

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho a, b, c là các số thực đôi một phân biệt, rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}.$$

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Giải phương trình: $9x^2 = (x^2 + x - 5)(\sqrt{3x+1} - 1)^2.$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 + 2y^3 = 0 \\ \sqrt{2x^3 - x} + 8y^2 + 3y = 4 \end{cases}.$$

Câu 3. (2,5 điểm)

a) Tìm các số nguyên m, n thỏa mãn $m(m+1)(m+2) = n^2.$

b) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y + xy = 3.$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2} + \frac{x+y}{4}.$$

Câu 4. (2,5 điểm).

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB.$ Gọi I là điểm chính giữa cung $AB.$ Trên cung lớn AB của đường tròn tâm I bán kính IA lấy điểm C sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của CA, CB với nửa đường tròn đường kính AB (M khác A, N khác B); J là giao điểm của AN với $BM.$

a) Chứng minh $\triangle MBC$ và $\triangle NAC$ là các tam giác cân.

b) Chứng minh I là trực tâm của tam giác $CMN.$

c) Gọi K là trung điểm của $IJ,$ tính tỉ số $\frac{CJ}{OK}.$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\},$ chia tập hợp X thành hai tập hợp khác rỗng và không có phần tử chung. Chứng minh rằng với mọi cách chia thì luôn tồn tại 3 số a, b, c trong một tập hợp thỏa mãn $a + c = 2b.$

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho a, b, c là các số thực đôi một phân biệt, rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}.$$

Lời giải

Ta biết rằng nếu $x + y + z = 0$ thì $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$ do đó:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) &= (a-b)c^2 - (a^2 - b^2)c + ab(a-b) \\ &= (a-b)[c^2 - (a+b)c + ab] = (a-b)(c-a)(c-b) \\ &= -(a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

Đặt $x = a - b, y = b - c, z = c - a$ khi đó ta có:

$$A = -\frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} = -3.$$

Vậy $A = -3$.

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Giải phương trình: $9x^2 = (x^2 + x - 5)(\sqrt{3x+1} - 1)^2$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 + 2y^3 = 0 \\ \sqrt{2x^3 - x} + 8y^2 + 3y = 4 \end{cases}.$$

Lời giải

a) Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{3}$. Phương trình tương đương:

$$\begin{aligned} 9x^2(\sqrt{3x+1} + 1)^2 &= (x^2 + x - 5)(\sqrt{3x+1} - 1)^2(\sqrt{3x+1} + 1)^2 \\ \Leftrightarrow 9x^2(\sqrt{3x+1} + 1)^2 &= (x^2 + x - 5) \cdot 9x^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x - 5 = (\sqrt{3x+1} + 1)^2 \end{cases} &(1) \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 7 = 2\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 14 = 4\sqrt{3x+1} \\
&\Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 15 + \sqrt{3x+1}(\sqrt{3x+1} - 4) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-5)(2x+3) + \frac{3(x-5)\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4} = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-5)\left(2x+3 + \frac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ 2x+3 + \frac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4} = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Do $x \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow 2x+3 > 0 \Rightarrow 2x+3 + \frac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4} = 0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=0, x=5$.

b) Điều kiện: $2x^3 - x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 0 \\ x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương:

$$\begin{aligned}
x^3 + xy^2 + 2y^3 = 0 &\Leftrightarrow (x^3 + y^3) + (xy^2 + y^3) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) + y^2(x+y) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + 2y^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 - xy + 2y^2 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Với $x = -y$, thay vào phương trình thứ hai ta được: $\sqrt{2x^3 - x} + 8x^2 - 3x - 4 = 0$.

Nếu $\sqrt{2x^3 - x} + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ 2x^3 - x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x(2x+1)(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Với $x = 0$, ta thấy phương trình vô nghiệm và phương trình nhận một nghiệm là $x = -\frac{1}{2}$.

Do đó xét $x \neq -\frac{1}{2}$, phương trình tương đương:

$$\begin{aligned} & \sqrt{2x^3 - x} - x + 8x^2 - 4x - 4 = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{x(2x+1)(x-1)}{\sqrt{2x^3 - x} + x} + 4(2x+1)(x-1) = 0 \\ & \Leftrightarrow (2x+1)(x-1) \left(\frac{x}{\sqrt{2x^3 - x} + x} + 4 \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \frac{x}{\sqrt{2x^3 - x} + x} + 4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{\sqrt{2x^3 - x} + x} + 4 = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{2x^3 - x} = -5x \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -x > 0 \\ 32x^3 - 16x = 25x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x(32x^2 - 16x - 25) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 32x^2 - 16x - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{25 - 9\sqrt{33}}{64}. \end{aligned}$$

Do đó trong trường hợp này hệ cho có ba nghiệm: $(x; y) = (1; -1), \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{25 - 9\sqrt{33}}{64}; -\frac{25 + 9\sqrt{33}}{64}\right)$.

Với $x^2 - xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$. Thử lại thấy không thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có ba nghiệm: $(x; y) = (1; -1), \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{25 - 9\sqrt{33}}{64}; -\frac{25 + 9\sqrt{33}}{64}\right)$.

Câu 3. (2,5 điểm)

a) Tìm các số nguyên m, n thỏa mãn $m(m+1)(m+2) = n^2$.

b) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y + xy = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{9 - y^2} + \frac{x + y}{4}.$$

Lời giải

a) Ta có: $m(m+1)(m+2) = n^2 \Rightarrow m(m+1)(m+2) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ -2 \leq m \leq -1 \end{cases}$.

Với $m \in \{-2; -1; 0\}$ ta đều có $n = 0$.

Xét $m > 0$, ta có: n^2 chia hết cho $m \Rightarrow n$ chia hết cho $m \Rightarrow n = km$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó thay vào phương trình ta được:

$$m(m+1)(m+2) = m^2 k^2 \Leftrightarrow (m+1)(m+2) = mk^2.$$

Vì $\gcd(m; m+1) \Rightarrow k^2$ chia hết cho $(m+1) \Rightarrow k$ chia hết cho $(m+1) \Rightarrow k = l(m+1)$ với $l \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó thay vào phương trình ta được:

$$(m+1)(m+2) = m(m+1)^2 l^2 \Leftrightarrow m+2 = m(m+1)l^2 \Leftrightarrow (m+1)(ml^2 - 1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1=1 \\ ml^2 - 1 = 1 \end{cases}$$

Phương này vô nghiệm vậy do đó $m > 0$ thì không tồn tại m, n nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $(m; n) = (-2; 0), (-1; 0), (0; 0)$.

b) Ta có: $\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2} \leq \sqrt{2(9-x^2+9-y^2)} = \sqrt{2[18-(x^2+y^2)]}$.

Mặt khác $2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2 \Rightarrow \sqrt{2[18-(x^2+y^2)]} \leq \sqrt{36-(x+y)^2}$.

Đặt $t = x+y \Rightarrow \sqrt{36-(x+y)^2} = \sqrt{36-t^2}$. Suy ra: $P \leq \sqrt{36-t^2} + \frac{t}{4}$.

Ta lại có: $\sqrt{36-t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(12-2t)(6+t)} \leq \frac{12-2t+6+t}{2\sqrt{2}} = \frac{18-t}{2\sqrt{2}}$.

Do đó: $P \leq \frac{18-t}{2\sqrt{2}} + \frac{t}{4} = \frac{18\sqrt{2} + (1-\sqrt{2})t}{4}$.

Ta có: $3 = x+y+xy \Rightarrow 4 = (x+1)(y+1) \Rightarrow 4 = 2\sqrt{(x+1)(y+1)} \leq x+y+2 \Rightarrow x+y \geq 2$, hay $t \geq 2$.

Chú ý $1-\sqrt{2} < 0$ nên $P \leq \frac{18\sqrt{2} + 2(1-\sqrt{2})}{4} = \frac{1+8\sqrt{2}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 2$ hay $x = y = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1+8\sqrt{2}}{2}$ đạt được khi $x = y = 1$.

Câu 4. (2,5 điểm).

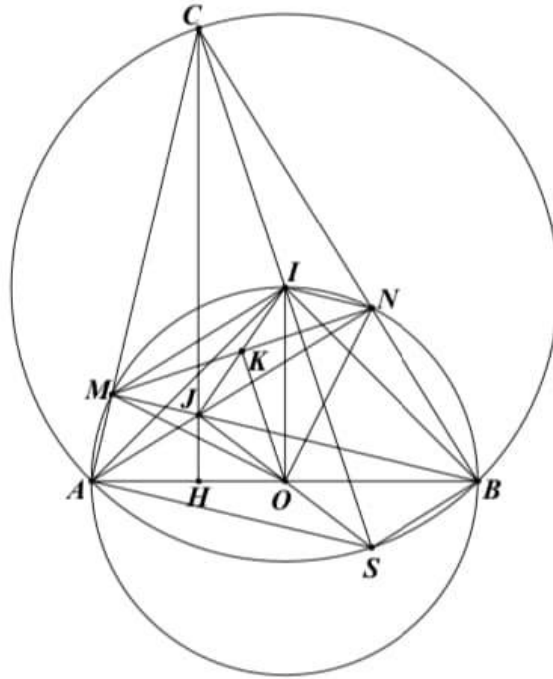
Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Gọi I là điểm chính giữa cung AB . Trên cung lớn AB của đường tròn tâm I bán kính IA lấy điểm C sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của CA, CB với nửa đường tròn đường kính AB (M khác A, N khác B); J là giao điểm của AN với BM .

a) Chứng minh $\triangle MBC$ và $\triangle NAC$ là các tam giác cân.

b) Chứng minh I là trực tâm của tam giác CMN .

c) Gọi K là trung điểm của IJ , tính tỉ số $\frac{CJ}{OK}$.

Lời giải



a) Vì I là điểm chính giữa cung AB nên tam giác IAB vuông cân tại I .

Khi đó: $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AIB = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$, hay $\angle ACN = 45^\circ$.

Mặt khác $\angle ANC = 180^\circ - \angle ANB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

$\triangle NAC$ vuông tại N có $\angle ACN = 45^\circ$ nên $\triangle NAC$ vuông cân tại N .

Chứng minh tương tự ta cũng có: $\angle BCM = 45^\circ$ và $\triangle MBC$ vuông tại M nên $\triangle MBC$ vuông cân tại M .

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

b) Ta có: $\angle INC = \angle IAB = 45^\circ$ do cùng phụ với $\angle INB$.

Mà $\angle INA = \angle IBA = 45^\circ$ do đó $\angle INC = \angle INA = 45^\circ$ hay NI là phân giác của tam giác vuông cân NAC .

Do đó $NI \perp AC$ hay $NI \perp MC$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $MI \perp NC$.

Do đó I là trực tâm của tam giác CMN .

c) Do $\angle ANB = \angle AMB = 90^\circ$ nên dễ dàng suy ra J là trực tâm tam giác CAB .

Khi đó ta có $MI \parallel JN$ do cùng vuông góc với BC và $MJ \parallel IN$ do cùng vuông góc với AC .

Từ đó tứ giác $MINJ$ là hình bình hành, suy ra K cũng là trung điểm của MN , dẫn đến $OK \perp MN$.

Gọi S là điểm đối xứng của C qua I , khi đó $\triangle CAB$ nội tiếp đường tròn đường kính CS có J là trực tâm của $\triangle CAB$ nên theo bổ đề quen thuộc thì tứ giác $AJBS$ là hình bình hành, suy ra O, J, S thẳng hàng.

Từ đó OI là đường trung bình của $\triangle CSI \Rightarrow CJ = 2OI = AB$.

Mặt khác $\triangle CMN$ đồng dạng với $\triangle CBA$ nên: $\frac{MN}{AB} = \frac{CN}{CA} = \cos 45^\circ \Rightarrow MN = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $OM^2 + ON^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{2} = MN^2$ nên $\triangle OMN$ vuông cân tại $O \Rightarrow OK = \frac{MN}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{4}$.

Do đó $\frac{CJ}{OK} = \frac{AB}{\frac{AB\sqrt{2}}{4}} = 2\sqrt{2}$.

Vậy $\frac{CJ}{OK} = 2\sqrt{2}$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, chia tập hợp X thành hai tập hợp khác rỗng và không có phần tử chung. Chứng minh rằng với mọi cách chia thì luôn tồn tại 3 số a, b, c trong một tập hợp thỏa mãn $a + c = 2b$.

Lời giải

Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử không tồn tại 3 số a, b, c trong hai tập hợp thỏa mãn $a + c = 2b$. Đặt hai tập hợp đó lần lượt là A và B .

Vì trong mỗi tập hợp không tồn tại ba số a, b, c thỏa mãn $a + c = 2b$ nên bộ số $(1; 5; 9)$ đều không thể cùng thuộc A hoặc B .

Không mất tính tổng quát giả sử $1 \in A$.

Ta xét hai trường hợp:

- $9 \in A$. Suy ra $5 \in B$.

Nếu $7 \in A \Rightarrow 4 \in B$ và $8 \in B \Rightarrow 3 \in A \Rightarrow 2 \in B \Rightarrow 6 \in A$, mâu thuẫn do $(2; 5; 8)$ đều thuộc B .

Nếu $7 \in B \Rightarrow 6 \in A$. Ta xét tiếp hai trường hợp:

+ $3 \in A \Rightarrow 2 \in B \Rightarrow 4 \in B$, mâu thuẫn do $(3; 6; 9)$ đều thuộc A .

+ $3 \in B$, mâu thuẫn do $(3; 5; 7)$ đều thuộc B .

- $9 \in B$. Suy ra $5 \in A \Rightarrow 3 \in B \Rightarrow 6 \in A \Rightarrow 4 \in B \Rightarrow 7 \in B \Rightarrow 2 \in A$ và $8 \in A$ mâu thuẫn do $(2; 5; 8)$ đều thuộc B .

Vậy trong mọi trường hợp đều tồn tại bộ ba số a, b, c trong một tập hợp thỏa mãn $a + c = 2b$.

-----Chúc các bạn học tốt!-----

Like fanpage: <https://www.facebook.com/thuvientoan.net>

Truy cập web để cập nhật tài liệu nhanh nhất: <https://thuvientoan.net/>

<https://thuvientoan.net/>