

## BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO: SỐ CHÍNH PHƯƠNG

**I- ĐỊNH NGHĨA:** Số chính phương là số bằng bình phương đúng của một số nguyên.

**II- TÍNH CHẤT:**

1- Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng bằng 0, 1, 4, 5, 6, 9; không thể có chữ tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.

2- Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.

3- Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng  $4n$  hoặc  $4n+1$ . Không có số chính phương nào có dạng  $4n+2$  hoặc  $4n+3$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

4- Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng  $3n$  hoặc  $3n+1$ . Không có số chính phương nào có dạng  $3n+2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

5- Số chính phương tận cùng bằng 1, 4 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.

Số chính phương tận cùng bằng 5 thì chữ số hàng chục là 2.

Số chính phương tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.

6- Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4.

Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9

Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25

Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16.

**III- MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG.**

**A- Dạng 1: CHỨNG MINH MỘT SỐ LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG.**

**Bài 1:** Chứng minh rằng mọi số nguyên  $x, y$  thì:

$A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4$  là số chính phương.

**Giải:** Ta có  $A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4$

$$= (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4$$

Đặt  $x^2 + 5xy + 5y^2 = t$  ( $t \in \mathbb{Z}$ ) thì

$$A = (t - y^2)(t + y^2) + y^4 = t^2 - y^4 + y^4 = t^2 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$$

Vì  $x, y, z \in \mathbb{Z}$  nên  $x^2 \in \mathbb{Z}$ ,  $5xy \in \mathbb{Z}$ ,  $5y^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 + 5xy + 5y^2 \in \mathbb{Z}$

Vậy  $A$  là số chính phương.

**Bài 2:** Chứng minh tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng 1 luôn là số chính phương.

**Giải:** Gọi 4 số tự nhiên, liên tiếp đó là  $n, n+1, n+2, n+3$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Ta có:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = n \cdot (n+3)(n+1)(n+2) + 1$$

$$= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 \quad (*)$$

Đặt  $n^2 + 3n = t$  ( $t \in \mathbb{N}$ ) thì  $(*) = t(t+2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$

$$= (n^2 + 3n + 1)^2$$

Vì  $n \in \mathbb{N}$  nên  $n^2 + 3n + 1 \in \mathbb{N}$ . Vậy  $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$  là số chính phương.

**Bài 3:** Cho  $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + k(k+1)(k+2)$

Chứng minh rằng  $4S + 1$  là số chính phương.

**Giải:** Ta có:  $k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4} k(k+1)(k+2) \cdot 4 = \frac{1}{4} k(k+1)(k+2) \cdot [(k+3) - (k-1)]$

$$= \frac{1}{4} k(k+1)(k+2)(k+3) - \frac{1}{4} k(k+1)(k+2)(k-1)$$

$$\Rightarrow 4S = 1.2.3.4 - 0.1.2.3 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + \dots + k(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$- k(k+1)(k+2)(k-1) = k(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$\Rightarrow 4S + 1 = k(k+1)(k+2)(k+3) + 1$$

Theo kết quả bài 2  $\Rightarrow k(k+1)(k+2)(k+3) + 1$  là số chính phương.

**Bài 4:** Cho dãy số 49; 4489; 444889; 44448889; ...

- Dãy số trên được xây dựng bằng cách thêm số 48 vào giữa các chữ số đứng trước và đứng sau nó. Chứng minh rằng tất cả các số của dãy trên đều là số chính phương.

$$\text{Ta có } \underbrace{44 \dots 488 \dots 89}_{\substack{n \text{ chữ số } 4 \quad n-1 \text{ chữ số } 8}} = \underbrace{44 \dots 488 \dots 8}_{\substack{n \text{ chữ số } 4 \quad n \text{ chữ số } 8}} + 1 = \underbrace{44 \dots 4}_{n \text{ chữ số } 4} \cdot 10^n + 8 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ chữ số } 1} + 1$$

$$= 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9} \cdot 10^n + 8 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 1$$

$$= \frac{4 \cdot 10^{2n} - 4 \cdot 10^n + 8 \cdot 10^n - 8 + 9}{9} = \frac{4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1}{9}$$

$$= \left( \frac{2 \cdot 10^n + 1}{3} \right)^2$$

Ta thấy  $2 \cdot 10^n + 1 = \underbrace{200 \dots 01}_{n-1 \text{ chữ số } 0}$  có tổng các chữ số chia hết cho 3 nên nó chia hết cho 3

$$\Rightarrow \left( \frac{2 \cdot 10^n + 1}{3} \right)^2 \in \mathbb{Z} \text{ hay các số có dạng } 44 \dots 488 \dots 89 \text{ là số chính phương.}$$

**Các bài tương tự:**

Chứng minh rằng số sau đây là số chính phương.

$$A = \underbrace{11 \dots 1}_{2n \text{ chữ số } 1} + \underbrace{44 \dots 4}_{n \text{ chữ số } 4} + 1$$

$$B = \underbrace{11 \dots 1}_{2n \text{ chữ số } 1} + \underbrace{11 \dots 1}_{n+1 \text{ chữ số } 1} + \underbrace{66 \dots 6}_{n \text{ chữ số } 6} + 8$$

$$C = \underbrace{44 \dots 4}_{\dots} + \underbrace{22 \dots 2}_{\dots} + \underbrace{88 \dots 8}_{\dots} + 7$$

$$D = \underbrace{22499 \dots 9100 \dots 09}_{\substack{2n \text{ chữ số } 4 \quad n+1 \text{ chữ số } 2 \quad n \text{ chữ số } 8}}$$

$$E = \underbrace{11 \dots 155 \dots 56}_{\substack{n-2 \text{ chữ số } 9 \quad n \text{ chữ số } 0}}$$

$$E = \underbrace{11 \dots 155 \dots 56}_{\substack{n \text{ chữ số } 1 \quad n-1 \text{ chữ số } 5}}$$

Kết quả:  $A = \left(\frac{10^n + 2}{3}\right)^2$ ;  $B = \left(\frac{10^n + 8}{3}\right)^2$ ;  $C = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 7}{3}\right)^2$

$$D = (15 \cdot 10^n - 3)^2 \quad E = \left(\frac{10^n + 2}{3}\right)^2$$

**Bài 5:** Chứng minh rằng tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không thể là một số chính phương.

Gọi 5 số tự nhiên liên tiếp đó là  $n - 2, n - 1, n + 1, n + 2$  ( $n \in \mathbb{N}, n > 2$ ).

$$\text{Ta có } (n - 2)^2 + (n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = 5 \cdot (n^2 + 2)$$

Vì  $n^2$  không thể tận cùng bởi 3 hoặc 8 do đó  $n^2 + 2$  không thể chia hết cho 5  
 $\Rightarrow 5 \cdot (n^2 + 2)$  không là số chính phương hay A không là số chính phương.

**Bài 6:** Chứng minh rằng số có dạng  $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$  trong đó  $n \in \mathbb{N}$  và  $n > 1$  không phải là số chính phương.

$$\begin{aligned} n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 &= n^2 \cdot (n^4 - n^2 + 2n + 2) = n^2 \cdot [n^2(n-1)(n+1) + 2(n+1)] \\ &= n^2[(n+1)(n^3 - n^2 + 2)] = n^2(n + 1) \cdot [(n^3 + 1) - (n^2 - 1)] \\ &= n^2(n + 1)^2 \cdot (n^2 - 2n + 2) \end{aligned}$$

$$\text{Với } n \in \mathbb{N}, n > 1 \text{ thì } n^2 - 2n + 2 = (n - 1)^2 + 1 > (n - 1)^2$$

$$\text{Và } n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n - 1) < n^2$$

Vậy  $(n - 1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2 \Rightarrow n^2 - 2n + 2$  không phải là một số chính phương.

**Bài 7:** Cho 5 số chính phương bất kỳ có chữ số hàng chục khác nhau còn chữ số hàng đơn vị đều là 6. Chứng minh rằng tổng các chữ số hàng chục của 5 số chính phương đó là một số chính phương.

Ta biết một số chính phương có chữ số hàng đơn vị là 6 thì chữ số hàng chục của nó là số lẻ. Vì vậy chữ số hàng chục của 5 số chính phương đó là 1,3,5,7,9 khi đó tổng của chúng bằng  $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$  là số chính phương.

**Bài 8:** Chứng minh rằng tổng bình phương của 2 số lẻ bất kỳ không phải là số chính phương.

$$a \text{ và } b \text{ lẻ nên } a = 2k + 1, \quad b = 2m + 1 \text{ (Với } k, m \in \mathbb{N}\text{)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a^2 + b^2 &= (2k + 1)^2 + (2m + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 + 4m + 1 \\ &= 4(k^2 + k + m^2 + m) + 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \text{ không thể là số chính phương.}$$

**Bài 9:** Chứng minh rằng nếu  $p$  là tích của  $n$  (với  $n > 1$ ) số nguyên tố đầu tiên

thì  $p - 1$  và  $p + 1$  không thể là các số chính phương.

Vì  $p$  là tích của  $n$  số nguyên tố đầu tiên nên  $p \not\equiv 2$  và  $p$  không thể chia hết cho 4 (1)

a- Giả sử  $p + 1$  là số chính phương. Đặt  $p + 1 = m^2$  ( $m \in \mathbb{N}$ ).

Vì  $p$  chẵn nên  $p + 1$  lẻ  $\Rightarrow m^2$  lẻ  $\Rightarrow m$  lẻ.

Đặt  $m = 2k + 1$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Ta có  $m^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow p + 1 = 4k^2 + 4k + 1$

$\Rightarrow p = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1) : 4$  mâu thuẫn với (1).

$\Rightarrow p + 1$  không phải là số chính phương.

b-  $p = 2.3.5 \dots$  là số chia hết cho 3  $\Rightarrow p - 1$  có dạng  $3k + 2$ .

$\Rightarrow p - 1$  không là số chính phương.

Vậy nếu  $p$  là tích  $n$  ( $n > 1$ ) số nguyên tố đầu tiên thì  $p - 1$  và  $p + 1$  không là số chính phương.

**Bài 10:** Giả sử  $N = 1.3.5.7 \dots 2007.2011$

Chứng minh rằng trong 3 số nguyên liên tiếp  $2N - 1$ ,  $2N$  và  $2N + 1$  không có số nào là số chính phương.

a-  $2N - 1 = 2.1.3.5.7 \dots 2011 - 1$

Có  $2N : 3 \Rightarrow 2N - 1 = 3k + 2$  ( $k \in \mathbb{N}$ )

$\Rightarrow 2N - 1$  không là số chính phương.

b-  $2N = 2.1.3.5.7 \dots 2011 \Rightarrow 2N$  chẵn.

$\Rightarrow N$  lẻ  $\Rightarrow N$  không chia hết cho 2 và  $2N : 2$  nhưng  $2N$  không chia hết cho 4.

$2N$  chẵn nên  $2N$  không chia cho 4 dư 1 hoặc dư 3  $\Rightarrow 2N$  không là số chính phương.

c-  $2N + 1 = 2.1.3.5.7 \dots 2011 + 1$

$2N + 1$  lẻ nên  $2N + 1$  không chia hết cho 4

$2N$  không chia hết cho 4 nên  $2N + 1$  không chia cho 4 dư 1.

$\Rightarrow 2N + 1$  không là số chính phương.

**Bài 11:** Cho  $a = \underbrace{11 \dots 1}_{2010 \text{ chữ số } 1}$ ;  $b = \underbrace{100 \dots 05}_{2009 \text{ chữ số } 0}$

Chứng minh  $\sqrt{ab+1}$  là số tự nhiên.

**Giải:**  $b = \underbrace{100 \dots 05}_{2009 \text{ chữ số } 0} = \underbrace{100 \dots 0}_{2010 \text{ chữ số } 0} - 1 + 6 = \underbrace{99 \dots 9}_{2010 \text{ chữ số } 9} + 6 = 9a + 6$

$\Rightarrow ab + 1 = a(9a + 6) + 1 = 9a^2 + 6a + 1 = (3a + 1)^2$

$\Rightarrow \sqrt{ab+1} = \sqrt{(3a+1)^2} = 3a+1 \in \mathbb{N}$

## **B. DẠNG 2: TÌM GIÁ TRỊ CỦA BIẾN ĐỂ BIỂU THỨC LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG**

**Bài 1:** Tìm số tự nhiên  $n$  sao cho các số sau là số chính phương

a)  $n^2 + 2n + 12$

b)  $n(n + 3)$

c)  $13n + 3$

d)  $n^2 + n + 1589$

Giải:

a) Vì  $n^2 + 2n + 12$  là số chính phương nên đặt  $n^2 + 2n + 12 = k^2$  ( $k \in \mathbb{N}$ )

$$\Rightarrow (n^2 + 2n + 1) + 11 = k^2 \Leftrightarrow k^2 - (n + 1)^2 = 11 \Leftrightarrow (k + n + 1)(k - n - 1) = 11$$

Nhận xét thấy  $k + n + 1 > k - n - 1$  và chúng là những số nguyên dương, nên ta có thể viết  $(k +$

$$+ 1)(k - n - 1) = 11.1 \Leftrightarrow \begin{cases} k + n + 1 = 11 \\ k - n - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 6 \\ n = 4 \end{cases}$$

b) Đặt  $n(n + 3) = a^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ )  $\Rightarrow n^2 + 3n = a^2 \Leftrightarrow 4n^2 + 12n = 4a^2$

$$\Leftrightarrow (4n^2 + 12n + 9) - 9 = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow (2n + 3)^2 - 4a^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (2n + 3 + 2a)(2n + 3 - 2a) = 9$$

Nhận xét thấy  $2n + 3 + 2a > 2n + 3 - 2a$  và chúng là những số nguyên dương, nên ta có thể viết

$$(2n + 3 + 2a)(2n + 3 - 2a) = 9.1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2n + 3 + 2a = 9 \\ 2n + 3 - 2a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

c) Đặt  $13n + 3 = y^2$  ( $y \in \mathbb{N}$ )  $\Rightarrow 13(n - 1) = y^2 - 16$

$$\Leftrightarrow 13(n - 1) = (y + 4)(y - 4)$$

$\Rightarrow (y + 4)(y - 4) : 13$  mà 13 là số nguyên tố nên  $y + 4 : 13$  hoặc  $y - 4 : 13$

$\Rightarrow y = 13k \pm 4$  (với  $k \in \mathbb{N}$ )

$$\Rightarrow 13(n - 1) = (13k \pm 4)^2 - 16 = 13k.(13k \pm 8)$$

$$\Rightarrow 13k^2 \pm 8k + 1$$

Vậy  $n = 13k^2 \pm 8k + 1$  (với  $k \in \mathbb{N}$ ) thì  $13n + 3$  là số chính phương

d) Đặt  $n^2 + n + 1589 = m^2$  ( $m \in \mathbb{N}$ )  $\Rightarrow (4n^2 + 1)^2 + 6355 = 4m^2$

$$\Leftrightarrow (2m + 2n + 1)(2m - 2n - 1) = 6355$$

Nhận xét thấy  $2m + 2n + 1 > 2m - 2n - 1 > 0$  và chúng là những số lẻ, nên ta có thể viết  $(2m +$

$$2n + 1)(2m - 2n - 1) = 6355.1 = 1271.5 = 205.31 = 155.41$$

Suy ra  $n$  có thể có các giá trị sau : 1588 ; 316 ; 43 ; 28

### **Bài tương tự :**

Tìm  $a$  để các số sau là những số chính phương

a)  $a^2 + a + 43$

b)  $a^2 + 81$

c)  $a^2 + 31a + 1984$

Kết quả: a) 2; 42; 13

b) 0; 12; 40

c) 12 ; 33 ; 48 ; 97 ; 176 ; 332 ; 565 ; 1728

**Bài 2 :** Tìm số tự nhiên  $n \geq 1$  sao cho tổng  $1! + 2! + 3! + \dots + n!$  là một số chính phương.

Với  $n = 1$  thì  $1! = 1 = 1^2$  là số chính phương

Với  $n = 2$  thì  $1! + 2! = 3$  không là số chính phương

Với  $n = 3$  thì  $1! + 2! + 3! = 1 + 1.2 + 1.2.3 = 9 = 3^2$  là số chính phương

Với  $n \geq 4$  ta có  $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 = 33$  còn  $5!; 6!; \dots; n!$  đều tận cùng bởi 0 do đó  $1! + 2! + 3! + \dots + n!$  có tận cùng bởi chữ số 3 nên nó không phải là số chính phương.

Vậy có 2 số tự nhiên  $n$  thoả mãn đề bài là  $n = 1; n = 3$

**Bài 3:** Có hay không số tự nhiên  $n$  để  $2010 + n^2$  là số chính phương.

Giả sử  $2010 + n^2$  là số chính phương thì  $2010 + n^2 = m^2$  ( $m \in N$ )

Từ đó suy ra  $m^2 - n^2 = 2010 \Leftrightarrow (m + n)(m - n) = 2010$

Như vậy trong 2 số  $m$  và  $n$  phải có ít nhất 1 số chẵn (1)

Mặt khác  $m + n + m - n = 2m \Rightarrow 2$  số  $m + n$  và  $m - n$  cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow m + n$  và  $m - n$  là 2 số chẵn.

$\Rightarrow (m + n)(m - n) : 4$  nhưng 2006 không chia hết cho 4

$\Rightarrow$  Điều giả sử sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên  $n$  để  $2006 + n^2$  là số chính phương.

**Bài 4:** Biết  $x \in N$  và  $x > 2$ . Tìm  $x$  sao cho  $\overline{x(x-1).x(x-1)} = \overline{(x-2)xx(x-1)}$

Đẳng thức đã cho được viết lại như sau:  $\overline{x(x-1)}^2 = \overline{(x-2)xx(x-1)}$

Do vế trái là một số chính phương nên vế phải cũng là một số chính phương.

Một số chính phương chỉ có thể tận cùng bởi một trong các chữ số 0; 1; 4; 5; 6; 9 nên  $x$  chỉ có thể tận cùng bởi một trong các chữ số 1; 2; 5; 6; 7; 0 (1)

Do  $x$  là chữ số nên  $x \leq 9$ , kết hợp với điều kiện đề bài ta có  $x \in N$  và  $2 < x \leq 9$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow x$  chỉ có thể nhận một trong các giá trị 5; 6; 7

Bằng phép thử ta thấy chỉ có  $x = 7$  thoả mãn đề bài, khi đó  $76^2 = 5776$

**Bài 5:** Tìm số tự nhiên  $n$  có 2 chữ số biết rằng  $2n + 1$  và  $3n + 1$  đều là các số chính phương.

Ta có  $10 \leq n \leq 99$  nên  $21 \leq 2n + 1 \leq 199$ . Tìm số chính phương lẻ trong khoảng trên ta được  $2n + 1$  bằng 25; 49; 81; 121; 169 tương ứng với số  $n$  bằng 12; 24; 40; 60; 84

Số  $3n + 1$  bằng 37; 73; 121; 181; 253. Chỉ có 121 là số chính phương.

Vậy  $n = 40$

**Bài 6:** Chứng minh rằng nếu  $n$  là số tự nhiên sao cho  $n + 1$  và  $2n + 1$  đều là các số chính phương thì  $n$  là bội số của 24

Vì  $n + 1$  và  $2n + 1$  là các số chính phương nên đặt  $n + 1 = k^2$ ,  $2n + 1 = m^2$  ( $k, m \in N$ )

Ta có  $m$  là số lẻ  $\Rightarrow m = 2a + 1 \Rightarrow m^2 = 4a(a + 1) + 1$

Mà  $n = \frac{m^2 - 1}{2} = \frac{4a(a + 1)}{2} = 2a(a + 1)$

$\Rightarrow n$  chẵn  $\Rightarrow n + 1$  lẻ  $\Rightarrow k$  lẻ  $\Rightarrow$  đặt  $k = 2b + 1$  (với  $b \in N$ )  $\Rightarrow k^2 = 4b(b + 1) + 1$

$\Rightarrow n = 4b(b + 1) \Rightarrow n : 8$  (1)

Ta có:  $k^2 + m^2 = 3n + 2 \equiv 2 \pmod{3}$

Mặt khác  $k^2$  chia cho 3 dư 0 hoặc 1,  $m^2$  chia cho 3 dư 0 hoặc 1

Nên để  $k^2 + m^2 \equiv 2 \pmod{3}$  thì  $k^2 \equiv 1 \pmod{3}$

$$m^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow m^2 - k^2 : 3 \text{ hay } (2n + 1) - (n + 1) : 3 \Rightarrow n : 3 \quad (2)$$

$$\text{Mà } (8; 3) = 1 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow n : 24$$

**Bài 7:** Tìm tất cả các số tự nhiên  $n$  sao cho số  $2^8 + 2^{11} + 2^n$  là số chính phương

Giả sử  $2^8 + 2^{11} + 2^n = a^2$  ( $a \in \mathbb{N}$ ) thì

$$2^n = a^2 - 48^2 = (a + 48)(a - 48)$$

$$2^p \cdot 2^q = (a + 48)(a - 48) \text{ với } p, q \in \mathbb{N}; p + q = n \text{ và } p > q$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 48 = 2^p \\ a - 48 = 2^q \end{cases} \Rightarrow 2^p \cdot 2^q = 96 \Leftrightarrow 2^q (2^{p-q} - 1) = 2^5 \cdot 3$$

$$\Rightarrow q = 5 \text{ và } p - q = 2 \Rightarrow p = 7$$

$$\Rightarrow n = 5 + 7 = 12$$

Thử lại ta có:  $2^8 + 2^{11} + 2^n = 80^2$

### C.DẠNG 3 : TÌM SỐ CHÍNH PHƯƠNG

**Bài 1 :** Cho  $A$  là số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của  $A$  một đơn vị thì ta được số chính phương  $B$ . Hãy tìm các số  $A$  và  $B$ .

Gọi  $A = \overline{abcd} = k^2$ . Nếu thêm vào mỗi chữ số của  $A$  một đơn vị thì ta có số

$$B = \overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} = m^2 \text{ với } k, m \in \mathbb{N} \text{ và } 32 < k < m < 100$$

$$a, b, c, d = \overline{1;9}$$

$$\Rightarrow \text{Ta có: } \begin{cases} A = \overline{abcd} = k^2 \\ B = \overline{abcd} + 1111 = m^2 \end{cases} \text{ Đúng khi cộng không có nhớ}$$

$$\Rightarrow m^2 - k^2 = 1111 \Leftrightarrow (m - k)(m + k) = 1111 \quad (*)$$

Nhận xét thấy tích  $(m - k)(m + k) > 0$  nên  $m - k$  và  $m + k$  là 2 số nguyên dương.

Và  $m - k < m + k < 200$  nên  $(*)$  có thể viết  $(m - k)(m + k) = 11 \cdot 101$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} m - k = 11 \\ m + k = 101 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 56 \\ n = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2025 \\ B = 3136 \end{cases}$$

**Bài 2:** Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng số gồm 2 chữ số đầu lớn hơn số gồm 2 chữ số sau một đơn vị.

Đặt  $\overline{abcd} = k^2$  ta có  $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$  và  $k \in \mathbb{N}$ ,  $32 \leq k < 100$

$$\text{Suy ra: } 101 \overline{cd} = k^2 - 100 = (k - 10)(k + 10) \Rightarrow k + 10 : 101 \text{ hoặc } k - 10 : 101$$

$$\text{Mà } (k - 10; 101) = 1 \Rightarrow k + 10 : 101$$

$$\text{Vì } 32 \leq k < 100 \text{ nên } 42 \leq k + 10 < 110 \Rightarrow k + 10 = 101 \Rightarrow k = 91$$

$$\Rightarrow \overline{abcd} = 91^2 = 8281$$

**Bài 3:** Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

Gọi số chính phương phải tìm là:  $\overline{aabb} = n^2$  với  $a, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$

Ta có:  $n^2 = \overline{aabb} = 11 \cdot \overline{a0b} = 11 \cdot (100a + b) = 11 \cdot (99a + a + b)$  (1)

Nhận xét thấy  $\overline{aabb} : 11 \Rightarrow a + b : 11$

Mà  $1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$  nên  $1 \leq a + b \leq 18 \Rightarrow a + b = 11$

Thay  $a + b = 11$  vào (1) được  $n^2 = 11^2(9a + 1)$  do đó  $9a + 1$  là số chính phương

Bằng phép thử với  $a = 1; 2; \dots; 9$  ta thấy chỉ có  $a = 7$  thoả mãn  $\Rightarrow b = 4$

Số cần tìm là: 7744

**Bài 4:** Tìm một số có 4 chữ số vừa là số chính phương vừa là một lập phương.

Gọi số chính phương đó là  $\overline{abcd}$ . Vì  $\overline{abcd}$  vừa là số chính phương vừa là một lập phương nên đặt  $\overline{abcd} = x^2 = y^3$  với  $x, y \in \mathbb{N}$

Vì  $y^3 = x^2$  nên  $y$  cũng là một số chính phương.

Ta có:  $1000 \leq \overline{abcd} \leq 9999 \Rightarrow 10 \leq y \leq 21$  và  $y$  chính phương

$\Rightarrow y = 16 \Rightarrow \overline{abcd} = 4096$

**Bài 5:** Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố, căn bậc hai của số đó có tổng các chữ số là một số chính phương.

Gọi số phải tìm là  $\overline{abcd}$  với  $a, b, c, d$  nguyên và  $1 \leq a \leq 9; 0 \leq b, c, d \leq 9$

$\overline{abcd}$  chính phương  $\Rightarrow d \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$

$d$  nguyên tố  $\Rightarrow d = 5$

Đặt  $\overline{abcd} = k^2 < 10000 \Rightarrow 32 \leq k < 100$

$k$  là một số có hai chữ số mà  $k^2$  có tận cùng bằng 5  $\Rightarrow k$  tận cùng bằng 5

Tổng các chữ số của  $k$  là một số chính phương  $\Rightarrow k = 45$

$\Rightarrow \overline{abcd} = 2025$

Vậy số phải tìm là: 2025

**Bài 6:** Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng hiệu các bình phương của số đó và viết số bỏ hai chữ số của số đó nhưng theo thứ tự ngược lại là một số chính phương

Gọi số tự nhiên có hai chữ số phải tìm là  $\overline{ab}$  ( $a, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a, b \leq 9$ )

Số viết theo thứ tự ngược lại  $\overline{ba}$

Ta có  $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = (10a + b)^2 - (10b + a)^2 = 99(a^2 - b^2) : 11 \Rightarrow a^2 - b^2 : 11$

Hay  $(a - b)(a + b) : 11$

Vì  $0 < a - b \leq 8, 2 \leq a + b \leq 18$  nên  $a + b : 11 \Rightarrow a + b = 11$

Khi đó:  $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = 3^2 \cdot 11^2 \cdot (a - b)$

Để  $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2$  là số chính phương thì  $a - b$  phải là số chính phương do đó  $a - b = 1$  hoặc  $a - b = 4$



Nếu  $a - b = 1$  kết hợp với  $a + b = 11 \Rightarrow a = 6, b = 5, \overline{ab} = 65$

Khi đó  $65^2 - 56^2 = 1089 = 33^2$

Nếu  $a - b = 4$  kết hợp với  $a + b = 11 \Rightarrow a = 7,5$  loại

Vậy số phải tìm là 65

**Bài 7:** Cho một số chính phương có 4 chữ số. Nếu thêm 3 vào mỗi chữ số đó ta cũng được một số chính phương. Tìm số chính phương ban đầu.

(Kết quả: 1156)

**Bài 8:** Tìm số có 2 chữ số mà bình phương của số ấy bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

Gọi số phải tìm là  $\overline{ab}$  với  $a, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$

Theo giả thiết ta có:  $\overline{ab} = (a + b)^3$

$$\Leftrightarrow (10a + b)^2 = (a + b)^3$$

$\Rightarrow \overline{ab}$  là một lập phương và  $a + b$  là một số chính phương

Đặt  $\overline{ab} = t^3$  ( $t \in \mathbb{N}$ ),  $a + b = 1^2$  ( $1 \in \mathbb{N}$ )

Vì  $10 \leq \overline{ab} \leq 99 \Rightarrow \overline{ab} = 27$  hoặc  $\overline{ab} = 64$

Nếu  $\overline{ab} = 27 \Rightarrow a + b = 9$  là số chính phương

Nếu  $\overline{ab} = 64 \Rightarrow a + b = 10$  không là số chính phương  $\Rightarrow$  loại

Vậy số cần tìm là  $ab = 27$

**Bài 9 :** Tìm 3 số lẻ liên tiếp mà tổng bình phương là một số có 4 chữ số giống nhau.

Gọi 3 số lẻ liên tiếp đó là  $2n - 1 ; 2n + 1 ; 2n + 3$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

Ta có :  $A = (2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 = 12n^2 + 12n + 11$

Theo đề bài ta đặt  $12n^2 + 12n + 11 = \overline{aaaa} = 1111 \cdot a$  với  $a$  lẻ và  $1 \leq a \leq 9$

$$\Rightarrow 12n(n + 1) = 11(101a - 1)$$

$$\Rightarrow 101a - 1 : 3 \Rightarrow 2a - 1 : 3$$

Vì  $1 \leq a \leq 9$  nên  $1 \leq 2a - 1 \leq 17$  và  $2a - 1$  lẻ nên  $2a - 1 \in \{3; 9; 15\}$

$$\Rightarrow a \in \{2; 5; 8\}$$

Vì  $a$  lẻ  $\Rightarrow a = 5 \Rightarrow n = 21$

3 số cần tìm là: 41; 43; 45

Bài 10 : Tìm số có 2 chữ số sao cho tích của số đó với tổng các chữ số của nó bằng tổng lập phương các chữ số của số đó.

$$\overline{ab} (a + b) = a^3 + b^3$$

$$\Leftrightarrow 10a + b = a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab$$

$$\Leftrightarrow 3a(3 + b) = (a + b)(a + b - 1)$$

$a + b$  và  $a + b - 1$  nguyên tố cùng nhau do đó

$$\begin{cases} a + b = 3a \\ a + b - 1 = 3 + b \end{cases} \quad \text{hoặc}$$

$$\begin{cases} a + b - 1 = 3a \\ a + b = 3 + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 4, b = 8 \quad \text{hoặc}$$

$$a = 3, b = 7$$

Vậy  $\overline{ab} = 48$  hoặc  $\overline{ab} = 37$