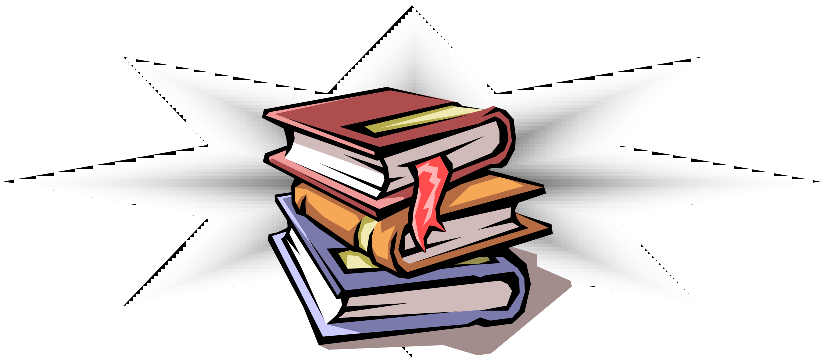
Sưu tầm và tổng hợp



CHUYÊN ĐỀ

PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Thanh Hóa, tháng 9 năm 2019

PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm đáp ứng nhu cầu về của giáo viên toán THCS và học sinh về các chuyên đề toán THCS, website thuvientoan.net giới thiệu đến thầy cô và các em chuyên đề về các bài toán về phương trình đại số. Chúng tôi đã kham khảo qua nhiều tài liệu để viết chuyên đề về này nhằm đáp ứng nhu cầu về tài liệu hay và cập nhật được các dạng toán mới về cấu tạo số thường được ra trong các kì thi gần đây. Các bài toán về phương trình đại số thường liên quan đến phương trình bậc cao, phương trình phân thức và phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Các vị phụ huynh và các thầy cô dạy toán có thể dùng có thể dùng chuyên đề này để giúp con em mình học tập. Hy vọng chuyên đề về phương trình đại số sẽ có thể giúp ích nhiều cho học sinh phát huy nội lực giải toán nói riêng và học toán nói chung.

Mặc dù đã có sự đầu tư lớn về thời gian, trí tuệ song không thể tránh khỏi những hạn chế, sai sót. Mong được sự góp ý của các thầy, cô giáo và các em học!

Chúc các thầy, cô giáo và các em học sinh thu được kết quả cao nhất từ chuyên đề này!

CHỦ ĐỀ 1. PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC BẬC CAO

A. Kiến thức cần nhớ

Để giải phương trình đa thức bậc cao chúng ta thường chuyển phương trình đó về dạng phương trình tích.

Phương trình tích

- Phương trình có dạng: A(x). B(x) = 0 ; trong đó A(x), B(x) là các đa thức của biến x.

- Phương pháp chung : Muốn giải phương trình A(x).B(x) = 0 ta giải hai phương trình A(x) = 0 và B(x) = 0 , rồi lấy tất cả các nghiệm thu được.

A(x). B(x) = 0 ⇔ A(x) = 0 hoặc B(x) = 0.

- Mở rộng: $A(x).B(x).....M(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x)=0 \\ B(x)=0 \\ ... \\ M(x)=0 \end{array}\right.$

B. Một số ví dụ minh họa

I. Phương trình bậc 3.

1) Lý thuyết.

Phương trình bậc 3 là phương trình có dạng: $ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad (a\neq 0) \quad (1)$

Phương pháp giải. Thông thường để giải được phương trình (1) chúng ta phải tìm được một nghiệm x_0 của phương trình, sau đó phân tích thành nhân tử và chuyển về giải phương trình bậc 2.

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \Leftrightarrow (x-x_0)(mx^2+nx+p)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_0 \\ mx^2+nx+p=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) là phương trình bậc 2 chúng ta đã biết cách giải tổng quát theo Δ .

Mấu chốt của việc giải phương trình bậc (3) là tìm được một nghiệm x_0 của phương trình đó, chúng ta có một số chú ý về cách nhẩm nghiệm của phương trình bậc 3 như sau:

- Nếu tổng các hệ số của phương trình (1) bằng 0 tức là a + b + c + d = 0 thì phương trình (1) nghiệm $x_0=1$. Chẳng hạn: $4x^3-x^2+2x-5=0$ ta có: 4 – 1 + 2 – 5 = 0

- Nếu tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ của phương trình (1) bằng 0 tức là a - b + c - d = 0 thì phương trình (1) có nghiệm $x_0=-1$. Chẳng hạn: $x^3-5x^2+3x+9=0$ ta có 1 + 5 + 3 – 9 = 0.

- Nếu a, b, c, d là các số nguyên và $x_0 = \frac{m}{n}$ là nghiệm hữu tỷ của (1) thì m là ước của d và n là ước của a. Đặc biệt trường hợp a = 1 thì phương trình (1) có nghiệm x_0 là ước của d.

★**Thí dụ 1.** Giải phương trình:

a) $x^3 - 3x + 2 = 0$ b) $3y^3 - 7y^2 - 7y + 3 = 0$ c) $x^3 - x^2 + 3x - 10 = 0.$

Hướng dẫn giải

a) Ta thấy a + b + c + d = 1 + 0 – 3 + 2 = 0 nên phương trình có một nghiệm x = 1.

PT $\Leftrightarrow x^3 - x^2 + x^2 - x - 2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x - 1) + x(x - 1) - 2(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 2\}$

b) Ta thấy a - b + c - d = 3 + 7 – 7 – 3 = 0 nên phương trình có nghiệm y = - 1.

PT $\Leftrightarrow 3y^3 + 3y^2 - 10y^2 - 10y + 3y + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 3y^2(y + 1) - 10y(y + 1) + 3(y + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (y + 1)(3y^2 - 10y + 3) = 0 \Leftrightarrow (y + 1)(3y - 1)(y - 3) = 0.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y + 1 = 0 \\ 3y - 1 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = \frac{1}{3} \\ y = 3 \end{array}\right. .$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-1; \frac{1}{3}; 3\right\}$

c) Ta có d = - 10 ta nhẩm các số là ước của 10 thì thấy x = 2 là nghiệm của phương trình.

$x^3 - x^2 + 3x - 10 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x + 5x - 10 = 0$

$\Leftrightarrow x^2.(x - 2) + x.(x - 2) + 5.(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + x + 5) = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$

Do $x^2 + x + 5 > 0 \quad \forall x$

Vậy phương trình có nghiệm x = 2.

★**Thí dụ 2.** Giải phương trình:

a) $8x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ *b)* $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5 = 0$ *c)* $x^3 + \sqrt{2}x^2 - 5x + \sqrt{2} = 0.$

Hướng dẫn giải

b) Ta có a = 8, d = 1 nên phương trình nếu có nghiệm hữu tỷ sẽ có dạng $x_0 = \pm\frac{1}{n}$

với n là ước 8. Ta thử các giá trị $\pm\frac{1}{2};\pm\frac{1}{4};\pm\frac{1}{8}$ nhận thấy $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình

do đó ta tách phương trình theo nhân tử (2x – 1).

$$8x^4 - 4x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(8x^3 - 1\right) - \left(4x - 2\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(2x - 1\right)\left(4x^2 + 2x + 1\right) - 2\left(2x - 1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(2x - 1\right)\left(4x^2 + 2x - 1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{1}{2}; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\right\}$

b) Ta có a = 3, d = -5 nên phương trình nếu có nghiệm hữu tỷ sẽ có dạng $x_0 = \frac{m}{n}$

với m là ước -5 và n là ước của 3. Ta thử các giá trị $\pm\frac{1}{3};\pm\frac{5}{3}$ nhận thấy $x = \frac{1}{3}$ là nghiệm của

phương trình do đó ta tách phương trình theo nhân tử (3x – 1).

$$3x^3 - 7x + 17x - 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x^3 - x^2 - 6x^2 + 2x + 15x - 5$$
$$\Leftrightarrow x^2\left(3x - 1\right) - 2x\left(3x - 1\right) + 5\left(3x - 1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(3x - 1\right)\left(x^2 - 2x + 5\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(3x - 1\right)\left[\left(x - 1\right)^2 + 4\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{3}$

b) Phương trình chứa hệ số $\sqrt{2}$ nên ta đoán có nghiệm dạng $x_0 = a\sqrt{2}$ nên ta đặt $x = a\sqrt{2}$ nhằm triệt tiêu hệ số $\sqrt{2}$ khi đó phương trình có dạng:

$$2\sqrt{2}a^3 + 2\sqrt{2}a^2 - 5\sqrt{2}a + \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^3 + 2a^2 - 5a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(2a^2 + 4a - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ 2a^2 + 4a - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -1 \pm \dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \pm \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\sqrt{2}; -\sqrt{2} \pm \sqrt{3}\right\}$

★**Thí dụ 3.** Giải phương trình:

a) $(z + 3)^3 - (z + 1)^3 = 98$.

b) $(4x + 3)^3 - (2x - 5)^3 = (2x + 8)^3$;

c) $(3x + 2016)^3 + (3x - 2019)^3 = (6x - 3)^3$;

d) $(2x - 7)^3 + (9 - 2x)^3 = 152$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình $\Leftrightarrow z^3 + 9z^2 + 27z + 27 - z^3 - 3z^2 - 3z - 1 = 98$

$$\Leftrightarrow 6z^2 + 24z - 72 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 4z - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 6z - 2z - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z + 6)(z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z + 6 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -6 \\ z = 2 \end{array}\right.$$

Tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \{-6; 2\}$.

* ***Nhận xét*** **:** Ta có cách giải khác:

Do $z + 2$ là trung bình cộng của $z + 1$ và $z + 3$ nên ta đặt $z + 2 = y$ phương trình trở thành $(y + 1)^3 - (y - 1)^3 = 98$

$$\Leftrightarrow y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 + 3y^2 - 3y + 1 = 98 \Leftrightarrow 6y^2 = 96$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y = 4 \\ y = -4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} z + 2 = 4 \\ z + 2 = -4 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} z = 2 \\ z = -6 \end{array}\right.$$

Tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \{-6\,;2\}$.

b) Đặt $y = 4x + 3$; $z = 2x - 5$; thì $y - z = 2x + 8$. Ta có :

$y^3 - z^3 = (y - z)^3 \Leftrightarrow y^3 - z^3 = y^3 - z^3 - 3yz(y - z) \Leftrightarrow 3yz(y - z) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \\ y - z = 0 \end{array}\right. \text{ hay } \left[\begin{array}{l} 4x + 3 = 0 \\ 2x - 5 = 0 \\ 2x + 8 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -0,75 \\ x = 2,5 \\ x = -4 \end{array}\right.$$

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{-4\,; -0,75\,; 2,5\}$

c) Đặt $u = 3x + 2016$; $v = 3x - 2019$ thì $u + v = 6x - 3$.

Phương trình trên trở thành $u^3 + v^3 - (u + v)^3 = 0$ hay

$u^3 + v^3 - [u^3 + v^3 + 3uv(u + v)] = 0 \Leftrightarrow -3uv(u + v) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ v = 0 \\ u + v = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + 2016 = 0 \\ 3x - 2019 = 0 \\ 6x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -672 \\ x = 673 \\ x = 0,5 \end{array}\right.$$

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{-672\,; 0,5\,; 673\}$

d) $(2x - 7)^3 + (9 - 2x)^3 = 152$.

Đặt $2x - 8 = y$ thì $2x - 7 = y + 1$; $9 - 2x = 1 - y$.

Do đó phương trình trở thành $(y + 1)^3 + (1 - y)^3 = 152$

Khai triển, rút gọn (hoặc dùng hằng đẳng thức $a^3 + b^3$ ta được

$$6y^2 + 2 = 152 \Leftrightarrow 6y^2 - 150 = 0 \Leftrightarrow 6(y + 5)(y - 5) = 0.$$

- Với $y + 5 = 0$ thì $2x - 8 + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1,5$
- Với $y - 5 = 0$ thì $2x - 8 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 6,5$

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{1,5\,; 6,5\}$

Lưu ý: Trong các bài toán xuất hiện các dạng $(a + b)^3$; $(a - b)^3$ và $a^3 \pm b^3$.

Ta có: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$ và $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

★**Thí dụ 4.** Giải phương trình:

a) $x^3 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$.

b) $2x^3 + 3x^2 - 6x + 4 = 0$

Hướng dẫn giải

a) Phương trình có nghiệm hữu tỷ x = a thì a là ước của 4, ta thử các giá trị $\pm 1; \pm 2; \pm 4$ đều không là nghiệm. Mặt khác lại thấy các hệ số 1; - 3; 3 giống hằng đẳng thức

$a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = (a - 1)^3$ nên ta biến đổi như sau:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 3$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^3 = 3$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt[3]{3}$$
$$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt[3]{3}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1 + \sqrt[3]{3}$

b) Bằng phương pháp nhẩm nghiệm dễ thấy phương trình không có nghiệm hữu tỷ. Ta biến đổi như sau:

$$2x^3 + 3x^2 - 6x + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow 5x^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{5}.x\right)^3 = (x-2)^3$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{5}.x = x - 2$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-2}{\sqrt[3]{5} - 1}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \dfrac{-2}{\sqrt[3]{5} - 1}$

II. Phương trình bậc bốn.

1) Lý thuyết.

Phương trình bậc 4 là phương trình có dạng: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (a \neq 0)$

Phương pháp giải. Để giải phương trình bậc 4 chúng ta thường nhẩm một nghiệm và phân tích phương trình bậc 4 thành tích của một đa thức bậc 3 và đa thức bậc nhất sau đó dùng các phương pháp để giải phương trình bậc 3 hoặc phân tích thành tích hai tam thức bậc 2, hoặc đặt ẩn phụ chuyển về giải phương trình bậc 2. Ta xét các dạng toán đặc biệt thường giao trong các đề thi như sau:

Dạng 1. Phương trình trùng phương: $ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (2.1)$

Phương pháp giải. – Đặt $y = x^2 \quad (y \geq 0)$ khi đó phương: $ay^2 + by + c = 0 \quad (2.2)$

Đây là phương trình bậc 2 dễ dàng tính được nghiệm từ đó suy ra x.

Chú ý: Số nghiệm của phương trình (2.1) phụ thuộc số nghiệm dương của phương trình (2.2)

★Thí dụ 5. Giải phương trình: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Hướng dẫn giải

Đặt $y = x^2$ $(y \geq 0)$ khi đó phương trình trở thành:

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{\pm 1; \pm 2\}$

Dạng 2. Phương trình có dạng: $(x+m)^4 + (x+n)^4 = p$ $(p > 0)$

Phương pháp giải: Đặt $y = x + \frac{a+b}{2}$ Chuyển về phương trình ẩn y

Phương trình ẩn y sẽ là phương trình trung phương quen thuộc.

★Thí dụ 6. Giải phương trình: $(x-2004)^4 + (x-2006)^4 = 2$

Hướng dẫn giải

Đặt $y = x - \frac{2004+2006}{2} = x - 2005$. Khi đó phương trình trở thành:

$$(y+1)^4 + (y-1)^4 = 2 \Leftrightarrow \left[(y+1)^2 + (y-1)^2\right]^2 - 2(y+1)^2.(y-1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \left[2y^2 + 2\right]^2 - 2\left(y^2 - 1\right)^2 = 2 \Leftrightarrow 4y^4 + 8y^2 + 4 - 2y^4 + 4y^2 - 2 = 2$$

$$\Leftrightarrow 2y^4 + 12y^2 = 0 \Leftrightarrow 2y^2\left(y^2 + 6\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2005 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2005$$

Vậy phương trình có nghiệm x = 2005

Dạng 3. Phương trình có dạng: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = e$ trong đó $a + b = c + d$.

Phương pháp giải: $PT \Leftrightarrow \left[x^2 + (a+b)x + ab\right]\left[x^2 + (c+d)x + cd\right] = e$

Đặt $t = x^2 + (a+b)x$ ta được phương trình $(t+ab)(t+cd) = e$ đây là phương trình bậc 2 dễ giảng giải và suy ra được nghiệm của bài toán.

★Thí dụ 6. Giải phương trình:

a) $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=10$ *b)* $(4x+7)(4x+5)(x+1)(2x+1)=9.$

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=10$$
$$\Leftrightarrow [(x+1)(x+5)][(x+2)(x+4)]=10$$
$$\Leftrightarrow (x^2+6x+5)(x^2+6x+8)=10$$

Đặt $t = x^2 + 6x$ khi đó phương trình trở thành:

$$(t+5)(t+8)=10$$
$$\Leftrightarrow t^2+13t+30=0$$
$$\Leftrightarrow (t+3)(t+10)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=-10 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+6x+3=0 \\ x^2+6x+10=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow x^2+6x+3=0 \quad \left(do\, x^2+6x+10=(x+3)^2+1\neq 0\right)$$
$$\Leftrightarrow (x+3)^2=6$$
$$\Leftrightarrow x+3=\pm\sqrt{6}$$
$$\Leftrightarrow x=-3\pm\sqrt{6}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-3+\sqrt{6};-3-\sqrt{6}\right\}$

b) **** Tìm cách giải*** **:** Ta thấy nếu vế trái nhân 4 vào nhân tử thứ ba, nhân 2 vào nhân tử thứ tư thì cả bốn nhân tử đều là các đa thức mà hệ số của x đều là 4. Vế phải nhân với 8 để được phương trình mới tương đương. Sau đó nếu nhân $(4x + 7)$ với $(4x + 2)$; $(4x + 5)$ với $(4x + 4)$ ta thấy kết quả xuất hiện các hạng tử giống nhau $16x^2 + 36x$ nên có thể đặt ẩn phụ để giải.

Ta có $(4x + 7)(4x + 5)(x + 1)(2x + 1) = 9$

$\Leftrightarrow (4x + 7)(4x + 5)(4x + 4)(4x + 2) = 72$

$\Leftrightarrow (16x^2 + 36x + 14)(16x^2 + 36x + 20) = 72.$

Đặt $16x^2 + 36x + 17 = y$ ta có :

$(y - 3)(y + 3) = 72 \Leftrightarrow y^2 - 9 = 72 \Leftrightarrow y^2 = 81 \Leftrightarrow y = \pm 9$.

- Với $16x^2 + 36x + 17 = 9 \Leftrightarrow 4x^2 + 9x + 2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x + x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 8x + x + 2 = 0 \Leftrightarrow 4x(x + 2) + (x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow\ (x+2)(4x+1)=0\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} x+2=0 \\ 4x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-0,25 \end{array}\right.$

- Với $16x^2+36x+17=-9\ \Leftrightarrow\ 16x^2+36x+26=0$ vô nghiệm vì

$$16x^2+36x+26=\left(4x+\frac{9}{2}\right)^2+\frac{23}{4}>0,\ \forall x\ .$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-2\,;-0,25\}$.

★Thí dụ 7. Giải phương trình: $(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)=31(x^2-8x+12)+128.$ (1)

** Tìm cách giải* **:** Xét vế trái nếu nhân nhân tử thứ nhất với nhân tử thứ tư và nhân tử thứ hai nhân nhân tử thứ 3 ta có $(x^2-8x+12)(x^2-8x+15)$. Mỗi nhân tử là một đa thức có cùng hệ số của x^2 và của x.

Phương trình trở thành $(x^2-8x+12)(x^2-8x+15)=31(x^2-8x+12)+128$.

Do đó ta dùng phương pháp đặt ẩn phụ.

Hướng dẫn giải

$(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)=31(x^2-8x+12)+128$

$\Leftrightarrow (x^2-8x+12)(x^2-8x+15)=31(x^2-8x+12)+128.$ (2)

Đặt $x^2-8x+12=y$ thì $x^2-8x+15=y+3$

Khi ấy phương trình (2) trở thành $y(y+3)=31y+128$

$\Leftrightarrow\ y^2+3y-31y-128=0\,;\ \Leftrightarrow\ y^2+4y-32y-128=0$

$\Leftrightarrow\ y(y+4)-32(y+4)=0\,;\ \Leftrightarrow (y+4)(y-32)=0\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y+4=0 \\ y-32=0 \end{array}\right.$

Với $y+4=0\ \Leftrightarrow x^2-8x+16=0\ \Leftrightarrow (x-4)^2=0\ \Leftrightarrow\ x=4$

Với $y-32=0\ \Leftrightarrow x^2-8x-20=0\ \Leftrightarrow x^2-10x+2x-20=0$

$\Leftrightarrow (x-10)(x+2)=0\ \Leftrightarrow\ x=10$ hoặc $x=-2$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-2\,;4\,;10\}$

Dạng 4. Phương trình có dạng: $(ax^2+b_1x+c)(ax^2+b_2x+c)=mx^2$.

Phương pháp giải:

– Bước 1: nhận xét x = 0 không là nghiệm của phương trình.

- Bước 2: Chia hai vế của phương trình cho x^2 .

Phương trình trở thành: $\left(ax+b_1+\frac{c}{x}\right)\left(ax+b_2+\frac{c}{x}\right)=m$

Bước 3: Đặt $t=ax+\frac{c}{x}$ chuyển về giải phương trình bậc 2 cơ bản.

★**Thí dụ 8.** Giải phương trình: $(2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1)=9x^2$ (1)

Hướng dẫn giải

– Nhận thấy x = 0 không phải là nghiệm của Phương trình.

- Chia hai vế của Phương trình (1) cho $x^2 \neq 0$ ta được:

$$\left(2x-3+\frac{1}{x}\right)\left(2x+5+\frac{1}{x}\right)=9 \qquad (*)$$

Đặt $t=2x+\frac{1}{x}$. Khi đó phương trình (*) trở thành: (t – 3)(t + 5) = 9

$$\Leftrightarrow t^2+2t-24=0 \Leftrightarrow (t+6)(t-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-6 \\ t=4 \end{array}\right.$$

Với t = - 6 ta có: $2x+\frac{1}{x}=-6 \Leftrightarrow 2x^2+6x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$.

Với t = 4 ta có: $2x+\frac{1}{x}=4 \Leftrightarrow 2x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm: $x=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}, x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$.

★**Thí dụ 9.** Giải phương trình: $(x^2-5x+1)(x^2-4)=6(x-1)^2$ (2)

Hướng dẫn giải

Đặt $a=x-1$ thay x = a + 1 và rút gọn ta được:

$$(u^2-7u-3)(u^2-2u-3)=6u^2 \qquad (*)$$

Đến đây có thể giải tiếp như ví dụ trên.

Giải ra ta được 4 nghiệm là: $x=3\pm\sqrt{7}$; $\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$.

Dạng 5. Phương trình có dạng: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=ex^2$, trong đó $ab=cd$.

Phương pháp giải:

– Bước 1: nhận xét x = 0 không là nghiệm của phương trình.

- Bước 2: $PT \Leftrightarrow \left[x^2+(a+b)x+ab\right]\left[x^2+(c+d)x+cd\right]=ex^2$

Chia hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$.

Phương trình trở thành: $\left[x+\frac{ab}{x}+a+b\right]\left[x+\frac{cd}{x}+c+d\right]=e$

Bước 3: Đặt $t=x+\frac{ab}{x}=x+\frac{cd}{x}$. Ta có phương trình: $(t+a+b)(t+c+d)=e$

Đây là phương trình bậc 2 dễ dàng tính được t từ đó tính được x.

★Thí dụ 10. Giải phương trình:

a) $(x-2)(x-1)(x-8)(x-4)=4x^2$ b) $\left(x^2+3x+2\right)\left(x^2+9x+18\right)=168x^2$

Hướng dẫn giải

a) $PT \Leftrightarrow \left[(x-2)(x-4)\right]\left[(x-1)(x-8)\right]=4x^2 \Leftrightarrow \left(x^2-6x+8\right)\left(x^2-9x+8\right)=4x^2$.

Do $x=0$ không là nghiệm nên chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được:

$\left(x+\dfrac{8}{x}-6\right)\left(x+\dfrac{8}{x}-9\right)=4$.

Đặt $y=x+\dfrac{8}{x}$ thì phương trình trở thành $(y-6)(y-9)=4 \Leftrightarrow y^2-15y+50=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=5 \\ y=10 \end{array}\right.$.

Với $y=5$ thì $x+\dfrac{8}{x}=5 \Leftrightarrow x^2-5x+8=0$ (vô nghiệm).

Với $y=10$ thì $x+\dfrac{8}{x}=10 \Leftrightarrow x^2-10x+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5-\sqrt{17} \\ x=5+\sqrt{17} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left(5-\sqrt{17};5+\sqrt{17}\right)$.

b) Ta có:

$$\begin{aligned}
&\left(x^2+3x+2\right)\left(x^2+9x+18\right)=168x^2 \\
&\Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x+3)(x+6)=168 \\
&\Leftrightarrow \left[(x+1)(x+6)\right]\left[(x+2)(x+4)\right]=168 \\
&\Leftrightarrow \left(x^2+7x+6\right)\left(x^2+5x+6\right)=168
\end{aligned}$$

Chia hai – Nhận thấy x = 0 không là nghiệm của phương trình:

vế của phương trình cho x^2 ta được: $\left(x+\dfrac{6}{x}+7\right)\left(x+\dfrac{6}{x}+5\right)=168$

Đặt $y=x+\dfrac{6}{x}$ phương trình trở thành: $(y+7)(y+5)=168$

$\Leftrightarrow y^2+12x-133=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=7 \\ y=-19 \end{array}\right.$

Do đó: $\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{6}{x}=7 \\ x+\dfrac{6}{x}=-19 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-7x+6=0 \\ x^2+19x+6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=6 \\ x=\dfrac{-19+\sqrt{337}}{2} \\ x=\dfrac{-19-\sqrt{337}}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 4 nghiệm $x=1, x=6, x=\dfrac{-19+\sqrt{337}}{2}, x=\dfrac{-19-\sqrt{337}}{2}$

Dạng 6. Phương trình có dạng: $a_1\left(bx^2+c_1x+d\right)^2+a_2\left(bx^2+c_2x+d\right)=Ax^2$

Phương pháp giải:

– Bước 1: nhận xét x = 0 không là nghiệm của phương trình.

- Bước 2: Chia hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$.

Phương trình trở thành: $a_1\left(bx+\dfrac{d}{x}+c_1\right)^2+a_2\left(bx+\dfrac{d}{x}+c_2\right)^2=A$

Bước 3: Đặt $t=bx+\dfrac{d}{x}$. Ta có phương trình: $a_1\left(t+c_1\right)^2+a_2\left(t+c_2\right)^2=A$

Đây là phương trình bậc 2 dễ dàng tính được t từ đó tính được x.

★Thí dụ 11. Giải phương trình: $3\left(x^2+2x-1\right)^2-2\left(x^2+3x-1\right)^2+5x^2=0$

Hướng dẫn giải

Dễ thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình.

Chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được $3\left(x-\dfrac{1}{x}+2\right)^2-2\left(x-\dfrac{1}{x}+3\right)^2+5=0$.

Đặt $y=x-\dfrac{1}{x}$, phương trình trở thành: $3(y+2)^2-2(y+3)^2+5=0 \Leftrightarrow y^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-1 \end{array}\right.$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} x-\dfrac{1}{x}=1 \\ x-\dfrac{1}{x}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2};\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Dạng 7. Phương trình có dạng: $ax^4+bx^3+cx^2\pm bx+a=0$.

Phương pháp giải:

– Bước 1: Nhận xét x = 0 có phải là nghiệm nghiệm của phương trình hay không.

- Bước 2: Chia hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$ ta được:

$$\mathrm{ax}^2 + bx + c \pm \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0.$$

- Bước 3: Đặt $y = x \pm \frac{1}{x} \Rightarrow y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \pm 2$. Khi đó phương trình trở thành:

$$a\left(y^2 \mp 2\right) + by + c = 0$$

Đây là phương trình bậc 2 dễ giàng tính được y và suy ra x.

★**Thí dụ 12.** Giải phương trình: $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$

Hướng dẫn giải

Ta thấy x = 0 không phải là nghiệm của phương trình
Chia cả 2 vế của phương trình cho x^2 ta được:

$$6x^2 - 5x - 38 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$$

Đặt $y = x + \frac{1}{x}$ thì: $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

Ta được pt: $6y^2 - 5y - 50 = 0 \Leftrightarrow (3y - 10)(2y + 5) = 0$

Do đó: $y = \frac{10}{3}$ và $y = -\frac{5}{2}$

* Với $y = \frac{10}{3}$ thì: $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (3x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = 3 \end{array}\right.$

* Với $y = -\frac{5}{2}$ thì: $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (2x + 1)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_4 = -2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có bốn nghiệm: $x = \frac{1}{3}, x = \frac{-1}{2}, \; x = -2, \; x = 3$

Dạng 8. Phương trình có dạng: $ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm kbx + k^2a = 0\,(k > 0)$

Phương pháp giải:

– Bước 1: Nhận xét x = 0 có phải là nghiệm nghiệm của phương trình hay không.

- **Bước 2:** Chia hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$ ta được:

$$a\left(x^2+\frac{k^2}{x^2}\right)\pm b\left(x+\frac{k}{x}\right)+c=0$$

- **Bước 3:** Đặt $t=x+\frac{k}{x}$ với $|t|\geq 2\sqrt{k}$ ta có $x^2+\frac{k^2}{x^2}=\left(x+\frac{k}{x}\right)^2-2k=t^2-2k$.

Khi đó phương trình trở thành: $a\left(t^2-2k\right)\pm bt+c=0$

Đây là phương trình bậc 2 dễ giàng tính được y và suy ra x.

$2x^4-21x^3+34x^2+105x+50=0$

★**Thí dụ 13.** Giải phương trình: $2x^4-21x^3+34x^2+105x+50=0$

Hướng dẫn giải

Ta thấy $k=\frac{105}{-21}=-5$ và $k^2=\frac{50}{2}=25$ nên phương trình (8) là phương trình bậc bốn có hệ số đối xứng tỉ lệ. $(8)\Leftrightarrow 2\left(x^2+\frac{25}{x^2}\right)-21\left(x-\frac{5}{x}\right)+34=0$.

Đặt $t=x-\frac{5}{x}$ suy ra $t^2=x^2+\frac{25}{x^2}-10$.

Phương trình (9) trở thành $2t^2-21t+54=0\Leftrightarrow t=6$ hoặc $t=\frac{9}{2}$.

Với $t=6$ thì $x-\frac{5}{x}=6\Leftrightarrow x^2-6x-5\Leftrightarrow x^2-6x-5=0\Leftrightarrow x_1=3+\sqrt{14};x_2=3-\sqrt{14}$.

Với $x=\frac{9}{2}$ thì $x-\frac{5}{x}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow 2x^2-9x-10=0\Leftrightarrow x_3=\frac{9+\sqrt{161}}{4};x_4=\frac{9-\sqrt{161}}{4}$.

Vậy PT (8) có tập nghiệm $S=\left\{3+\sqrt{14};3-\sqrt{14};\frac{9+\sqrt{161}}{4};\frac{9-\sqrt{161}}{4}\right\}$.

Có nhiều bài toán bậc bốn không mẫu mực việc đặt ẩn phụ để giải phải thực sự linh hoạt không thể phân thành dạng cụ thể, chúng ta đi đến một số bài toán sau:

★**Thí dụ 14.** Giải phương trình: $3\left(x^2-x+1\right)^2-2\left(x+1\right)^2=5\left(x^3+1\right)$

Hướng dẫn giải

Vì $x=-1$ không là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế cho x^3+1 ta được:

$3\frac{x^2-x+1}{x+1}-2\frac{x+1}{x^2-x+1}$. Đặt $t=\frac{x^2-x+1}{x+1}\Rightarrow 3t-\frac{2}{t}=5\Leftrightarrow 3t^2-5t-2=0\Leftrightarrow t=2,t=-\frac{1}{3}$

* $t=2\Leftrightarrow x^2-3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

* $t=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3x^2-2x+4=0$ phương trình vô nghiệm

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

★Thí dụ 15. Giải phương trình: $(4x-19)^4+(4x-20)^4=(39-8x)^4$

Hướng dẫn giải

Đặt $4x-19=y; 4x-20=z$ thì $y+z=8x-39$ ta có $y^4+z^4-(y+z)^4=0$

$\Leftrightarrow y^4+z^4-\left(y^4-4y^3z-6y^2z^2-4yz^3-z^4\right)=0$

$\Leftrightarrow -4y^3z-6y^2z^2-4yz^3=0 \quad \Leftrightarrow \quad 4yz\left(y^2+\frac{6}{4}yz+z^2\right)=0$

$\Leftrightarrow 4yz\left[\left(y+\frac{3}{4}z\right)^2+\frac{7}{16}z^2\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=0\\ z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x-19=0\\ 4x-20=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4,75\\ x=5\end{array}\right.$

Tập nghiệm của phương trình là $S=\{4,75\,;5\}$

Nhận xét: Trong các đề thi đối với hầu hết phương trình bậc bốn có hệ số không quá cao chúng ta đều có thể chuyển về phương trình bậc 4 tổng quát $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ với $a\neq 0$ và giải giải bằng phương pháp hệ số bất định cho dù dụng ý của người ra đề là hướng tới cách đặt ẩn phụ để đơn giản bài toán.

Tôi sẽ minh họa phương pháp này bằng bài toán sau:

★Thí dụ 16. Giải phương trình: $x^4+4x^3-10x^2+37x-14=0 \qquad (1)$

Hướng dẫn giải

Phân tích: Ta nghĩ đến việc phân tích:

$x^4+4x^3-10x^2+37x-14=\left(x^2+px+q\right)\left(x^2+rx+s\right)=x^4+\left(p+r\right)x^3+\left(s+pr+q\right)x^2+\left(ps+qr\right)x+qs=0$

Đồng nhất hệ số: $\begin{cases} p+r=-4 \\ s+pr+q=-10 \\ ps+qr=37 \\ qs=-14 \end{cases}$.

Xuất phát từ qs = -14 và các phương trình trên của hệ ta thấy nhẩm được : p = -5, q = 2, r = 1, s = -7 thỏa mãn hệ phương trình.

Từ đó có lời giải:

$x^4+4x^3-10x^2+37x-14=\left(x^2-5x+2\right)\left(x^2+x-7\right)$

Suy ra:

$x^4+4x^3-10x^2+37x-14=0 \quad \Leftrightarrow \left(x^2-5x+2\right)\left(x^2+x-7\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+2=0 \\ x^2+x-7=0 \end{array}\right.$

Giải hai phương trình bậc 2 này ta được nghiệm: $x_1=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$; $x_2=\dfrac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$

Hoặc cũng là hệ số bất định nhưng ta chia thành 2 dạng sau:

Dạng 1. Phương trình có dạng: $x^4=ax^2+bx+c$

Phương pháp giải:

Ta thêm bớt vào 2 vế một lượng: $2mx^2+m^2$ khi đó phương trình trở thành:
$(x^2+m)^2=(2m+a)x^2+bx+c+m^2$

Ta mong muốn vế phải có dạng: $(Ax+B)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+a>0 \\ \Delta=b^2-4(2m+a)(c+m^2)=0 \end{cases} \Rightarrow m$

★Thí dụ 17. Giải phương trình: $x^4-10x^2-x+20=0$

Hướng dẫn giải

$x^4-10x^2-x+20=0 \Leftrightarrow x^4=10x^2+x-20$

Ta thêm vào 2 vế phương trình một lượng: $2mx^2+m^2$

Khi đó phương trình trở thành: $x^4+2mx^2+m^2=(10+2m)x^2+x+m^2-20$

Ta có $\Delta_{VP}=1-4(m^2-20)(10+2m)=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{9}{2}$. Ta viết lại phương trình thành:

$$x^4-9x^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2=x^2+x+\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left(x^2-\frac{9}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-5)(x^2+x-4)=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}\ \text{ và }\ x=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}, x=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$

Dạng 2. Phương trình có dạng: $x^4+ax^3=bx^2+cx+d$

Phương pháp giải:

Ta sẽ tạo ra ở vế phải một biểu thức bình phương dạng: $\left(x^2+\dfrac{a}{2}x+m\right)^2$

Bằng cách khai triển biểu thức:

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+m\right)^2=x^4+ax^3+\left(2m+\frac{a^2}{4}\right)x^2+amx+m^2.$$

Ta thấy cần thêm vào hai vế một lượng: $\left(2m+\dfrac{a^2}{4}\right)x^2+amx+m^2$ khi đó phương trình trở thành:

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+m\right)^2=\left(2m+\frac{a^2}{4}+b\right)x^2+(am+c)x+m^2+d$$

Bây giờ ta cần: $\begin{cases}2m+\dfrac{a^2}{4}+b>0\\ \Delta_{VP}=(am+c)^2-4\left(2m+\dfrac{a^2}{4}+b\right)\left(m^2+d\right)=0\end{cases}\Rightarrow m=?$

★Thí dụ 18. Giải phương trình: $x^4-6x^3+8x^2+2x-1=0$

Hướng dẫn giải

Phương trình có dạng: $x^4-6x^3+8x^2+2x-1=0\Leftrightarrow x^4-6x^3=-8x^2-2x+1$

Ta tạo ra vế trái dạng: $(x^2-3x+m)^2=x^4-6x^3+(9+2m)x^2-6mx+m^2$

Tức là thêm vào hai vế một lượng là: $(9+2m)x^2-6mx+m^2$ phương trình trở thành:

$(x^2-3x+m)^2=(2m+1)x^2-(6m+2)x+m^2+1$. Ta cần

$\Delta'_{VP}=(3m+1)-(2m+1)(m^2+1)=0\Leftrightarrow m=0$.

Phương trình trở thành: $(x^2-3x)^2=(x-1)^2$

$$\Leftrightarrow (x^2-4x+1)(x^2-2x-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{3} \\ x=2-\sqrt{3} \\ x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm $S=\left\{2+\sqrt{3};2-\sqrt{3};1+\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right\}$

II. Phương trình cao hơn bậc bốn.

Đối với các phương trình bậc cao hơn 4 phương pháp chung là dùng cách đưa về dạng phương trình tích hoặc đặt ẩn phụ để đưa về giải các phương trình bậc thấp hoặc với nhiều bài toán chúng ta nên lưu tâm tới việc có thể sử dụng phương pháp đánh giá để giải toán. Chúng ta minh họa qua các ví dụ sau:

★**Thí dụ 19.** Giải phương trình: $y^2(y^4-29y^2+244)=576.$ (1)

Hướng dẫn giải

(1) $\Leftrightarrow$ $y^6-29y^4+244y^2-576=0$.

$\Leftrightarrow$ $y^6-4y^4-25y^4+100y^2+144y^2-576=0$

$\Leftrightarrow$ $y^4(y^2-4)-25y^2(y^2-4)+144(y^2-4)=0$

$\Leftrightarrow$ $(y^2-4)(y^4-25y^2+144)=0$

$\Leftrightarrow$ $(y^2-4)(y^4-9y^2-16y^2+144)=0$

$\Leftrightarrow$ $(y^2-4)[y^2(y^2-9)-16(y^2-9)]=0$

$\Leftrightarrow$ $(y^2-4)(y^2-9)(y^2-16)=0$

$\Leftrightarrow$ $(y-4)(y-3)(y-2)(y+2)(y+3)(y+4)=0$.

Vậy phương trình (1) có 6 nghiệm là : $y=\pm 2$; $y=\pm 3$; $y=\pm 4$.

Tập nghiệm của phương trình là $S=\{-4;-3;-2;2;3;4\}$.

★**Thí dụ 20.** Giải phương trình: $6x^5-29x^4+27x^3+27x^2-29x+6=0$

(Thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Thanh Hóa năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

Biến đổi thành $(x+1)(6x^4-35x^3+62x^2-35x+6)=0$.

Ta tìm được $x=-1$ là 1 nghiệm.

Với $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$ do $x=0$ không là nghiệm nên chia hai vế cho x^2 ta được :

$6\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+62=0$. Đặt $x+\dfrac{1}{x}=y$ thì $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$

Phương trình trở thành $6(y^2-2)-35y+62=0 \Leftrightarrow (2y-5)(3y-10)=0$

Thay $y=x+\dfrac{1}{x}$ vào $2y-5=0$ giải ra ta tìm được $x=2$ hoặc $x=\dfrac{1}{2}$.

Thay $y=x+\dfrac{1}{x}$ vào $3y-10=0$ giải ra ta tìm được $x=3$ hoặc $x=\dfrac{1}{3}$

Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-1;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2};2;3\right\}$.

★Thí dụ 21. Giải phương trình: $(x^2-4x+11)(x^4-8x^2+21)=35$.

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương năm học 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải

$\left(x^2-4x+11\right)\left(x^4-8x^2+21\right)=35 \Leftrightarrow \left[(x-2)^2+7\right]\left[\left(x^2-4\right)^2+5\right]=35$

$(x-2)^2\ge 0, \forall x$ và $\left(x^2-4\right)^2\ge 0, \forall x$ nên vế trái không nhỏ hơn 35.

Ta suy ra $\begin{cases}(x-2)^2=0\\ \left(x^2-4\right)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow x=2$. Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$.

★Thí dụ 22. Giải phương trình: $\left(x^3+5x+5\right)^3+5x^3+24x+30=0$

Hướng dẫn giải

Ta có: $x^3+5x+30=5\left(x^3+5x+5\right)-x+5$ nên phương trình tương đương

$\left(x^3+5x+5\right)^3+5\left(x^3+24x+\right)x^3+24x+30=0$.

Đặt $u=x^3+5x+5$. Ta được hệ:

$\begin{cases}u^3+5u+5=x\\ x^3+5x+5=u\end{cases} \Rightarrow (u-x)\left(u^2+ux+x^2+6\right)=0 \Leftrightarrow u=x$.

$\Leftrightarrow x^3+4x+5=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x+5\right)=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Vậy $x=-1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

CHỦ ĐỀ 2. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình. (tức là tìm giá trị của ẩn làm tất cả các mẫu thức của phương trình khác 0). Viết tắt: ĐKXĐ.

Bước 2 : Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3 : Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4 : (Kết luận) . Trong các giá trị tìm được ở bước 3, *các giá trị thỏa mãn điều kiện xác định* chính là nghiệm của phương trình đã cho.

* *Chú ý* : Nếu $A(x) = 0$ tại $x = x_1$ hoặc $x = x_2$ thì

$A(x) \neq 0$ khi $x \neq x_1$ và $x \neq x_2$

B. Một số ví dụ minh họa

Một số bài tập cơ bản:

★**Thí dụ 23.** Giải phương trình:

a) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{3}{2x-6}-\dfrac{1}{2x-4}$ b) $\dfrac{25+4x}{25x^2-1}=\dfrac{4}{5x+1}-\dfrac{6}{1-5x}$.

Hướng dẫn giải

a) ĐKXĐ : $x \neq 1$; $x \neq 2$ và $x \neq 3$.

$$(1) \Rightarrow 2(x-2)(x-3)+2(x-1)(x-3) = 3(x-1)(x-2)-(x-1)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-10x+12+2x^2-8x+6 = 3x^2-9x+6-x^2+4x-3$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-13x+15=0 \quad \Leftrightarrow (2x-3)(x-5)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3=0 \\ x-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,5 \\ x=5 \end{array}\right.$$

Hai giá trị $x = 1,5$ và $x = 5$ thỏa mãn ĐKXĐ nên là nghiệm phương trình (1).

b) ĐKXĐ : $x \neq \pm 0,2$.

$$(2) \Rightarrow 25+4x = 4(5x-1)+6(5x+1)$$

$$\Leftrightarrow 25+4x = 20x-4+30x+6$$

$$\Leftrightarrow -46x = -23 \quad \Leftrightarrow x = 0,5.$$

Giá trị này thỏa mãn ĐKXĐ. Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0,5$.

★**Thí dụ 24.** Giải phương trình: $\dfrac{2x-5}{x+1}+\dfrac{x^2-5x-41}{x^2-3x-4}=\dfrac{3x-8}{x-4}$

Hướng dẫn giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{2x-5}{x+1}+\dfrac{x^2-5x-41}{(x+1)(x-4)}=\dfrac{3x-8}{x-4}$

ĐKXĐ : $x \neq 4$ và $x \neq -1$.

Quy đồng mẫu số hai vế và khử mẫu ta có phương trình :

$$(2x-5)(x-4)+x^2-5x-41=(3x-8)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2-13x+20+x^2-5x-41=3x^2-5x-8$$

$$\Leftrightarrow \quad -13x=13 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1.$$

Giá trị này không thỏa mãn ĐKXĐ . Vậy phương trình (1) vô nghiệm.

Một số dạng phương trình phân thức thường gặp:

Dạng 1. Phương trình có dạng: $\dfrac{a_1}{x+b_1}+\dfrac{a_2}{x+b_2}+....+\dfrac{a_n}{x+b_n}=A$

Phương pháp giải: Nhóm từng cụm phân thức làm xuất hiện nhân tử chung.

★**Thí dụ 25.** Giải phương trình: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}=0$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x \notin \{-1;-2;-3;-4;0\}$. Ta biến đổi phương trình thành

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}\right)+\frac{1}{x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x+2)}{x^2+4x}+\frac{2(x+2)}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+4x}+\frac{1}{x^2+4x+3}+\frac{1}{2(x^2+4x+4)}=0.$$

Đặt $u = x^2 + 4x$, phương trình trở thành $\frac{1}{u} + \frac{1}{u+3} + \frac{1}{2(u+4)} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{5u^2 + 25u + 24}{2u(u+3)(u+4)} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \frac{-25+\sqrt{145}}{10} \\ u = \frac{-25-\sqrt{145}}{10} \end{array}\right..$$

Do đó $\left[\begin{array}{l} x^2 + 4x = \frac{-25+\sqrt{145}}{10} \\ x^2 + 4x = \frac{-25-\sqrt{145}}{10} \end{array}\right..$

Tìm được tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{-2-\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}}; -2+\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}}; -2+\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}}; -2-\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}}\right\}.$$

Dạng 2. Phương trình có dạng: $\frac{a_1x+b_1}{x+c_1} + \frac{a_2x+b_2}{x+c_2} + ... + \frac{a_nx+b_n}{x+c_n} = A$

Phương pháp giải: Ta biến đổi phương trình thành:

$$a_1 + \frac{d_1}{x+c_1} + a_2 + \frac{d_2}{x+c_2} + ... + a_n + \frac{d_n}{x+c_n} = A$$

★**Thí dụ 26.** Giải phương trình: $\frac{x+4}{x-1} + \frac{x-4}{x+1} - \frac{x+8}{x-2} - \frac{x-8}{x+2} = -\frac{8}{3}$

Hướng dẫn giải

Biến đổi phương trình thành:

$$\begin{array}{l} \frac{5}{x-1} + \frac{-5}{x+1} - \frac{10}{x+2} + \frac{10}{x+2} = -\frac{8}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{10}{x^2-1} - \frac{40}{x^2-4} = -\frac{8}{3} \end{array}.$$

Đặt $u = x^2 (u \neq 1, u \neq 4; u \geq 0)$ dẫn đến phương trình: $4u^2 - 65u + 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 16 \\ u = \frac{1}{4} \end{array}\right..$

Tìm được tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-\frac{1}{2}; -4; \frac{1}{2}; 4\right\}$.

Dạng 3. Phương trình có dạng:

i) $\frac{mx}{ax^2 + b_1x + c} + \frac{nx}{ax^2 + b_2x + c} = p$

ii) $\dfrac{ax^2+b_1x+c}{ax^2+b_2x+c}+\dfrac{ax^2+d_1x+c}{ax^2+d_2x+c}=0;$

iii) $\dfrac{ax^2+b_1x+c}{ax^2+b_2x+c}+\dfrac{px}{ax^2+dx+c}=0.$

Trong đó: a, p, m, n $\neq 0$

Phương pháp giải dạng i:

Nhận xét $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Với $x\neq 0$, ta chia cả tử số và mẫu số cho x thì thu được:

$$\frac{a}{x+m+\dfrac{p}{x}}+\frac{b}{x+n+\dfrac{p}{x}}=c.$$

Đặt $t=x+\dfrac{k}{x}\Rightarrow t^2=x^2+\dfrac{k^2}{x^2}+2k\geq 2|k|+2k$.

Thay vào phương trình để quy về phương trình bậc 2 theo t.

Các dạng ii) và iii) giải hoàn toàn tương tự.

★**Thí dụ 27.** Giải phương trình: $\dfrac{2x}{3x^2-4x+1}+\dfrac{13x}{3x^2+2x+1}=6$.

(Thi vào lớp 10 chuyên Quốc học Huế năm học 1996 - 1997)

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\begin{cases}3x^2-4x+1\neq 0\\ 3x^2+2x+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ x\neq\dfrac{1}{3}\end{cases}$

Dễ thấy x = 0 không phải là nghiệm của phương trình, do đó chia chia tử và mẫu của mỗi phân thức cho x ta được:

$$\frac{2}{3x-4+\dfrac{1}{x}}+\frac{13}{3x+2+\dfrac{1}{x}}=6.$$

Đặt $3x+\dfrac{1}{x}-4=t$ khi đó phương trình trở thành: $\dfrac{2}{t}+\dfrac{13}{t+6}=6\Leftrightarrow 2t^2+7t-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{2}\\ t=-4.\end{array}\right.$

Với $t=\dfrac{1}{2}$ thì $3x+\dfrac{1}{x}-4=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 6x^2-11x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{4}{3}\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Với $t=-4$ thì $3x+\frac{1}{x}-4=-4 \Leftrightarrow 6x^2+1=0$ (loại)

Vậy phương trình có nghiệm: $x=\frac{4}{3}, x=\frac{1}{2}$

Dạng 4. Phương trình có dạng: $x^2+\left(\frac{ax}{x+a}\right)^2=b$ với $a\neq 0, x\neq -a$.

Phương pháp giải:

Dựa vào hằng đẳng thức $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$.

Ta viết lại phương trình thành:

$$\left(x-\frac{ax}{x+a}\right)^2+2a.\frac{x^2}{x+a}=b \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+a}\right)^2+2a\frac{x^2}{x+a}-b=0.$$

Đặt $t=\frac{x^2}{x+a}$ quy về phương trình bậc 2.

★Thí dụ 28. Giải phương trình: $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=3$.

(Thi học sinh giỏi huyện Phù Ninh 2013-2014)

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x\neq -1$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2=3-2.\frac{x^2}{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2+2\left(\frac{x^2}{x+1}\right)-3=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+1}+3\right)\left(\frac{x^2}{x+1}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x^2}{x+1}+3=0\\ \frac{x^2}{x+1}-1=0\end{array}\right.$$ =>

+) $\frac{x^2}{x+1}+3=0 \Leftrightarrow x^2+3x+3=0$ (vô lý)

+) $\frac{x^2}{x+1}-1=0 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Có nhiều bài toán bậc bốn không mẫu mực việc biến đổi và đặt ẩn phụ để giải phải thực sự linh hoạt không thể phân thành dạng cụ thể, chúng ta đi đến một số bài toán sau:

★Thí dụ 29. Giải phương trình: $\frac{1}{x^2+5x+4}+\frac{1}{x^2+11x+28}+\frac{1}{x^2+17x+70}=\frac{3}{4x-2}$. .

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{1}{x^2+5x+4}+\frac{1}{x^2+11x+28}+\frac{1}{x^2+17x+70}=\frac{3}{4x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+7)}+\frac{1}{(x+7)(x+10)}=\frac{3}{4x-2} \quad (*)$$

Từ suy ra điều kiện để phương trình có nghĩa là: $x\neq -1;-4;-7;-10;\frac{1}{2}$

Khi đó:

$$(*)\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+10}\right)=\frac{3}{4x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+10}=\frac{9}{4x-2}\Leftrightarrow x^2+7x+12=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-4. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm duy nhất x = -3.

★Thí dụ 30. Giải phương trình: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}=15$. .

Hướng dẫn giải

ĐK: $\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq -1 \end{cases}$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}=15\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2+x^2}{x^2(x+1)^2}=15$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+2x(x+1)}{x^2(x+1)^2}=15\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x(x+1)}\right)^2+\frac{2}{x(x+1)}=15$$

Đặt $\frac{1}{x(x+1)}=t$ khi đó phương trình trở thành:

$t^2+2t-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-5 \end{array}\right.$

Với t = 3 ta có: $\dfrac{1}{x(x+1)}=3 \Leftrightarrow 3x^2+3x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$.

Với t = - 5 suy ra: $\dfrac{1}{x(x+1)}=-5 \Leftrightarrow 5x^2+5x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$.

Phương trình đã cho có bốn nghiệm $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{6}, x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$

★**Thí dụ 31.** Giải phương trình: $\dfrac{x^4+3x^2+1}{x^3+x^2-x}=3$.

Hướng dẫn giải

Điều kiên: $x^3+x^2-x\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Chia chia tử và mẫu của phân thức cho $x^2\neq 0$ ta được phương trình tương đương:

$\dfrac{x^2+3+\dfrac{1}{x^2}}{x+1-\dfrac{1}{x}}=3$. Đặt $t=x-\dfrac{1}{x} \Rightarrow t^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2 \Rightarrow t^2+5=x^2+\dfrac{1}{x^2}+3$

Khi đó, phương trình trở thành: $\dfrac{t^2+5}{t+1}=3 \Leftrightarrow t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=2$

Với t = 1 thì $x-\dfrac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Với t = 2 thì $x-\dfrac{1}{x}=2 \Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$.

Vậy phương trình có bốn nghiệm là: $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ và $x=1\pm\sqrt{2}$

★**Thí dụ 32.** Giải phương trình: $\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^2+\dfrac{x+1}{x-3}=12\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)^2$. .

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq 3 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{x+1}{x-2} \\ v = \dfrac{x-2}{x-3} \end{cases} \Rightarrow uv = \dfrac{x+1}{x-3}$.

Khi đó, phương trình đã cho trở thành:

$u^2 + uv = 12v^2 \Leftrightarrow u^2 + uv - 12v^2 = 0$

$\Leftrightarrow (u-3v)(u+4v) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 3v \\ u = -4v \end{array}\right.$

Với u = 3v ta có: $\dfrac{x+1}{x-2} = 3.\dfrac{x-2}{x-3} \Leftrightarrow 2x^2 - 16x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{8 \pm \sqrt{46}}{2}$.

Với u = -4v ta có: $\dfrac{x+1}{x-2} = -4.\dfrac{x-2}{x-3} \Leftrightarrow 5x^2 - 12x + 19 = 0 \quad (VN)$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{8 \pm \sqrt{46}}{2}$

Dạng 5. Sử dụng phương pháp đánh giá để giải phương trình chứa phân thức

★Thí dụ 32. Giải phương trình: $\dfrac{3}{x^2+x+3} - \dfrac{4}{x^2+3x+9} = \dfrac{1}{2x^2}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + x + 3 \neq 0 \\ x^2 + 3x + 9 \neq 0 \\ 2x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0.$

Với điều kiện x ≠ 0 phương trình đã cho tương đương với: $\dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{4}{x^2+3x+9} = \dfrac{3}{x^2+x+3}$

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức: $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} \geq \dfrac{(a+b)^2}{x+y}$ (*) .

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức bu-nhi-a-cốp-xki cho hai bộ số $\left(\sqrt{x};\sqrt{y}\right)$ và $\left(\dfrac{a}{\sqrt{x}};\dfrac{b}{\sqrt{y}}\right)$ ta có:

$$\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2\right)\left(\left(\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{y}}\right)^2\right) \geq (a+b)^2 \Rightarrow \dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} \geq \dfrac{(a+b)^2}{x+y}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$

Vậy BĐT (*) được chứng minh.

Áp dụng BĐT (*) ta có: $\dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{4}{x^2+3x+9} = \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{(2)^2}{x^2+3x+9} \geq \dfrac{(1+2)^2}{2x^2+x^2+3x+9} = \dfrac{3}{x^2+x+3}$

Do đó phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{1}{2x^2}=\frac{2}{x^2+3x+9}\Leftrightarrow x^2+3x+9=4x^2\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

★**Thí dụ 33.** Giải phương trình:

$$\frac{3\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)}{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}+\frac{4\left(x-1\right)\left(x-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}+\frac{5\left(x-1\right)\left(x-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}=3x-2\ .$$

Hướng dẫn giải

Đặt $f\left(x\right)=\frac{3\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)}{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}+\frac{4\left(x-1\right)\left(x-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}+\frac{5\left(x-1\right)\left(x-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}$

f(x) là đa thức bậc 2 nên có dạng: $ax^2+bx+c=0\ \forall x$

Ta có : $\begin{cases} f\left(1\right)=a+b+c=2\\ f\left(\sqrt{3}\right)=3a+\sqrt{3}b+c=4\\ f\left(\sqrt{5}\right)=5a+\sqrt{5}b+c=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=\frac{1}{2}\\ b=0\\ c=\frac{5}{2}\end{cases}$

Do đó phương trình tương đương : $\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}=3x-2\Leftrightarrow\left(x-3\right)^2=0\Leftrightarrow x=3$

Vậy phương trình có nghiệm x = 3.

CHỦ ĐỀ 3.
PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. Kiến thức cần nhớ

Định nghĩa về giá trị tuyệt đối : $|A|=\begin{cases} A & \text{nếu } A\geq 0\\ -A & \text{nếu } A<0\end{cases}$

Để giải phương trình có chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối cần khử dấu giá trị tuyệt đối. Ta cần nhớ giá trị tuyệt đối của một biểu thức bằng chính nó nếu nó có giá trị không âm, bằng số đối của nó nếu nó có giá trị âm. Do đó để bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta phải xét các giá trị làm biểu thức âm hoặc không âm.

B. Một số ví dụ minh họa

★**Thí dụ 33.** Giải phương trình:

$a)\ x^2-3|x|+2=0 \qquad b)\ |x^2-4x-1|=31 \qquad c)\ |x^2-2x+4|=8x-x^2-8$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình đã cho tương đương với phương trình $|x|^2-3|x|+2=0$

$$\Leftrightarrow\ |x|-1 \quad |x|-2 \ =0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x|=1\\|x|=2\end{array}\right..$$

Phương trình có nghiệm $x\in\ -2;-1;1;2$

b) Ta có:

$$|x^2-4x-1|=31 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}x^2-4x-1=31\\x^2-4x-1=-31\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}x^2-4x-32=0\\x^2-4x+30=0\end{array}\right.$$

Phương trình $x^2-4x-32=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-8)(x+4)=\ 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=8\\x=-4\end{array}\right.$

Phương trình $x^2-4x+30=0$ vô nghiệm

vì $x^2-4x+30 = (x-2)^2+26>0$, $\forall x$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=8$ và $x=-4$.

c) Do $x^2-2x+4=(x-1)^2+3>0$, $\forall x$ nên

$|x^2-2x+4|=x^2-2x+4$. Do đó PT $\Leftrightarrow x^2-2x+4=8x-x^2-8$

$$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \ \Leftrightarrow\ (x-3)(x-2)=0 \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\x=2\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=2$ và $x=3$.

★**Thí dụ 34.** Giải phương trình:

$a)\ ||2x-5|-7|+9=21 \qquad\qquad b)\ |||2x-1|-4|+8|-10=15.$.

Hướng dẫn giải

$$\text{a) PT} \Leftrightarrow ||2x-5|-7|+9=21 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|2x-5|-7=-12\\|2x-5|-7=12\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|2x-5|=-5 \quad \text{(loại)}\\|2x-5|=19\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-5=-19\\2x-5=19\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-7\\x=12\end{array}\right..$$

b) PT $\Leftrightarrow \left|\left|\left|2x-1\right|-4\right|+8\right|=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|\left|2x-1\right|-4\right|+8=-25\\ \left|\left|2x-1\right|-4\right|+8=25\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|\left|2x-1\right|-4\right|=-33\ \text{(loại)}\\ \left|\left|2x-1\right|-4\right|=17\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|2x-1\right|-4=-17\\ \left|2x-1\right|-4=17\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|2x-1\right|=-13\ \text{(loại)}\\ \left|2x-1\right|=21\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=-21\\ 2x-1=21\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-10\\ x=11\end{array}\right.$

★**Thí dụ 35.** Giải phương trình:

a) $|x-3|+|3x-6|-|5-2x|=8$; b) $|x^2-9|+|x^2-25|=26$;

c) $|x+1|+|x+2|+|2x+5|=10x.$ d) $\dfrac{|5-3x|-|x-1|}{x-3+|3+2x|}=4$

Hướng dẫn giải

a) Lập bảng xét giá trị tuyệt đối (hay bảng phá dấu GTTĐ):

x		2		2,5		3	
$\|x-3\|$	3 – x	|	3 – x	|	3 – x	0	x – 3
$\|3x-6\|$	6 – 3x	0	3x – 6	|	3x – 6	|	3x – 6
$\|5-2x\|$	2x – 5	|	2x – 5	0	5 – 2x	|	5 – 2x
Vế trái	14 – 6x	|	0x + 2	|	4x – 8	|	6x – 14

Vậy : + Với $x < 2$ thì $14 - 6x = 8$ $\Leftrightarrow$ $x = 1$ (thỏa mãn)

+ Với $2 \le x \le 2{,}5$ thì $0x + 2 = 8$ Vô nghiệm

+ Với $2 < x \le 3$ thì $4x - 8 = 8$ $\Leftrightarrow$ $x = 4$ (loại)

+ Với $x > 3$ thì $6x - 14 = 8$ $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{11}{3}$ (thỏa mãn)

Nghiệm của phương trình : $x = 1$ và $x = 3\dfrac{2}{3}$

b) Lập bảng xét GTTĐ :

x^2		9		25	
$\|x^2-9\|$	$9 - x^2$	0	$x^2 - 9$	|	$x^2 - 9$
$\|x^2-25\|$	$25 - x^2$	|	$25 - x^2$	0	$x^2 - 25$

Vế trái	$34 - 2x^2$	|	$0x^2 - 16$	|	$2x^2 - 34$

Với $x^2 \le 9$; $34 - 2x^2 = 26 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Với $9 < x^2 < 25$; $0x^2 - 16 = 26$ Vô nghiệm

Với $x^2 \ge 25$; $2x^2 - 34 = 26 \Leftrightarrow x^2 = 30 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{30}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm 2$ và $x = \pm\sqrt{30}$.

c) Phương trình $|x+1|+|2x+5|+|3x+2| = 10x$ có vế trái không âm nên $10x \ge 0 \Rightarrow x \ge 0$ do đó $x + 1 + 2x + 5 + 3x + 2 = 10x \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình có nghiệm x = 2.

d) Điều kiện $x - 3 + |3+2x| \ne 0$.

Bạn đọc tự lập bảng xét dấu.

Phương trình tương đương

$|3x-5| - |x-1| - 4|2x+3| - 4x + 12 = 0$ (*)

Xét $x < -\frac{3}{2}$ Thì (*) $\Leftrightarrow -3x + 5 + (x - 1) + 4(2x + 3) - 4x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow 2x = -28$

$\Leftrightarrow x = -14$ (Thỏa mãn đk)

Xét $-\frac{3}{2} \le x < 1$ Thì (*)

$\Leftrightarrow -3x + 5 + x - 1 - 4(2x + 3) - 4x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{7}$ (Thỏa mãn đk)

Xét $1 \le x < \frac{5}{3}$ Thì (*)

$\Leftrightarrow -3x + 5 - (x - 1) - 4(2x + 3) - 4x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{8}$ (loại)

Xét $x \ge \frac{5}{3}$ Thì (*) $\Leftrightarrow 3x - 5 - (x - 1) - 4(2x + 3) - 4x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$ (Loại)

Vậy phương trình có nghiệm $x \in \left\{-14; \frac{2}{7}\right\}$

★**Thí dụ 36.** Giải phương trình: $||3x-4|-5| - |x+2| = 1$.

Hướng dẫn giải

(1) $\Leftrightarrow \left||3x-4|-5\right| = 1+|x+2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |3x-4|-5 = 1+|x+2| \\ |3x-4|-5 = -1-|x+2| \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} |3x-4|-|x+2| = 6 \\ |3x-4|+|x+2| = 4 \end{array}\right.$

a) Với $|3x-4|-|x+2| = 6$ ta lập bảng xét giá trị tuyệt đối :

x		-2		$\frac{4}{3}$	
$\lvert 3x-4\rvert$	$4-3x$	|	$4-3x$	0	$3x-4$
$\lvert x+2\rvert$	$-2-x$	0	$x+2$	|	$x+2$
Vế trái	$6-2x$	|	$-4x+2$	|	$2x-6$

Với $x \le -2$; $6-2x = 6 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn).

Với $-2 < x < \frac{4}{3}$; $-4x+2 = 6 \Leftrightarrow x = -1$ (thỏa mãn)

Với $x \ge \frac{4}{3}$; $2x-6 = 6 \Leftrightarrow x = 6$ (thỏa mãn)

b) Với $|3x-4|+|x+2| = 4$ lập bảng xét giá trị tuyệt đối :

x		-2		$\frac{4}{3}$	
$\lvert 3x-4\rvert$	$4-3x$	|	$4-3x$	0	$3x-4$
$\lvert x+2\rvert$	$-2-x$	0	$x+2$	|	$x+2$
Vế trái	$2-4x$	|	$-2x+6$	|	$4x-2$

Với $x \le -2$; $2-4x = 6 \Leftrightarrow x = -1$ (không thỏa mãn).

Với $-2 < x < \frac{4}{3}$; $-2x+6 = 4 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Với $x \ge \frac{4}{3}$; $4x-2 = 4 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-1; 0; 1; \frac{3}{2}; 6\right\}$

★**Thí dụ 36.** Giải phương trình: $|x+1|^{2016} + |x+2|^{2017} = 1$

(Trích đề thi học sinh giỏi huyện Ba Vì năm học 2017-2018)

Hướng dẫn giải

Dễ thấy x = - 2 và x = - 1 là nghiệm của phương trình.

* Xét x < - 2:

Ta có: x + 1< -1 và x + 2< 0. Suy ra: $|x+1| > 1; |x + 2| > 0$

Do đó: $|x+1|^{2016} > 1; |x + 2|^{2017} > 0$

Vì thế: $|x + 1|^{2016} + |x + 2|^{2017} > 1$

Vậy với x < - 2 phương trình vô nghiệm.

* Xét -2 < x < -1:

Ta có: -1< x + 1< 0 và 0< x + 2 <1 . Suy ra: $0 < |x + 1| < 1$; $0 < |x + 2| < 1$

Và $|x+1| = -x - 1$; $|x + 2| = x + 2$

Vì thế: $|x + 1|^{2016} < |x+1|$; $|x + 2|^{2017} < |x+2|$

Vậy: $|x + 1|^{2016} + |x + 2|^{2017} < |x+1| + |x +2| = -x - 1 + x + 2 = 1$

Do đó với -2 < x < -1 phương trình vô nghiệm.

* Xét: x > -1:

Ta có: x + 1 > 0 và x + 2 > 1.Suy ra: $|x+1| > 0$ và $|x + 2| > 1$.

Vậy: $|x + 1|^{2016} + |x + 2|^{2017} > 1$

Do đó với x > -1 phương trình vô nghiệm.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là: S= $\{-2; -1\}$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Chủ đề 1. Phương trình đa thức bậc cao

Câu 1. *(Đề HSG huyện Cẩm Giàng 2015-2016)*

Giải phương trình: $\left(x^2+2x\right)^2-2x^2-4x=3$

Câu 2. *(Đề HSG huyện Gia Lộc 2015-2016)*

Giải phương trình: $2x^4-7x^3+9x^2-7x+2=0$

Câu 3. *(Đề HSG huyện Vũ Quang 2018-2019)*

Tìm các số nguyên x thỏa mãn phương trình: $(3x-1)(4x-1)(6x-1)(12x-1)=330$

Câu 4. *(Đề HSG huyên Thanh Oai 2013-2014)*

Giải phương trình: $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)=24$

Câu 5. *(Trích đề chuyên Đăk Nông 2019-2020)*

Giải phương trình $(x-2)^2(x-1)(x-3)=12$.

Câu 6. *(Trích đề chuyên Tây Ninh 2019-2020)*

Giải phương trình $x^4+x^2-20=0$

Câu 7. *(Trích đề chuyên Quảng Trị 2019-2020)*

Giải phương trình: $x^6+\left(x^3-3\right)^3=3x^5-9x^2-1$

Câu 8. *(Trích đề chuyên Đồng Nai 2018-2019)*

Giải phương trình $x^4-9x^3+24x^2-27x+9=0\ \ (x\in R)$

Câu 9. Giải các phương trình: $x^2\left(x^4-1\right)\left(x^2+2\right)+1=0$

Câu 10. Giải phương trình $(x + 9)(x + 10)((x + 11) – 8x = 0$

(Tuyển sinh lớp 10 khối THPT chuyên Toán – Tin ĐHSP Vinh năm học 2002 – 2003)

Câu 11. Giải phương trình $x^4 – 4x^3 – 19x^2 + 106x – 120 = 0$.

(Thi vào lớp 10 THPT chuyên Trần Đại Nghĩa TP Hồ Chí Minh năm học 2003 – 2004)

Câu 12. Giải phương trình $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$.

(Đề thi tuyển vào lớp 10 chuyên ĐHSPNN Hà Nội năm học 2004 – 2005)

Câu 13. Giải phương trình $6x^5 – 29x^4 + 27x^3 + 27x^2 – 29x + 6 = 0$

(Thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Thanh Hóa năm học 2005 – 2006)

Câu 14. Giải phương trình $(3x + 4)(x + 1)(6x + 7)^2 = 6$.

(Tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên ĐHSP Hà Nội năm học 2006 – 2007)

Câu 15. Giải phương trình $(x^2 – 2x)^2 + 3x^2 – 6x = – 2$.

(Thi học sinh giỏi lớp 9 huyện Thường Tín Hà Tây năm học 2006 – 2007)

Câu 16. Giải phương trình $(4x + 3)^2(2x + 1)(x + 1) = 810$.

(Tuyển sinh lớp 10 chuyên Tin Quốc học Huế năm học 2019 – 2010)

Câu 17. Giải phương trình $x^3 + 3x – 140 = 0$.

(Đề thi tuyển vào lớp 10 THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa năm học 2010 – 2011)

Câu 18. Giải phương trình $\left(x^2-2x\right)^2+3\left(x-1\right)=x(2x-1)$.

(Đề thi tuyển vào lớp 10 THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước năm học 2010 – 2011)

Câu 19. Giải phương trình $\left(2x^2-x\right)^2+2x^2-x-12=0$.

(Thi tuyển sinh lớp 10 chuyên TP Hồ Chí Minh năm học 2010 – 2011)

Câu 20. Giải phương trình $\left(x^2-4x+11\right)\left(x^4-8x^2+21\right)=35$.

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương năm học 2012 – 2013)

Câu 21. *(Đề thi HSG huyện Thanh Thủy 2016-2017)*

Giải phương trình: $5x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$

Câu 22. *(Trích đề chuyên Phú Yên năm 2012-2013)*

Giải phương trình: $(1005-x)^3+(1007-x)^3+(2x-2012)^3=0$

Chủ đề 2. Phương trình phân thức

Câu 23. Giải phương trình: $\dfrac{1}{2008x+1}-\dfrac{1}{2009x+2}=\dfrac{1}{2010x+4}-\dfrac{1}{2011x+5}$

Câu 24. *(Đề HSG quận Bắc Từ Lim 2018-2019)*

Giải phương trình: $x\left(\dfrac{5-x}{x+1}\right)\left(x+\dfrac{5-x}{x+1}\right)=6$

Câu 25. *(Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu năm 2019-2020)*

Giải phương trình $x^2+\dfrac{9x^2}{(x-3)^2}=40$

Câu 26. *(Trích đề chuyên Đắc Lắc năm 2018-2019)*

Giải phương trình: $\dfrac{15}{x^2-6x+4}=\dfrac{(x-1)^2+15x+3}{x(x^2-2x+4)}$.

Câu 27. *(Trích đề chuyên Quản Nam năm 2015-2016)*

Giải phương trình sau: $\dfrac{6}{x^2-9}+\dfrac{4}{x^2-11}-\dfrac{7}{x^2-8}-\dfrac{3}{x^2-12}=0$

Câu 28. *(Trích Chuyên Hòa Bình năm 2015-2016)*

Giải phương trình: $\dfrac{1}{3x-1}+\dfrac{1}{2x+4}=\dfrac{1}{9x-2}+\dfrac{1}{5-4x}$

Câu 29. Giải các phương trình :

a) $\dfrac{3}{x^2-5x+6}-\dfrac{4}{x^2-7x+12}=\dfrac{5}{x^2-6x+8}+\dfrac{14}{x^3-9x^2+26x-24}$;

b) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}+...+\dfrac{1}{x^2+39x+380}=\dfrac{19}{42}$;

c) $\dfrac{2}{x^2-2x}+\dfrac{2}{x^2-6x+8}+...+\dfrac{2}{x^2-18x+80}=\dfrac{5}{12}$.

Câu 30. Giải phương trình: $\dfrac{x^2-4x+6}{x-2}+\dfrac{x^2-6x+12}{x-3}=(2x-5)-\dfrac{x^2-24}{x^2-5x+6}$.

Câu 31. Giải phương trình $\dfrac{2x}{2x^2-5x+3}+\dfrac{13x}{2x^2+x+3}=6$.

(Thi vào lớp 10 chuyên Quốc học Huế năm học 1996 - 1997)

Câu 32. Giải phương trình $x^3+\dfrac{x^3}{(x-1)^3}+\dfrac{3x^2}{x-1}-2=0$.

(Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên ĐHSP Hà Nội năm học 2000 – 2001)

Câu 33. Giải phương trình $\dfrac{5}{x^2-4x+5}-x^2+4x-1=0$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Quốc học Huế năm học 2002 – 2003)

Câu 34. Giải phương trình

$$\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{1}{x^2-9x+20}+\frac{1}{x^2-11x+30}=\frac{1}{8}.$$

(Khảo sát chất lượng học sinh giỏi Toán 8 huyện Thường Tín Hà Nội năm học 2012 – 2013).

Câu 35. Giải phương trình $\dfrac{x\left(x^2-56\right)}{4-7x}-\dfrac{21x+22}{x^3+2}=4$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên ĐHSP Hà Nội năm học 2014 – 2015)

Câu 36. Giải phương trình $\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{2x}{x^2-1}$.

(Đề thi học sinh giỏi Toán 9 Huyện Thường Tín Hà Nội năm học 2014 – 2015)

Câu 37. Giải phương trình $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{(x+1)^2}=2$

(Đề thi chọn đội tuyển Toán 9 quận Gò Vấp TP Hồ Chí Minh năm học 2014 – 2015)

Câu 38. Giải phương trình $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x+2}+\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-2x+3}=\dfrac{7}{6}$

(Khảo sát chất lượng học sinh giỏi Toán 8 huyện Thường Tín Hà Nội năm học 2014 – 2015).

Câu 39. Giải các phương trình:

a) $x^2+\dfrac{25x^2}{(x+5)^2}=11$. *(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2013).*

b) $\dfrac{12x}{x^2+4x+2}-\dfrac{3x}{x^2+2x+2}=1$. *(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Đại học Vinh 2010).*

c) $\dfrac{x^2}{(x+2)^2}=3x^2-6x-3$ *(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên ĐHSP Hà Nội 2008).*

d) $x^3+\dfrac{x^3}{(x-1)^3}+\dfrac{3x^2}{x-1}-2=0$

Câu 40. Giải các phương trình: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}=0$.

Câu 41. Giải các phương trình: $\dfrac{x+4}{x-1}+\dfrac{x-4}{x+1}-\dfrac{x+8}{x-2}-\dfrac{x-8}{x+2}=-\dfrac{8}{3}$.

Câu 42. Giải các phương trình: $\dfrac{x+1}{x(x+2)}+\dfrac{x+6}{x^2+12x+35}=\dfrac{x+2}{x^2+4x+3}+\dfrac{x+5}{x^2+10x+24}$.

Câu 43. Giải các phương trình: $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1$

Câu 44. Giải các phương trình: $.\dfrac{x^2+x+1}{x+1}+\dfrac{x^2+2x+2}{x+2}-\dfrac{x^2+3x+3}{x+3}-\dfrac{x^2+4x+4}{x+4}=0$.

Câu 45. Giải các phương trình: $\dfrac{x^2-12}{(x+2)^2}=3x^2-6x-3$.

Câu 46. Giải các phương trình: $\dfrac{2x}{3x^2-5x+2}+\dfrac{13x}{3x^2+x+2}=6$.

Câu 47. Giải các phương trình: $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2+5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2-20\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0$.

Chủ đề 3. Phương trình có dấu giá trị tuyệt đối

Câu 48. Giải phương trình $|x-2|(x-1)(x+1)(x+2)=4$

(Đề HSG huyện Vũ Quang 2018-2019)

Câu 49. Giải phương trình $|x|+|x+1|+|x+2|=7$.

((Đề thi vào lớp 10 chuyên, Quốc học Huế năm học 1994 – 1995)

Câu 50. Giải phương trình $|x^2-1|+|x^2-1|=3$.

(Thi học sinh giỏi lớp 9 TP Hồ Chí Minh năm học 1994 – 1995)

Câu 51. Giải phương trình $|x|-|x-2|=2$.

(Thi vào lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong TP Hồ Chí Minh năm học 1995- 1996)

Câu 52. Giải phương trình $(x-1)^2+2|x-1|-8=0$.

(Thi học sinh giỏi lớp 9 PT TP Hồ Chí Minh năm học 2001- 2002)

Câu 53. Giải phương trình $|2x+5|=x^2+3x-1$.

(Thi vào lớp 10 PT năng khiếu ĐHQG TP Hồ Chí Minh năm học 2003- 2004)

Câu 54. Giải phương trình $|x+1|+|x-1|=1+|x^2-1|$.

(Đề thi tuyển sinh THPT chuyên ĐHQG Hà Nội năm 2004).

Câu 55. Giải phương trình $|x-2005|^{2006}+|x-2006|^{2006}=1$

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Thanh Hóa năm học 2004 – 2005)

Câu 56. Tìm x thỏa $|9x-8|+|7x-6|+|5x-4|+|3x-2|+x=0$.

(Chuyên Đà Nẵng năm 2019-2020)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$\left(x^2+2x\right)^2-2x^2-4x=3 \Leftrightarrow \left(x^2+2x\right)^2-2\left(x^2+2x\right)-3=0\ (1)$$

Đặt $x^2+2x=a$, phương trình (1) trở thành

$a^2-2a-3=0$

$\Leftrightarrow (a+1)(a-3)=0$

$\Leftrightarrow$ a = –1 hoặc a = 3

+ Với a = –1, ta có $x^2+2x=-1 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-1$

+ Với a = 3, ta có $x^2+2x=3$

$\Leftrightarrow$ x + 2x – 3 = 0

$\Leftrightarrow$ (x – 1)(x + 3) = 0

$\Leftrightarrow$ x = 1 hoặc x = –3

Vậy phương trình có tập nghiệm là S = $\{-1;1;-3\}$

Câu 2.

Vì x = 0 không là nghiệm của phương trình nên $x \neq 0$.

Chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được:

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$$

Đặt $y=x+\frac{1}{x}$ thì $y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$.

Do đó ta có phương trình:

$$2(y^2-2)-7y+9=0$$

$$\Leftrightarrow 2y^2-7y+5=0 \Leftrightarrow (y-1)(2y-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-1=0 \\ 2y-5=0 \end{array}\right.$$

*Với y-1 = 0 ta có $x+\frac{1}{x}-1=0 \Leftrightarrow x^2-x+1=0$ vô nghiệm vì

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0, \forall x$$

*Với 2y - 5 = 0 ta có $2.\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0 \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0$

$$\Leftrightarrow (2x-1).(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy x = 2 và $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình

Câu 3.

Ta có: $(3x-1)(4x-1)(6x-1)(12x-1)=330 \Leftrightarrow (36x^2-15x+1)(24x^2-10x+1)=330$

$\Leftrightarrow \left[3(12x^2-5x)+1\right]\left[2(12x^2-5x)+1\right]=330$

Đặt: $y=12x^2-5x$.

Ta có: $(3y+1)(2y+1)=330 \Leftrightarrow 6y^2+5y+1=330 \Leftrightarrow 6y^2+5y-329=0$

$\Leftrightarrow 6y^2-42y+47y-329=0 \Leftrightarrow 6y(y-7)+47(y-7)=0$

$\Leftrightarrow (y-7)(6y+47)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=7 \\ y=\dfrac{-47}{6} \end{array}\right.$

Vì $x\in Z \Rightarrow y\in Z$, do đó $y=7$.

Ta có:

$12x^2-5x=7 \Leftrightarrow 12x^2-5x-7=0 \Leftrightarrow 12x^2-12x+7x-7=0 \Leftrightarrow 12x(x-1)+7(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(12x+7)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-7}{12} \end{array}\right.$

Do $x\in Z \Rightarrow x=1$ thỏa mãn bài toán.

Câu 4.

$(x+3)(x+6)(x+4)(x+5)=24 \;\Leftrightarrow (x^2+9x+18)(x^2+9x+20)=24$ (1)

Đặt $x^2+9x+19=y$ phương trình (1) trở thành :

$(y+1)(y-1)-24=0 \Leftrightarrow y^2-25=0 \Leftrightarrow (y-5)(y+5)=0$

$\Leftrightarrow (x^2+9x+24)(x^2+9x+14)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x+7)(x^2+9x+24)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x+7)(x^2+9x+24)=0$

Chứng tỏ $x^2+9x+24>0$

Vậy nghiệm của phương trình : $x=-2; x=-7.$

Câu 5.

PT biến đổi thành $(x^2-4x+4)(x^2-4x+3)=12$.

Đặt $t=x^2-4x+4=(x-2)^2\geq 0$, phương trình trở thành

$t^2-t-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4(n) \\ t=-3(l) \end{array}\right.$.

Với $t=4$, ta được $x^2-4x+4=4 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0,\ x=4$.

Câu 6.

Đặt $t=x^2, t\ge 0$, phương trình đã cho trở thành $t^2+t-20=0\quad (1)$

$\Delta=b^2-4ac=81$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $t=4$ (nhận); $t=-5$ (loại)

Với $t=4$ tìm được $x=\pm 2$. Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=\pm 2$

Câu 7.

$x^6+\left(x^3-3\right)^3=3x^5-9x^2-1\Leftrightarrow\left(x^2\right)^3+\left(x^3-3\right)^3+1=3x^2\left(x^3-3\right)$

Đặt: $x^2=a,\ x^3-3=b$

Ta có phương trình: $a^3+b^3+1=3ab\Leftrightarrow(a+b)^3+1-3ab(a+b)-3ab=0$

$\Leftrightarrow(a+b+1)\left[(a+b)^2-(a+b)+1\right]-3ab\left[(a+b)+1\right]=0$

$\Leftrightarrow(a+b+1)\left(a^2+b^2-ab-a-b+1\right)=0$

+) $a^2+b^2-ab-a-b+1=0\Leftrightarrow(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2=0\Leftrightarrow a=b=1$

$\Rightarrow x^2=x^3-1=1\quad$ (VN)

+) $a+b+1=0\Rightarrow x^2+x^3-3+1=0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2+2x+2\right)=0\Leftrightarrow x=1.$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1.$

Câu 8.

Với x = 0, $(*)\Leftrightarrow 0x+9=0$ (phương trình vô nghiệm.

Với x $\neq$ 0, chia 2 vế của phương trình (*) cho x^2

$(*)\Leftrightarrow x^2-9x+24-\dfrac{27}{x}+\dfrac{9}{x^2}=0\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{3}{x}\right)^2-9\left(x+\dfrac{3}{x}\right)+18=0$

$\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{3}{x}-3\right)\left(x+\dfrac{3}{x}-6\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\dfrac{3}{x}-3=0\\ x+\dfrac{3}{x}-6=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x+3=0\ \text{(VN)}\\ x^2-6x+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3+\sqrt{6}\\ x=3-\sqrt{6}\end{array}\right.$

Câu 9. PT $\Leftrightarrow x^2\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)\left(x^2+2\right)+1=0$

$\Leftrightarrow\left(x^4+x^2\right)\left(x^4+x^2-2\right)+1=0$

$\Leftrightarrow\left(x^4+x^2\right)^2-2\left(x^4+x^2\right)+1=0$

$\Leftrightarrow\left(x^4+x^2-1\right)^2=0\Leftrightarrow x^4+x^2-1=0$.

Giải phương trình trùng phương trên ta được tập nghiệm của PT là $\left\{-\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}};\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}\right\}$.

Câu 10. Đặt y = x + 15 ta có (y – 6)(y – 5)(y – 4) – 8(y – 15) = 0

$\Leftrightarrow\ y(y^2-15y+66)=0$. Do $y^2-15y+66=\left(y-\dfrac{15}{2}\right)^2+\dfrac{39}{4}>0\,;\forall y$

$\Rightarrow y=0\ \Rightarrow x=-15$. (Cách khác: Đặt x + 10 = y. Bạn đọc tự giải)

Câu 11. Biến đổi phương trình thành (x – 2)(x – 3)(x – 4)(x + 5) = 0

Tập nghiệm : $S=\{-5;2;3;4\}$.

Câu 12. Biến đổi phương trình thành (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 24

$\Leftrightarrow(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24$.

Đặt $x^2+5x+5=t$ ta có $(t-1)(t+1)=24\Leftrightarrow t^2=5\Leftrightarrow t=\pm5$.

Xét với t = 5 và t = – 5 ta tìm được hai nghiệm là x = 0 và x = – 5 .

Câu 13. Biến đổi thành $(x+1)(6x^4-35x^3+62x^2-35x+6)=0$.

Ta tìm được x = –1 là 1 nghiệm. Với $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$ do x = 0 không là nghiệm nên chia hai vế cho x^2 ta được :

$6\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+62=0$. Đặt $x+\dfrac{1}{x}=y$ thì $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$

Phương trình trở thành $6(y^2-2)-35y+62=0\Leftrightarrow(2y-5)(3y-10)=0$

Thay $y=x+\dfrac{1}{x}$ vào $2y-5=0$ giải ra ta tìm được $x=2$ hoặc $x=\dfrac{1}{2}$.

Thay $y=x+\dfrac{1}{x}$ vào $3y-10=0$ giải ra ta tìm được $x=3$ hoặc $x=\dfrac{1}{3}$

Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-1;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2};2;3\right\}$.

Câu 14. Nhân (3x + 4) với 2 ; (x + 1) với 6 và vế phải với 12 ta được

$(6x+8)(6x+6)(6x+7)^2=72$. Đặt 6x + 7 = y phương trình trở thành

$(y+1)(y-1)y^2=72\Leftrightarrow y^4-y^2-72=0\Leftrightarrow(y^2-9)(y^2+8)=0\Leftrightarrow y=\pm3$ (do $y^2+8>0,\ \forall y$). Giải tiếp ta tìm được nghiệm $x=-\dfrac{2}{3}$ và $x=-\dfrac{5}{3}$.

Câu 15. $(x^2-2x)^2+3x^2-6x=-2\Leftrightarrow(x^2-2x)^2+3(x^2-2x)+2=0$.

Đặt $x^2-2x=y$ ta có $y^2+3y+2=0\Leftrightarrow(y+1)(y+2)=0\Leftrightarrow y=-1$ hoặc $y=-2$. Với $x^2-2x=-1\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$.

Với $x^2 - 2x = -2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 = 0$ vô nghiệm.

Câu 16. $(4x+3)^2(2x+1)(x+1) = 810 \Leftrightarrow \left[8\left(2x^2+3x\right)+9\right]\left(2x^2+3x+1\right) = 810$

Đặt $2x^2 + 3x = y$ phương trình trở thành

$(8y+9)(y+1) - 810 = 0 \Leftrightarrow 8y^2 + 17y - 801 = 0 \Leftrightarrow (y-9)(8y+89) = 0$

* $y - 9 = 0$ tức là $2x^2 + 3x - 9 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(2x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 1{,}5$.

* $8y + 89 = 0$ tức là $16x^2 + 24x + 89 = 0$ vô nghiệm vì $16x^2 + 24x + 89 = (4x+3)^2 + 80 > 0$, $\forall$ x.
Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -3$ và $x = 1{,}5$.

Cách khác: Biến đổi phương trình thành $(4x+3)^2(4x+2)(4x+4) = 6480$. Đặt

$4x + 3 = y$. (Bạn đọc tự giải tiếp)

Câu 17. $x^3 + 3x - 140 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 5x^2 - 25x + 28x - 140 = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)(x^2 + 5x + 28) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ do $x^2 + 5x + 28 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{87}{4} > 0, \forall x$

Câu 18. $\left(x^2-2x\right)^2 + 3(x-1) = x(2x-1) \Leftrightarrow \left(x^2-2x\right)^2 - 2\left(x^2-2x\right) - 3 = 0$

Đặt $x^2 - 2x = y$ phương trình thành $y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y-3)(y+1) = 0$

Thay $y = x^2 - 2x$ vào ta có tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1; 1; 3\}$.

Câu 19. Đặt $2x^2 - x = u$ phương trình trở thành :

$u^2 + u - 12 = 0 \Leftrightarrow (u-3)(u+4) = 0 \Leftrightarrow u - 3 = 0$ hoặc $u + 4 = 0$.

* $u - 3 = 0$ ta có $2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1{,}5$.

* $u + 4 = 0$ ta có $2x^2 - x + 4 = 0$ vô nghiệm vì $2x^2 - x + 4 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{31}{8} > 0, \forall x$. Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 1{,}5$.

Câu 20. $\left(x^2-4x+11\right)\left(x^4-8x^2+21\right) = 35 \Leftrightarrow \left[(x-2)^2+7\right]\left[\left(x^2-4\right)^2+5\right] = 35$

$(x-2)^2 \ge 0, \forall x$ và $\left(x^2-4\right)^2 \ge 0, \forall x$ nên vế trái không nhỏ hơn 35.

Ta suy ra $\begin{cases}(x-2)^2 = 0\\ \left(x^2-4\right)^2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow x = 2$. Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$.

Câu 21. Ta có: $5x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^3 + (x^3 + 3.x^2.2 + 3.2^2.x + 2^3) = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^3 = -4x^3$

$\Leftrightarrow x + 2 = -\sqrt[3]{4}.x$

$\Leftrightarrow (1 + \sqrt[3]{4}).x = -2$

<=> x = $\frac{-2}{1+\sqrt[3]{4}}$ Vậy pt đã cho có nghiệm duy nhất x = $\frac{-2}{1+\sqrt[3]{4}}$

Câu 22. Đặt $X = 1005 - x; Y = 1007 - x; Z = 2x - 2012$

Dễ chứng minh với: $X + Y + Z = 0$ thì: $X^3 + Y^3 + Z^3 = 3XYZ$
Phương trình đã cho trở thành:

$$3(1005 - x)(1007 - x)(2x - 2012) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1005 \\ x = 1006 \\ x = 1007 \end{array}\right..$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $x = 1005$, $x = 1006$, $x = 1007$.

Chủ đề 2. Phương trình phân thức

Câu 23. ĐK: $x \neq -\frac{1}{2008}; -\frac{2}{2009}; -\frac{4}{2010}; -\frac{5}{2011}$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương.

$$\frac{1}{2008x+1} + \frac{1}{2011x+5} = \frac{1}{2010x+4} + \frac{1}{2009x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4019x+6}{(2008x+1)(2011x+5)} = \frac{4019x+6}{(2009x+2)(2010x+4)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} 4019x+6=0 \\ \frac{1}{(2008x+1)(2011x+5)} = \frac{1}{(2009x+2)(2010x+4)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = -\frac{6}{4019} \\ (2009x+2)(2010x+4) - (2008x+1)(2011x+5) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{6}{4019} \\ 4019x + 6 = 0 \\ 2x^2 + 5x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{6}{4019} \\ x = -1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có ba nghiệm: $x = -\frac{6}{4019}; x = -1; x = -\frac{3}{2}$.

Câu 24. ĐKXĐ : $x \neq -1$. Đặt $x\left(\frac{5-x}{x+1}\right) = a$; $x + \frac{5-x}{x+1} = b$

Ta có : $a + b = x\left(\frac{5-x}{x+1}\right) + \left(x + \frac{5-x}{x+1}\right) = \frac{5x - x^2 + x^2 + x + 5 - x}{x+1} = 5$

Mà $a.b = 6$ Do đó $\begin{cases} ab = 6 \\ a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \\ \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \end{array} \right.$

Với $a = 2$; $b = 3$ thì $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$

Với $a = 3$; $b = 2$ thì $x^2 - 2x + 3 = 0$ (PT vô nghiệm)

Câu 25.

Ta có:

$$x^2 + \frac{9x^2}{(x-3)^2} = 40 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3x}{x-3}\right)^2 - \frac{6x^2}{x-3} - 40 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2 - 6.\frac{x^2}{x-3} - 40 = 0$$

Đặt $t = \frac{x^2}{x-3}$ ta có phương trình $t^2 - 6t - 40 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 10 \\ t = -4 \end{array} \right.$

$t = 10 \Rightarrow \frac{x^2}{x-3} = 10 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 30 = 0$ vô nghiệm

$t = -4 \Rightarrow \frac{x^2}{x-3} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -6 \end{array} \right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = -2;6$

Câu 26.

Điều kiện: $x \neq 0; x \neq 3+\sqrt{5}; x \neq 3-\sqrt{5}$ $(*)$.

Phương trình biến đổi thành: $\frac{1}{x^2-6x+4} - \frac{1}{x^2-2x+4} = \frac{1}{15x}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x + \frac{4}{x} - 6} - \frac{1}{x + \frac{4}{x} - 2} = \frac{1}{15}$ (1).

Đặt $x + \frac{4}{x} = t$ $(t \neq 2; t \neq 6)$.

PT (1) trở thành: $\frac{1}{t-6} - \frac{1}{t-2} = \frac{1}{15} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -4 \\ t = 12 \end{array} \right.$.

Với $t = -4$ ta có $x + \frac{4}{x} = -4 \Leftrightarrow x = -2$ thỏa mãn (*).

Với $t = 12$ ta có $x + \frac{4}{x} = 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6+4\sqrt{2} \\ x = 6-4\sqrt{2} \end{array} \right.$ thỏa mãn (*).

Câu 27.

Điều kiện: $x \neq \pm 3; x \neq \pm\sqrt{11}; x \neq \pm 2\sqrt{2}; x \neq \pm 3\sqrt{2}$

pt $\Leftrightarrow \frac{6}{x^2-9} - 1 + \frac{4}{x^2-11} - 1 + 1 - \frac{7}{x^2-8} + 1 - \frac{3}{x^2-12} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{15-x^2}{x^2-9}+\frac{15-x^2}{x^2-11}-\frac{15-x^2}{x^2-8}-\frac{15-x^2}{x^2-12}=0 \Leftrightarrow (15-x^2)(\frac{1}{x^2-9}+\frac{1}{x^2-11}-\frac{1}{x^2-8}-\frac{1}{x^2-12})=0$$

$$\Leftrightarrow 15-x^2=0\ (1)\ \text{hoặc}\ \frac{1}{x^2-9}+\frac{1}{x^2-11}-\frac{1}{x^2-8}-\frac{1}{x^2-12}=0\ (2)$$

Giải (1) ta được $x=\pm\sqrt{15}$

$$(2) \Leftrightarrow (2x^2-20)(\frac{1}{x^4-20x^2+99}-\frac{1}{x^4-20x^2+96})=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{10}$$

Kết luận phương trình có nghiệm: $x=\sqrt{15}; x=-\sqrt{15}\ ; x=\sqrt{10}; x=-\sqrt{10}$

Câu 28. ĐK: $x\neq\frac{1}{3}, x\neq-2, x\neq\frac{2}{9}, x\neq\frac{5}{4}$

Ta có pt: $\frac{5x+3}{(3x-1)(2x+4)}=\frac{5x+3}{(9x-2)(5-4x)}$

$$<=>\left[\begin{array}{l} x=\frac{-3}{5} \\ (3x-1)(2x+4)=(9x-2)(5-4x) \end{array}\right. <=>\left[\begin{array}{l} x=-\frac{3}{5} \\ 6x^2+12x-2x-4=-36x^2+45x+8x-10 \end{array}\right.$$

$$<=>\left[\begin{array}{l} x=-\frac{3}{5}(TM) \\ x=\frac{6}{7}(TM) \\ x=\frac{1}{6}(TM) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã có có 3 nghiệm phân biệt như trên.

Câu 29. a) Điều kiện : $x\neq 2$; $x\neq 3$; $x\neq 4$; Phân tích các mẫu thành nhân tử ta có

$$\frac{3}{(x-2)(x-3)}-\frac{4}{(x-3)(x-4)}=\frac{5}{(x-2)(x-4)}+\frac{14}{(x-2)(x-3)(x-4)}$$

Quy đồng và khử mẫu được phương trình

$3(x-4)-4(x-2)=5(x-3)+14$

$\Leftrightarrow\ 3x-12-4x+8=5x-15+14 \Leftrightarrow x=-0{,}5$ thỏa mãn ĐKXĐ.

b) ĐKXĐ : $x\notin\{-1;-2;-3;...;-19;-20\}$.

Nhận xét: với $n\in N$ thì $\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}=\frac{(x+n+1)-(x+n)}{(x+n)(x+n+1)}=\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}$

Biến đổi phương trình đã cho thành : $\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+...+\frac{1}{(x+19)(x+20)}=\frac{19}{42}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+...+\frac{1}{x+19}-\frac{1}{x+20}=\frac{19}{42}$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+20}=\frac{19}{42}$. Quy đồng và khử mẫu được phương trình

$x^2 + 21x - 22 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+22) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -22 \end{array}\right.$ thỏa mãn ĐKXĐ

c) ĐKXĐ : $x \notin \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$

Nhận xét : với $n \in \mathbb{N}$ ta có

$$\frac{2}{(x+n)(x+n-2)} = \frac{(x+n)-(x+n-2)}{(x+n)(x+n-2)} = \frac{1}{x+n-2} - \frac{1}{x+n}$$

Biến đổi phương trình đã cho thành :

$$\frac{2}{x(x-2)} + \frac{2}{(x-2)(x-4)} + \ldots + \frac{2}{(x-8)(x-10)} = \frac{5}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-2} + \ldots + \frac{1}{x-10} - \frac{1}{x-8} = \frac{5}{12} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{x-10} - \frac{1}{x} = \frac{5}{12}$$

Quy đồng và khử mẫu được phương trình $x^2 - 10x - 24 = 0$

$\Leftrightarrow (x-12)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12 \\ x = -2 \end{array}\right.$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Câu 30. Ta có thể vận dụng các bước để giải. Nếu quy đồng mẫu ngay sẽ xuất hiện các đa thức bậc ba, việc thực hiện sẽ dài .Tuy nhiên có phương pháp khá sáng tạo và ngắn gọn như sau :

* ĐKXĐ : $x \neq 2; x \neq 3$. Biến đổi phương trình thành :

$$\frac{(x^2-4x+4)+2}{x-2} + \frac{(x^2-6x+9)+3}{x-3} = (2x-5) - \frac{x^2-24}{(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow (x-2) + \frac{2}{x-2} + (x-3) + \frac{3}{x-3} = (2x-5) - \frac{x^2-24}{(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} + \frac{x^2-24}{(x-2)(x-3)} = 0$$

Quy đồng và khử mẫu được phương trình $x^2 + 5x - 36 = 0$

$\Leftrightarrow (x+9)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = -9$ hoặc $x = 4$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Câu 31. ĐKXĐ : $2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3) \neq 0$ khi $x \neq 1$ và $x \neq 1{,}5$

$2x^2 + x + 3 = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} > 0, \forall x$. Do $x = 0$ không là nghiệm của phương trình , đặt $2x + \frac{3}{x}$ $= t$: PT $\Leftrightarrow \dfrac{2}{2x-5+\frac{3}{x}} + \dfrac{13}{2x+1+\frac{3}{x}} = 6 \Leftrightarrow \dfrac{2}{t-5} + \dfrac{13}{t+1} = 6$. ĐKXĐ $t \neq 5$ và $t \neq -1$.

$\Leftrightarrow 6t^2 - 39t + 33 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(6t-33) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 5{,}5 \end{array}\right.$

Ta có $\left[\begin{array}{l} 2x+\dfrac{3}{x}=1 \\ 2x+\dfrac{3}{x}=\dfrac{11}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x^2-x+3=0. & (1) \\ 4x^2-11x+6=0. & (2) \end{array}\right.$

(1) vô nghiệm vì $2x^2 - x + 3 = 2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{23}{8}>0, \forall x$

(2) $\Leftrightarrow$ $(x - 2)(4x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = \dfrac{3}{4}$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 2$; $x = \dfrac{3}{4}$.

Câu 32. Từ $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \Rightarrow a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

Áp dụng để giải phương trình. Ta có ĐKXĐ : $x \neq 1$

PT $\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{x}{x-1}\right)^3-3x.\dfrac{x}{x-1}\left(x+\dfrac{x}{x-1}\right)+\dfrac{3x^2}{x-1}-2=0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)^3-3\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)^2+3\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)-1-1=0$. Đặt $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ ta có

$y^3 - 3y^2 + 3y - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)^3 = 1 \Leftrightarrow y = 2.$

Hay là $\dfrac{x^2}{x-1}=2 \Rightarrow x^2 = 2x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$

Phương trình đã cho vô nghiệm vì $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0 \quad \forall x.$

Câu 33. ĐKXĐ: $x \in R$ do $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \neq 0; \forall x.$

Đặt $x^2 - 4x + 5 = y$ thì $y \geq 1$ và $-x^2 + 4x - 1 = -y + 4$. Phương trình thành

$\dfrac{5}{y}-y+4=0 \Leftrightarrow 5 - y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow (y - 5)(y + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=5 \\ y=-1\,(\text{loại}) \end{array}\right.$

* $x^2 - 4x + 5 = 5 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 4$. Tập nghiệm $S = \{0; 4\}$.

Câu 34. ĐKXĐ $x \notin \{2;3;4;5;6\}$

PT $\Leftrightarrow \dfrac{1}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{1}{(x-3)(x-4)}+\dfrac{1}{(x-4)(x-5)}+\dfrac{1}{(x-5)(x-6)}=\dfrac{1}{8}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{x-6}-\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{1}{8}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x-6}-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{8} \Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 10) = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 10$. Tập nghiệm $S = \{-2; 10\}$.

Câu 35. ĐKXĐ : $x \neq \dfrac{4}{7}$ và $x^3 \neq -2$.

$\dfrac{x\left(x^2-56\right)}{4-7x}-\dfrac{21x+22}{x^3+2}=4 \Leftrightarrow \dfrac{x\left(x^2-56\right)}{4-7x}-5+1-\dfrac{21x+22}{x^3+2}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3-56x-20+35x}{4-7x}+\frac{x^3+2-21x-22}{x^3+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-21x-20\right)\left(\frac{1}{4-7x}+\frac{1}{x^3+2}\right)=0$$

* Xét $x^3 - 21x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 5)(x + 4) = 0$ ta tìm được :

$x = -4; x = -1$; $x = 5$ thỏa mãn ĐKXĐ.

* Xét $\frac{1}{4-7x}+\frac{1}{x^3+2}=0$ biến đổi thành $x^3 - 7x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x+3) = 0$ ta tìm được $x = -3; x = 1$; $x = 2$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-4; -3; -1; 1; 2; 5\}$.

Câu 36. ĐKXĐ : $x \neq \pm 1$.

$\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}=\frac{2x}{x^2-1} \Rightarrow x^2(x+1) - x^2(x-1) = 2x \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$. Loại $x = 1$.

$\Leftrightarrow$ Tập nghiệm $S = \{0\}$..

Câu 37. ĐKXĐ : $x \neq 0$ và $x \neq -1$.

$$\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}=2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}-1=1-\frac{3}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x^2}=\frac{x^2-x}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{(1-x)\left[(1+x)^3+x^3\right]}{x^2(x+1)^2}=0$$

Với $x \neq 0$ và $x \neq -1$ thì $(1-x)\left[(1+x)^3+x^3\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-x=0\\(1+x)^3+x^3=0\end{array}\right.$

*Với $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ thỏa mãn ĐKXĐ.

*Với $(1+x)^3 + x^3 = 0 \Leftrightarrow (1+x)^3 = -x^3 \Leftrightarrow 1 + x = -x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Tập nghiệm là $S = \left\{-\frac{1}{2};1\right\}$.

Câu 38. ĐKXĐ : $\forall x \in R$

Đặt $x^2 - 2x + 2 = t > 0$ phương trình trở thành $\frac{t-1}{t}+\frac{t}{t+1}=\frac{7}{6}$

$\Rightarrow 5t^2 - 7t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(5t+3) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ (do $t > 0$)

Hay $x^2 - 2x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hặc $x = 2$.

Tập nghiệm là $S = \{0; 2\}$.

Câu 39. a) Điều kiện $x \neq -5$

Ta viết lại phương trình thành $\left(x-\frac{5x}{x+5}\right)^2+\frac{10x^2}{x+5}-11=0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+5}\right)^2+\frac{10x^2}{x+5}-11=0$. Đặt

$t=\frac{x^2}{x+5}$ thì phương trình có dạng $t^2+10t-11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-11 \end{array}\right.$

Nếu $t=1$ ta có: $\frac{x^2}{x+5}=1 \Leftrightarrow x^2-x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$. Nếu $t=-11 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+5}=-11$

$\Leftrightarrow x^2+11x+55=0$ phương trình vô nghiệm.

b) Để ý rằng nếu x là nghiệm thì $x \neq 0$ nên ta chia cả tử số và mẫu số vế trái cho x thì thu được: $\frac{12}{x+4+\frac{2}{x}}-\frac{3}{x+2+\frac{2}{x}}=1$. Đặt $t=x+\frac{2}{x}+2$ thì phương trình trở thành:

$\frac{12}{t+2}-\frac{3}{t}=1 \Leftrightarrow 12t-3t-6=t^2+2t \Leftrightarrow t^2-7t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=6 \end{array}\right.$.

Với $t=1$ ta có: $x+\frac{2}{x}+2=1 \Leftrightarrow t^2+t+2=0$ vô nghiệm. Với $t=6$ ta có:

$x+\frac{2}{x}+2=6 \Leftrightarrow x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{2}$.

c) $\left(\frac{x}{x+2}-(x+2)\right)^2-(2x-1)^2=0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+2}+x-3\right)\left(\frac{x}{x+2}-3x-1\right)=0$.

Giải 2 phương trình ta thu được các nghiệm là $x=\pm\sqrt{6}; x=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$.

d) Sử dụng HĐT $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ ta viết lại phương trình thành:

$x^3+\frac{x^3}{(x-1)^3}+\frac{3x^2}{x-1}-2=0 \Leftrightarrow \left[x+\frac{x}{x-1}\right]^3-3\frac{x^2}{x-1}\left(x+\frac{x}{x-1}\right)+\frac{3x^2}{x-1}-2=0$ hay

$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^3-3\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2+\frac{3x^2}{x-1}-2=0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1}-1\right)^3=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1}-1=1 \Leftrightarrow x^2-2x+2=0$. Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 40. Điều kiện $x \notin \{-1;-2;-3;-4;0\}$. Ta biến đổi phương trình thành

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}\right)+\frac{1}{x+2}=0\Leftrightarrow\frac{2(x+2)}{x^2+4x}+\frac{2(x+2)}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x+2}=0$$

$\Leftrightarrow\frac{1}{x^2+4x}+\frac{1}{x^2+4x+3}+\frac{1}{2(x^2+4x+4)}=0$. Đặt $u=x^2+4x$, phương trình trở thành

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{u+3}+\frac{1}{2(u+4)}=0\Leftrightarrow\frac{5u^2+25u+24}{2u(u+3)(u+4)}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=\frac{-25+\sqrt{145}}{10}\\u=\frac{-25-\sqrt{145}}{10}\end{array}\right..$$

Do đó $\left[\begin{array}{l}x^2+4x=\frac{-25+\sqrt{145}}{10}\\x^2+4x=\frac{-25-\sqrt{145}}{10}\end{array}\right.$. Tìm được tập nghiệm của phương trình là

$$S=\left\{-2-\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}};-2+\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}};-2+\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}};-2-\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}}\right\}.$$

Câu 41. Biến đổi phương trình thành $\frac{5}{x-1}+\frac{-5}{x+1}-\frac{10}{x+2}+\frac{10}{x+2}=-\frac{8}{3}\Leftrightarrow\frac{10}{x^2-1}-\frac{40}{x^2-4}=-\frac{8}{3}$.

Đặt $u=x^2\left(u\neq1,u\neq4;u\geq0\right)$ dẫn đến phương trình

$4u^2-65u+16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=16\\u=\frac{1}{4}\end{array}\right.$. bTìm được tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-\frac{1}{2};-4;\frac{1}{2};4\right\}$.

Câu 42. Điều kiện $x\notin\{-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$. Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x+1}{x(x+2)}+\frac{x+6}{(x+5)(x+7)}=\frac{x+2}{(x+1)(x+3)}+\frac{x+5}{(x+4)(x+6)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x+1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{x+6}{2}\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+7}\right)=\frac{x+2}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)+\frac{x+5}{x}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+6}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+7}\right)+\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}\right)=\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+6x}\right)+\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)$$

$$\Leftrightarrow(2x+7)\left(\frac{1}{x^2+7}+\frac{1}{x^2+7x+10}-\frac{1}{x^2+7x+6}-\frac{1}{x^2+7x+12}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{7}{2}\\\frac{1}{x^2+7x}+\frac{1}{x^2+7x+10}+\frac{1}{x^2+7x+6}-\frac{1}{x^2+7x+12}=0(*)\end{array}\right..$$

Đặt $u = x^2 + 7x$ thì phương trình (*) có dạng

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{u+10}+\frac{1}{u+6}+\frac{1}{u+12}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+6}\right)+\left(\frac{1}{u+10}-\frac{1}{u+12}\right)=0 \Leftrightarrow u^2+18u+90=0.$$

Mặt khác $u^2+18u+90=(u+9)^2+9>0$ với mọi u. Do đó phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\frac{7}{2}$.

Câu 43. Điều kiện $x \notin \{-4;-3;-2;-1\}$. Biến đổi phương trình thành

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+3}-\frac{4}{x+4}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x+1}-\frac{4}{x+4}\right)+\left(\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{3}{x^2+5x+4}+\frac{1}{x^2+5x+6}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \dfrac{3}{x^2+5x+4}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}=0(*) \end{array}\right..$$

Đặt $u = x^2+5x$ thì phương trình (*) trở thành $\frac{3}{u+4}+\frac{1}{u+6}=0 \Leftrightarrow u=-\frac{11}{2}$. Từ đó ta có

$$2x^2+10x+11=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{0;\frac{-5-\sqrt{3}}{2};\frac{-5+\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Câu 44. Do $x=0$ không là nghiệm của phương trình nên chia cả tử và mẫu của mỗi phân thức ở vế trái của phương trình cho x, rồi đặt $y=4x+\frac{7}{x}$ ta được

$$\frac{4}{y-8}+\frac{3}{y-10}=1.$$

Phương trình trên có 2 nghiệm $y=16, y=9$.

Với $y=9$ thì $4x+\frac{7}{x}=9 \Leftrightarrow 4x^2-9x+7=0$. Phương trình này vô nghiệm.

Với $y=16$ thì $4x+\frac{7}{x}=16 \Leftrightarrow 4x^2-16x+7=0$. Phương trình này có hai nghiệm $x_1=\frac{1}{2}; x_2=\frac{7}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right\}$.

Câu 45. Điều kiện $x \neq -2$. Khử mẫu thức ta được phương trình tương đương:

$$3x^4+6x^3-16x^2-36x-12=0 \Leftrightarrow 3x^4+6x\left(x^2-6\right)-16x^2-12=0.$$

đặt $t=x^2-6$ thì $t^2=x^4-12x^2+36$, suy ra $3x^4=3t^2+36x^2-108$, PT trên thành

$3t^2+6xt+20t=0\Leftrightarrow t(3t+6x+20)=0\Leftrightarrow t=0$ hoặc $3t=-6x-20$. Với $t=0$ thì $x^2-6=0$, suy ra $x=\pm\sqrt{6}$ (thỏa mãn đk). Với $3t=-6x-20$ ta có $3x^2-18=-6x-20$ hay $3x^2+6x+2=0$ suy ra $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$ (thỏa mãn đk). Vậy tập nghiệm của PT(4) là $S=\left\{\dfrac{-3-\sqrt{3}}{3};-\sqrt{6};\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3};\sqrt{6}\right\}$.

Câu 46. Đặt $t=3x^2+2$ PT(5) trở thành

$\dfrac{2x}{t-5x}+\dfrac{13x}{t+x}=6$. ĐK: $t\neq 5x, t\neq -x$.

Khử mẫu thức ta được PT tương đương

$2t^2-13tx+11x^2=0\Leftrightarrow (t-x)(2t-11x)=0$

$\Leftrightarrow t=x$ hoặc $t=\dfrac{11}{2}x$ (thỏa mãn ĐK)

Với $t=x$ thì $3x^2+2=x\Leftrightarrow 3x^2-x+2=0$ phương trình vô nghiệm.

Với $t=\dfrac{11}{2}x$ thì $3x^2+2=\dfrac{11}{2}x\Leftrightarrow 6x-11x+2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ hoặc $x=\dfrac{4}{3}$.

Vậy tập nghiệm của PT(5) là $\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{4}{3}\right\}$.

Câu 47. Điều kiện $x\neq\pm1$.

Đặt $\dfrac{x-2}{x+1}=y;\dfrac{x+2}{x-1}=z$, PT có dạng: $20y^2+5z^2-20yz=0\Leftrightarrow 5(2y-z)^2=0\Leftrightarrow 2y=z$

Dẫn đến $2.\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{x+2}{x-1}\Leftrightarrow 2(x-2)(x-1)=(x+2)(x+1)$

$\Leftrightarrow 2x^2-6x+4=x^2+3x+2\Leftrightarrow x^2-9x+2=0 \quad\Leftrightarrow x=\dfrac{9+\sqrt{73}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{9-\sqrt{73}}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy tập nghiệm của PT(2) là $\left\{\dfrac{9-\sqrt{73}}{2};\dfrac{9+\sqrt{73}}{2}\right\}$

Chủ đề 3. Phương trình có dấu giá trị tuyệt đối

Câu 48.

– Xét $x<2$ ta có phương trình: $-(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)=4\Leftrightarrow -(x^2-4)(x^2-1)=4$

$\Leftrightarrow x^4-5x^2+8=0\Leftrightarrow \left(x^2-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}=0$, (vô nghiệm).

- Xét $x\geq 2$ ta có phương trình: $(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)=4\Leftrightarrow (x^2-4)(x^2-1)=4$

$$\Leftrightarrow x^4-5x^2=0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2-5\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^2=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{5} \end{array}\right. .$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 2$ ta được nghiệm của phương trình là $x=\sqrt{5}$.

Câu 49. Lập bảng xét GTTĐ rồi xét các khoảng :

*Nếu x <– 2 thì PT $\Leftrightarrow$ – x – x – 1– x – 2 = 7 $\Leftrightarrow$ x = $-\dfrac{10}{3}$

*Nếu – 2 $\leq$ x < – 1 thì PT $\Leftrightarrow$ – x – x – 1+ x + 2 = 7 $\Leftrightarrow$ x = – 6 (loại)

*Nếu – 1 $\leq$ x $\leq$ 0 thì PT $\Leftrightarrow$ – x + x + 1+ x + 2 = 7 $\Leftrightarrow$ x = 4 (loại)

*Nếu x > 0 thì PT $\Leftrightarrow$ x + x + 1+ x + 2 = 7 $\Leftrightarrow$ x = $\dfrac{4}{3}$.

Phương trình có hai nghiệm là x = $-\dfrac{10}{3}$ và x = $\dfrac{4}{3}$.

Câu 50. $\left|x^2-1\right|+\left|x^2-4\right|=\left|x^2-1\right|+\left|4-x^2\right| \geq x^2-1+4-x^2=3$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x^2-1)(4-x^2)\geq 0 \Leftrightarrow 1\leq x^2\leq 4 \Leftrightarrow 1\leq |x|\leq 2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2\leq x\leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x\geq 1 \\ x\leq -1 \end{array}\right. \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1\leq x\leq 2 \\ -2\leq x\leq -1 \end{array}\right.$. Nghiệm phương trình là $1\leq x\leq 2$; $-2\leq x\leq -1$

Câu 51. Lập bảng xét GTTĐ rồi xét các khoảng :

* Với $x\leq 0$ phương trình thành – x – 2 + x = 2 $\Leftrightarrow$ 0x = 4 vô nghiệm.

* Với $0<x\leq 2$ phương trình thành x – 2 + x = 2 $\Leftrightarrow$ x = 2 (nhận)

* Với $x>2$ phương trình thành x – x + 2 = 2 $\Leftrightarrow$ 0x + 2 = 2 vô số nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình là $x\geq 2$

Câu 52. Đặt y = $|x-1|$ thì y $\geq$ 0. Phương trình trở thành :

$y^2+2y-8=0 \Leftrightarrow (y-2)(y+4)=0 \Leftrightarrow y=2$ hoặc $y=-4$ (loại).

Vậy $y=2 \Leftrightarrow |x-1|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=2 \\ x-1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Nghiệm của phương trình là x = 3 và x = –1.

Câu 53. * Nếu $x\geq -2{,}5$ thì $|2x+5|=2x+5$ khi ấy $2x+5=x^2+3x-1$

$\Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=2$. Loại $x=-3$

* Nếu $x<-2{,}5$ thì $|2x+5|=-2x-5$ khi ấy $-2x-5=x^2+3x-1$

$\Leftrightarrow x^2+5x+4=0 \Leftrightarrow (x+4)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-4$ hoặc $x=-1$. Loại $x=-1$.

Nghiệm của phương trình là $x=2$ và $x=-4$.

Câu 54. Ta có $|ab|=|a|.|b|$ nên

$|x+1|+|x-1|=1+\left|x^2-1\right| \Leftrightarrow |x+1|.|x-1|-|x+1|-|x-1|+1=0$

$\Leftrightarrow\ (|x+1|-1).(|x-1|-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} |x+1|-1=0 & (1) \\ |x-1|-1=0 & (2) \end{array}\right.$

* (1) $\Leftrightarrow$ x + 1 = ± 1 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$; (2) $\Leftrightarrow$ x – 1 = ± 1 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2; 0; 2\}$

Câu 55. * Khi x = 2005 ; x = 2006 thì vế trái và vế phải đều cùng số trị là1. Do đó x = 2005 và x = 2006 là nghiệm của phương trình.

*Với $x < 2005$ thì $|x-2005| > 0$ và $|x-2006| > 1$

Do đó $|x-2005|^{2006} + |x-2006|^{2006} > 1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

*Với $x > 2006$ thì $|x-2005| > 1$ và $|x-2006| > 0$

Do đó $|x-2005|^{2006} + |x-2006|^{2006} > 1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

* Với $2005 < x < 2006$ thì $0 < x - 2005 < 1$ và $-1 < x - 2006 < 0$

$\Rightarrow |x-2005|^{2006} < |x-2005| = x-2005$ và $|x-2006|^{2006} < |x-2006| = 2006-x$

$\Rightarrow |x-2005|^{2006} + |x-2006|^{2006} < x-2005+2006-x = 1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình là x = 2005 và x = 2006.

Câu 56.

Từ đề bài suy ra $x < 0$

Suy ra $9x - 8 < 0$; $7x - 6 < 0$; $5x - 4 < 0$; $3x - 2 < 0$

Phương trình đã cho trở thành $-9x+8-7x+6-5x+4-3x+2+x=0$

$\Leftrightarrow$ -23x + 20 = 0. Kết luận pt vô nghiệm