ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HCM
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU
Đề chính thức

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
Năm học 2021 - 2022
Môn thi: **TOÁN (không chuyên)**
Thời gian: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1. *(1,5 điểm)* Cho biểu thức:

$$P = \frac{a^2 + b\sqrt{ab}}{a + \sqrt{ab}} + \frac{a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 2b\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \quad (a > b > 0)$$

a) Thu gọn biểu thức P.

b) Chứng minh $P > 0$.

Bài 2. *(2 điểm)*

a) Giải phương trình: $(x^2 + 2x - 3)\left(\sqrt{3 - 2x} - \sqrt{x + 1}\right) = 0$.

b) Cho $(d) : y = (m + 1)x + mn$ và $(d_1) : y = 3x + 1$. Tìm m, n biết (d) đi qua $A(0; 2)$, đồng thời (d) song song với (d_1).

Bài 3. *(1,5 điểm)* Cho (P), (d) lần lượt là đồ thị hàm số $y = x^2$ và $y = 2x + m$.

a) Tìm m sao cho (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

b) Tìm m sao cho $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 5$.

Bài 4. *(2 điểm)*

a) Công ty viễn thông gói cước được tính như sau:

- Gói I: 1800 đồng/phút cho 60 phút đầu tiên; 1500 đồng/phút cho 60 phút tiếp theo và 1000 đồng/phút cho thời gian còn lại.
- Gói II: 2000 đồng/phút cho 30 phút đầu tiên; 1800 đồng/ phút cho 30 phút tiếp theo; 1200 đồng/phút cho 30 phút tiếp theo nữa và 800 đồng/phút cho thời gian còn lại.

Sau khi cân nhắc thì bác An chọn gói II vì sẽ tiết kiện được 95000 đồng so với gói I. Hỏi trung bình bác An gọi bao nhiêu phút một tháng?

b) Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. BD là tia phân giác của $\angle ABC$. Tính BD?

Bài 5. *(3 điểm)* Cho $\triangle ABC$ nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (T) có tâm O, bán kính R, $BC = R\sqrt{3}$. Tiếp tuyến tại B, C của (T) cắt nhau tại P. Cát tuyến PA cắt (T) tại D (khác A). Đường thẳng OP cắt BC tại H.

a) Chứng minh $\triangle PBC$ đều. Tính $PA \cdot PD$ theo R.

b) AH cắt (T) tại E (khác A). Chứng minh $HA \cdot HE = HO \cdot HP$ và $PD = PE$.

c) Trên AB lấy điểm I thỏa $AI = AC$, trên AC lấy điểm J thỏa $AJ = AB$. Đường thẳng vuông góc với AB tại I và đường thẳng vuông góc với AC tại J cắt nhau ở K. Chứng minh $IJ = BC$ và $AK \perp BC$. Tính PK theo R.

STAR EDUCATION
Success Through Academic Readiness

– HẾT –

STAR EDUCATION

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 PTNK
Năm học 2021 - 2022
Môn thi: **TOÁN (không chuyên)**

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Bài 1. a) Ta có $a > b > 0$ nên

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2 + b\sqrt{ab}}{a + \sqrt{ab}} + \frac{a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 2b\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^3 + \left(\sqrt{b}\right)^3}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(a - 2\sqrt{ab}\right)}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \\ &= a - \sqrt{ab} + b + a - 2\sqrt{ab} \\ &= 2a - 3\sqrt{ab} + b. \end{aligned}$$

(1đ)

b) Ta có $a > b > 0$ nên $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, do đó

$P = 2a - 3\sqrt{ab} + b = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(2\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) > 0.$ (0,5đ)

Bài 2. a) $(x^2 + 2x - 3)(\sqrt{3 - 2x} - \sqrt{x + 1}) = 0 \quad (*)$

Điều kiện: $\begin{cases} 3 - 2x \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ (0,25đ)

$(*) \Leftrightarrow (x - 1)(x + 3)(\sqrt{3 - 2x} - \sqrt{x + 1}) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x + 3 = 0 \\ 3 - 2x = x + 1 \end{array}\right.$ (0,25đ)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \quad \text{(n)} \\ x = -3 \ \text{(l)} \\ x = \dfrac{2}{3} \quad \text{(l)} \end{array}\right.$ (0,25đ)

Vậy $S = \left\{1; \frac{2}{3}\right\}$ (0,25đ)

b) $(d)//(d_1) \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 = 3 \\ m.n \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$ (0,5đ)

Vì $A(0; 2) \in (d) : y = 3x + 2n \Leftrightarrow 2 = 3.0 + 2n \Leftrightarrow n = 1 \quad \text{(n)}$ (0,5 điểm)

Vậy $m = 2$, $n = 1$

Bài 3. a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$x^2 = 2x + m \Leftrightarrow x^2 - 2x - m = 0 \quad (1)$ (0,25đ)

(P) cắt (d) tại 2 điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 + m > 0$

$\Leftrightarrow m > -1 \ (*)$ (0,25đ)

Vậy $m > -1$ thì (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt.

STAR EDUCATION
Success Through Academic Readiness

b) Với điều kiện $(*)$ theo Viet ta có: $S = x_1 + x_2 = 2$, $P = x_1 \cdot x_2 = -m$ (0,25đ)

Ta có: $A(x_1; y_1) \in (d) \Leftrightarrow y_1 = 2x_1 + m$; $B(x_2; y_2) \in (d) \Leftrightarrow y_2 = 2x_2 + m$

Ta có:

$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 5$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (2x_1 - 2x_2)^2 = 5$ (0,25đ)

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + 4(x_1 - x_2)^2 = 5$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1$

$\Leftrightarrow 4 + 4m = 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{-3}{4}$ (thỏa $(*)$) (0,5đ)

Vậy $m = -\dfrac{3}{4}$

Bài 4. a) Giả sử thời gian gọi trung bình mỗi tháng của bác An là t (phút, $t > 0$).

Gọi $A(x)$, $B(x)$ lần lượt là cước phí khi gọi x phút tương ứng với gói cước I và gói cước II, theo đề bài ta có $A(t) - B(t) = 95000$ (đồng).

Ta có bảng sau:

t	$0 < t \le 30$	$30 < t \le 60$	$60 < t \le 90$	$90 < t \le 120$	$t > 120$
$A(t)$	$1800t$	$1800t$	$1500t + 18000$	$1500t + 1800$	$1000t + 78000$
$B(t)$	$2000t$	$1800t + 6000$	$1200t + 42000$	$800t + 78000$	$800t + 78000$
$A(t) - B(t)$	$-200t$	-6000	$300t - 24000$	$700t - 60000$	$200t$
	loại	loại	$t = \dfrac{1190}{3} > 90$ (l)	$t = \dfrac{1550}{7} > 120$ (l)	$t = 475$ (n)

Vậy trung bình mỗi tháng bác An gọi 475 phút. (1đ)

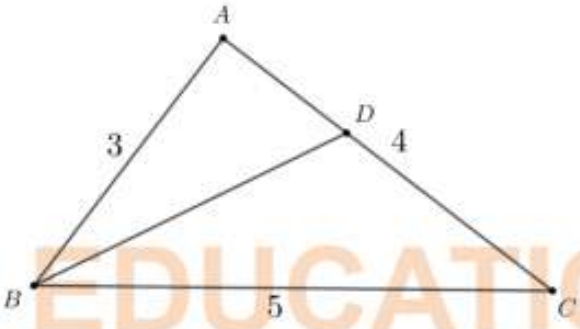
b) Ta có: $3^2 + 4^2 = 5^2$ nên $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Theo định lý Pythagore đảo, tam giác ABC vuông tại A. (0,25đ)

Theo tính chất đường phân giác: $\dfrac{DC}{BC} = \dfrac{DA}{BA}$.

Suy ra $\dfrac{DC}{BC} = \dfrac{DA}{BA} = \dfrac{DC + DA}{BC + BA} = \dfrac{AC}{BA + BC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow AD = \dfrac{1}{2}BA = \dfrac{3}{2}$. (0,5đ)

Tam giác ABD vuông tại A nên: $BD^2 = AD^2 + AB^2 = \dfrac{45}{4} \Rightarrow BD = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. (0,25đ)



STAR EDUCATION
Success Through Academic Readiness

Bài 5. a) • Ta có: $OB = OC$, $PB = PC$ suy ra PO là đường trung trực của BC nên $OP \perp BC$ và H là trung điểm BC.

$\sin \angle HOC = \dfrac{HC}{OC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle HOC = 60^\circ \Rightarrow \angle HCP = \angle HOC = 60^\circ$

$\triangle PBC$ có $PB = PC$ và $\angle BCP = 60^\circ$ suy ra $\triangle PBC$ đều (0,5đ)

- Xét $\triangle PBD$ và $\triangle PAB$ có $\angle BPD$ chung, $\angle PBD = \angle PAB$

  $\Rightarrow \triangle PBD \backsim \triangle PAB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{PB}{PA} = \dfrac{PD}{PB} \Rightarrow PA \cdot PD = PB^2 = 3R^2$ (0,5đ)

b)
- Xét $\triangle HAB$ và $\triangle HCE$ có $\angle AHB = \angle CHE$, $\angle HAB = \angle HCE$

  $\Rightarrow \triangle HAB \backsim \triangle HCE$ (g.g) $\Rightarrow HA \cdot HE = HB \cdot HC = HB^2 = HO \cdot HP$ (0,5đ)

- Xét $\triangle HOA$ và $\triangle HEP$ có $\angle OHA = \angle EHP$, $\dfrac{HO}{HE} = \dfrac{HA}{HP}$

  $\Rightarrow \triangle HOA \backsim \triangle HEP$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle HOA = \angle HEP$, suy ra $AOEP$ là tứ giác nội tiếp.

  Suy ra $\angle HPE = \angle HPD$ (chắn hai cung OE và OA bằng nhau) (1)

  Lại có $PA \cdot PD = PB^2 = PH \cdot PO \Rightarrow \dfrac{PD}{PO} = \dfrac{PH}{PA}$

  $\Rightarrow \triangle PDH \backsim \triangle POA$ (c.g.c) suy ra $OHDA$ nội tiếp.

  Mà $\angle PAO = \angle ODA = \angle AHO = \angle PHE$ nên $\angle PHD = \angle PHE$ (2)

  Từ (1) và (2) suy ra $\triangle HDP = \triangle HEP$ (g.c.g), suy ra $PD = PE$. (0,5đ)

c)
- Xét $\triangle ABC$ và $\triangle AJI$ có $AB = AJ$, $\angle IAC$ chung, $AC = AI$
  nên $\triangle ABC = \triangle AJI \Rightarrow IJ = BC$ (0,25đ)

- Gọi $Q = BC \cap AK$

  Ta có: $\angle AIK = \angle AJK = 90^\circ$ nên $AIKJ$ nội tiếp đường tròn đường kính AK

  $\Rightarrow \angle AKI = \angle AJI$

  Mà $\angle AJI = \angle ABC$ (do $\triangle ABC = \triangle AJI$) nên $\angle AKI = \angle ABC$.

  Tứ giác $BQKI$ có $\angle AKI = \angle ABC$ nên $BQKI$ là tứ giác nội tiếp.

  $\Rightarrow \angle BIK + \angle BQK = 180^\circ \Rightarrow \angle BQK = 180^\circ - \angle BIK = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

  Suy ra $AK \perp BC$. (0,25đ)

- Vì $\triangle ABC = \triangle AIJ$ nên bán kính đường tròn ngoại tiếp của hai tam giác này bằng nhau.

  Mà AK là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AIJ$ nên $AK = 2R$.

  $\triangle OCP$ vuông tại C:

  $\Rightarrow OP^2 = OC^2 + CP^2 = R^2 + \left(R\sqrt{3}\right)^2 = 4R^2$

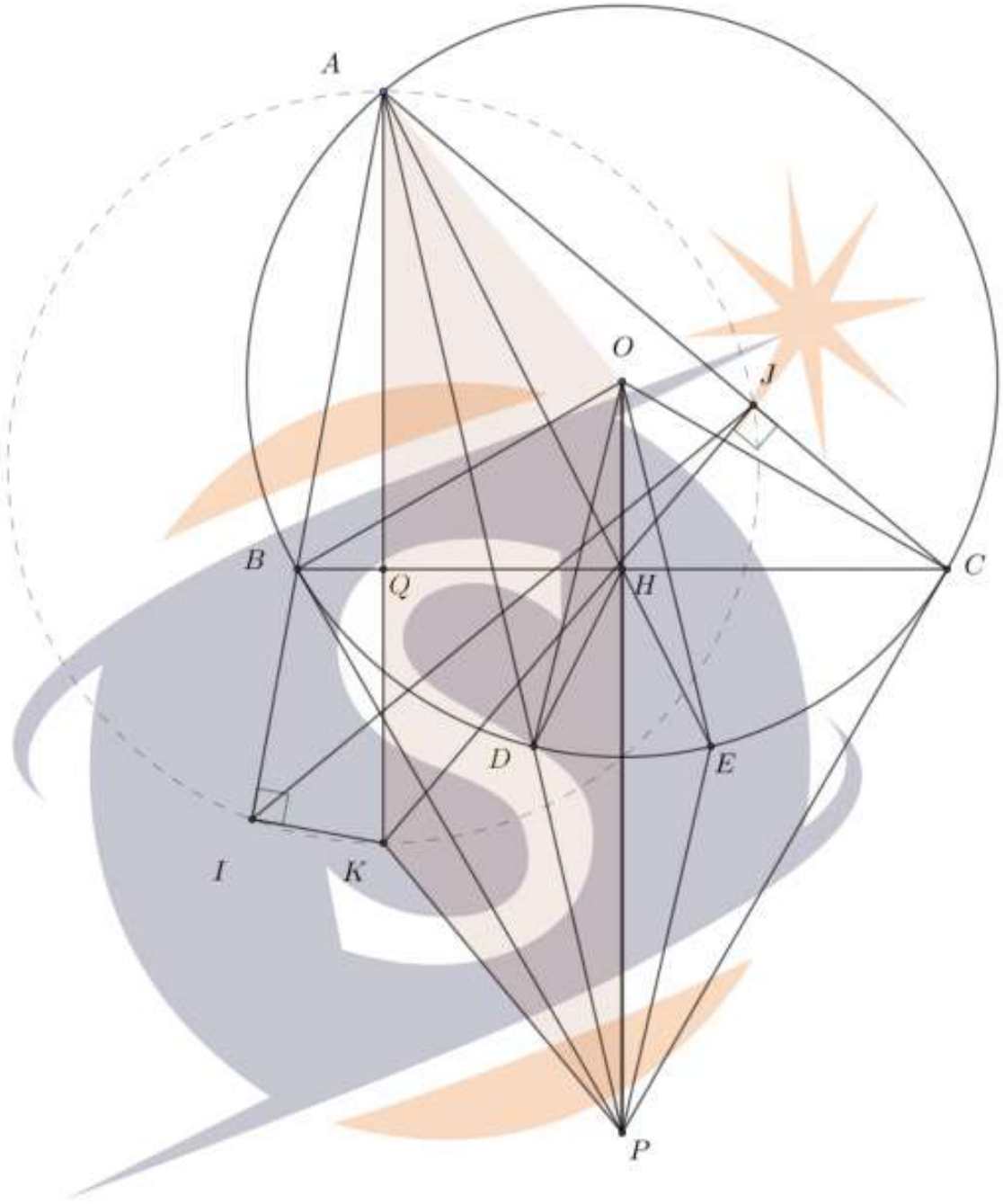
  $\Rightarrow OP = 2R \Rightarrow OP = AK$.

  Ta có: $AK \perp BC$, $OP \perp BC$ nên $AK // OP$.

  Tứ giác $AOPK$ có $AK // OP$ và $AK = OP$ nên $AOPK$ là hình bình hành, suy ra $PK = AO = R$.

  Vậy $PK = R$. (0,5đ)

STAR EDUCATION
Success Through Academic Readiness



Lời giải được thực hiện bởi nhóm giáo viên Star Education: thầy Nguyễn Tăng Vũ, thầy Nguyễn Ngọc Duy, thầy Nguyễn Tấn Phát, cô Bùi Thị Minh Phương, Châu Cẩm Triều, Lê Quốc Anh, Nguyễn Công Thành, Trần Tín Nhiệm

STAR EDUCATION
Success Through Academic Readiness