

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Năm học 2021 - 2022

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 03/6/2021

Thời gian: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1. (1,5 điểm) Rút gọn biểu thức sau:

1) $A = \sqrt{75} - 5\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

2) $B = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$

Bài 2. (1,5 điểm)Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 2x - y = m \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$
1) Giải hệ phương trình đã cho khi $m = 9$.2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ thỏa $x > 0, y < 0$.**Bài 3. (2,0 điểm)**Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 5x + 6$ 1) Vẽ đồ thị (P) .2) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.3) Viết phương trình đường thẳng (d') biết (d') song song (d) và (d') cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 24$.**Bài 4. (1,5 điểm)**

Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn (thuộc đất trong vườn) rộng 1,5m. Tính kích thước của vườn, biết rằng đất còn lại trong vườn để trồng trọt là 4329m^2 .

Bài 5. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn tâm O . Dựng đường thẳng d qua A song song BC , đường thẳng d' qua C song song BA , gọi D là giao điểm của d và d' . Dựng AE vuông góc BD (E nằm trên BD), F là giao điểm của BD với đường tròn (O). Chứng minh:

1) Tứ giác $AECD$ nội tiếp được trong đường tròn.

$$2) \widehat{AOF} = 2\widehat{CAE}$$

3) Tứ giác $AECF$ là hình bình hành.

$$4) DF \cdot DB = 2 \cdot AB^2$$

-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. (1,5 điểm) Rút gọn biểu thức sau:

$$1) A = \sqrt{75} - 5\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$$

$$2) B = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

Lời giải

$$1) A = \sqrt{75} - 5\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$$

Ta có :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{75} - 5\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{25 \cdot 3} - 5|1-\sqrt{3}| \\ &= 5\sqrt{3} - 5(\sqrt{3}-1) \text{ (do } 1-\sqrt{3} < 0) \\ &= 5\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 5 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Vậy $A = 5$.

$$2) B = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} \\ &= \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} \\ &= \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) \\ &= \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Vậy $B = 1$.

Bài 2. (1,5 điểm)

Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 2x - y = m \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

1) Giải hệ phương trình đã cho khi $m = 9$.

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ thỏa $x > 0, y < 0$.

Lời giải

1) Giải hệ phương trình đã cho khi $m = 9$.

Với $m = 9$ hệ phương trình trở thành
$$\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 4x - 2y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 28 \\ y = 2x - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \cdot 4 - 9 = -1 \end{cases}$$

Vậy với $m = 9$ hệ phương trình có nghiệm (x, y) là $(4, -1)$.

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình có nghiệm (x, y) thỏa mãn $x > 0, y < 0$.

Ta có:
$$\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 2x - y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 10 & (1) \\ y = 2x - m & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$3x + 2(2x - m) = 10 \Leftrightarrow 3x + 4x - 2m = 10 \Leftrightarrow 7x = 2m + 10 \Leftrightarrow x = \frac{2m + 10}{7}$$

Thay $x = \frac{2m + 10}{7}$ vào (2) ta được $y = 2 \cdot \frac{2m + 10}{7} - m = \frac{4m - 43}{7}$

$$\text{Để } x > 0, y < 0 \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{2m + 10}{7} > 0 \\ \frac{4m - 43}{7} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 10 > 0 \\ 4m - 43 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -5 \\ m < \frac{43}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -5 < m < \frac{43}{4}.$$

Vậy $-5 < m < \frac{43}{4}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 3. (2,0 điểm)

Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 5x + 6$

1) Vẽ đồ thị (P) .

2) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

3) Viết phương trình đường thẳng (d') biết (d') song song (d) và (d') cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 24$.

Lời giải

1) Vẽ đồ thị (P) .

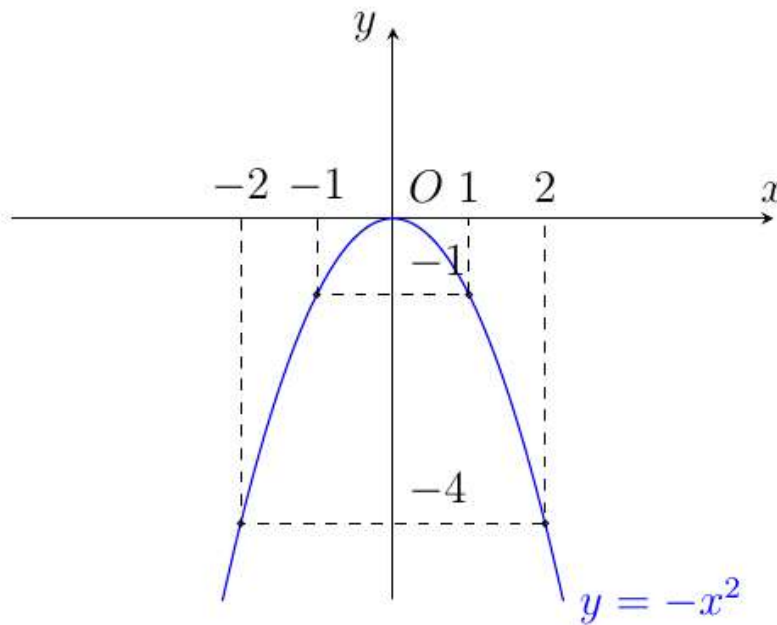
Đồ thị hàm số $y = -x^2$ đi qua gốc tọa độ O , có bề lõm hướng xuống và nhận Oy làm trục đối xứng.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

\Rightarrow Parabol $(P): y = -x^2$ đi qua các điểm $(-2; -4), (-1; -1), (0; 0), (1; -1), (2; -4)$.

Đồ thị Parabol $(P): y = -x^2$:



2) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Hoành độ giao điểm của đồ thị (P) và (d) là nghiệm của phương trình:

$$-x^2 = 5x + 6 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0$$

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4.6 = 1 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} x = \frac{-5+1}{2} = -2 \\ x = \frac{-5-1}{2} = -3 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -2 \Rightarrow y = -(-2)^2 = -4.$$

$$\text{Với } x = -3 \Rightarrow y = -(-3)^2 = -9.$$

Vậy tọa độ các giao điểm của (P) và (d) là $A(-2; -4), B(-3; -9)$.

3) Viết phương trình đường thẳng (d') biết (d') song song (d) và (d') cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 sao cho $x_1, x_2 = 24$.

Vì (d') song song (d) nên (d') có dạng $y = 5x + b (b \neq 6)$ (1)

Hoành độ giao điểm của đồ thị (P) và (d') là nghiệm của phương trình:

$$-x^2 = 5x + b \Leftrightarrow x^2 + 5x + b = 0(*)$$

(d') cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Rightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 5^2 - 4b > 0 \Leftrightarrow b < \frac{25}{4} \quad (2)$$

Khi đó, theo hệ thức Vi-ét ta có $x_1 \cdot x_2 = b \Rightarrow b = -24 < \frac{25}{4}$, thỏa mãn (1) và (2).

Vậy phương trình đường thẳng (d') cần tìm là: $(d'): y = 5x - 24$.

Bài 4. (1,5 điểm)

Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn (thuộc đất trong vườn) rộng 1,5m. Tính kích thước của vườn, biết rằng đất còn lại trong vườn để trồng trọt là 4329 m^2 .

Lời giải

Goi chiều rộng của khu vườn là x (mét; $x > 0$).

Vì chiều dài gấp 3 lần chiều rộng nên chiều dài của khu vườn là $3x(m)$.

Do lối đi xung quanh vườn (thuộc đất trong vườn) rộng 1,5m nên:

Chiều dài phần đất để trồng trọt là: $3x - 1,5 \cdot 2 = 3x - 3$ (mét)

Chiều rộng phần đất để trồng trọt là: $x - 1,5.2 = x - 3$ (mét)

Vì diện tích vườn để trồng trọt là 4329m^2 nên ta có phương trình: $(x - 3)(3x - 3) = 4329$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 1) = 1443 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 1443 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1440 = 0$$

Ta có $\Delta' = 2^2 + 1440 = 1444 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{1444} = 40 \text{ (tm)} \\ x_2 = 2 - \sqrt{1444} = -36 \text{ (ktm)} \end{cases}$$

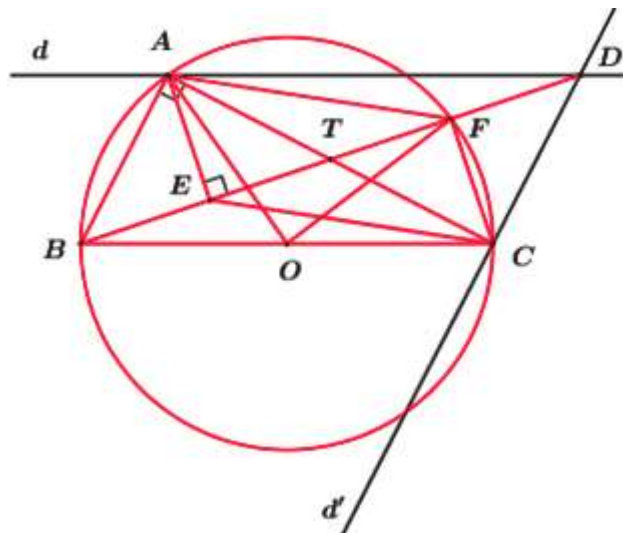
Vậy chiều rộng của khu vườn là 40 mét và chiều dài của khu vườn là 120 mét.

Bài 5. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn tâm O . Vẽ đường thẳng d qua A song song BC , đường thẳng d' qua C song song BA , gọi D là giao điểm của d và d' . Vẽ AE vuông góc BD (E nằm trên BD), F là giao điểm của BD với đường tròn (O). Chứng minh:

- 1) Tứ giác $AECD$ nội tiếp được trong đường tròn.
- 2) $\widehat{AOF} = 2\widehat{CAE}$
- 3) Tứ giác $AECF$ là hình bình hành.
- 4) $DF \cdot DB = 2 \cdot AB^2$

Lời giải



1) Tứ giác $AECD$ nội tiếp được trong đường tròn.

Vì ΔABC vuông tại A và nội tiếp (O) nên BC là đường kính của (O)

Ta có: $\begin{cases} AB \perp AC \\ CD // AB \end{cases} (gt) \Rightarrow AC \perp CD$ (từ vuông góc đến song song) $\Rightarrow \widehat{ACD} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $AECD$ có: $\widehat{AED} = \widehat{ACD} = 90^\circ \Rightarrow AECD$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có 2 đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau).

$$2) \widehat{AOF} = 2\widehat{CAE}$$

Do tứ giác $AECD$ là tứ giác nội tiếp (cmt) nên $\widehat{CAE} = \widehat{CDE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn \widehat{CE}).

Mà $\widehat{CDE} = \widehat{ABF}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{ABF}$.

Mặt khác: $\widehat{AOF} = 2\widehat{ABF}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn \widehat{AF}) $\Rightarrow \widehat{AOF} = 2\widehat{CAE}$ (đpcm).

3) Tứ giác $AECF$ là hình bình hành.

Do tứ giác $AECD$ là tứ giác nội tiếp (cmt) nên $\widehat{ACE} = \widehat{ADE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn \widehat{AE}).

Ta có: $\widehat{ADE} = \widehat{DBC}$ (so le trong do $AD // BC$) $\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{DBC}$.

Mà $\widehat{DBC} = \widehat{FBC} = \widehat{FAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn \widehat{FC}) $\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{FAC}$.

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $AF // EC$ (dnhb) (1)

Mặt khác: $\widehat{CFE} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $CF \perp FE$ hay $CF \perp BD$.

Mà $AE \perp BD$ (gt) nên $AE // CF$ (từ vuông góc đến song song)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $AECF$ là hình bình hành (tứ giác có các cặp cạnh đối song song) (đpcm).

$$4) DF \cdot DB = 2 \cdot AB^2$$

Gọi $\{T\} = AC \cap BD$.

Ta có: $\begin{cases} AB // CD \\ AD // BC \end{cases} (gt) \Rightarrow ABCD$ là hình bình hành (dnhb) $\Rightarrow TA = TC, TB = TD$ và $AB = CD$

(tính chất).

Xét ΔDCT vuông tại C có $CF \perp BD$ (cmt) $\Rightarrow CF \perp DT \Rightarrow CF$ là đường cao nên:

$$CD^2 = DF \cdot DT \text{ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot CD^2 = 2 \cdot DF \cdot DT = (2 \cdot DT) \cdot DF = DB \cdot DF.$$

Mà $AB = CD$ (cmt).

Vậy $DF \cdot DB = 2AB^2$ (đpcm).