu thuẫn với (1).
Vậy không tồn tại các bộ ba số nguyên (x; y; z) thỏa mãn đẳng thức $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$.

26.21. Ta có $41^2 = (40+1)^2 = 40^2 + 80 + 1 \equiv 81 \pmod{100}$

$41^4 \equiv 81^2 \equiv 6561 \equiv 61 \pmod{100} \Rightarrow 41^5 \equiv 61.41 \equiv 1 \pmod{100}$

$\Rightarrow 41^{106} \equiv 41.(41^5)^{21} \equiv 41 \pmod{100}$

Mặt khác $57^4 = 10556001 \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow 57^{2012} = (57^4)^{503} \equiv 1 \pmod{100}$

Vì thế $A \equiv 41 + 1 \pmod{100}$.

Do đó hai chữ số cuối cùng của số $A = 41^{106} + 57^{2012}$ là 42

26.22. Do $a + 20 \,\vdots\, 21 \Rightarrow a \equiv 1 \pmod 3$ và $a \equiv 1 \pmod 7$

$b + 13 \,\vdots\, 21 \Rightarrow b \equiv 2 \pmod 3$ và $b \equiv 2 \pmod 7$

Suy ra $A = 4^a + 9^b + a + b \equiv 1 + 0 + 1 + 2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow A \equiv 10 \pmod 3$

Xét $a = 3k+1 ; b = 3q+2$ với $k, q \in N$ ta có $4^a = 4^{3k+1} = 4.64^k \equiv 4 \pmod 7$

$9^b = 9^{3q+2} \equiv 2^{3q+2} \equiv 4.8^q \equiv 4 \pmod 7$.

Do đó $A = 4^a + 9^b + a + b \equiv 4 + 4 + 1 + 1 \equiv 10 \pmod 7 \Rightarrow A \equiv 10 \pmod 7$

$A \equiv 10 \pmod 3$ và $A \equiv 10 \pmod 7$ mà $(3; 7) = 1$ nên $A \equiv 10 \pmod{3.7}$

Hay $A \equiv 10 \pmod{21}$. Vậy số dư trong phép chia A cho 21 là 10.

26.23. $2^3 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow (2^3)^n \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 2^{3n+1} = 2.(2^3)^n \equiv 2 \pmod 7$.

và $2^{3n-1} = 2^2.(2^3)^{n-1} \equiv 4 \pmod 7$.

Nên $A \equiv 2 + 4 + 1 \equiv 0 \pmod 7$ nghĩa là $A \,\vdots\, 7$. Mà với $n \in N^*$ thì $A > 7$.

Vậy A là hợp số.

26.24. $\forall n \in N^*$ ta có $2012^{4n} \equiv 0 \pmod 2$; $2013^{4n} \equiv 1 \pmod 2$;

$2014^{4n} \equiv 0 \pmod 2$; $2015^{4n} \equiv 1 \pmod 2$. Do đó $A \equiv 2 \equiv 0 \pmod 2$.

* Ta lại có $2012 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 2012^{4n} \equiv 0 \pmod 4$;

$2014 \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow 2014^2 \equiv 2^2 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 2014^{4n} \equiv (2014^2)^{2n} \equiv 0 \pmod 4$

Do $2013 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 2013^{4n} \equiv 1 \pmod 4$;

Do $2015 \equiv -1 \pmod 4 \Rightarrow 2015^{4n} = (-1)^{4n} \equiv 1 \pmod 4$

Vậy $A \equiv 2 \pmod 4$ nghĩa là A chia cho 4 dư 2. Ta có $A \,\vdots\, 2$; $A \,\not\vdots\, 2^2$; 2 là số nguyên tố. Vậy A không là số chính phương $\forall n \in N^*$.