

# LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 THÀNH PHỐ HÀ NỘI 2021



## 1. Đề thi

### Bài 1 (5.0 điểm).

- a) Giải phương trình  $x^2 - x + 8 = 4\sqrt{x + 3}$ .
- b) Chứng minh rằng biểu thức  $K = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$  có giá trị là số nguyên, trong đó  $a, b, c$  là ba số thực đôi một phân biệt.

### Bài 2 (5.0 điểm).

- a) Cho ba số nguyên  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c$  và  $ab - bc - ca$  cùng chia hết cho 3. Chứng minh rằng  $ab - bc - ca$  chia hết cho 9.
- b) Cho đa thức  $P(x) = x^3 + ax + b$  có một nghiệm là  $1 + \sqrt{3}$  ( $a, b$  là các số hữu tỉ). Chứng minh rằng đa thức  $P(x)$  chia hết cho đa thức  $x^2 - 2x - 2$ .

**Bài 3 (2.0 điểm).** Cho các số thực không âm  $a, b, c$  thay đổi thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $Q = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}$ .

**Bài 4 (6.0 điểm).** Cho đường tròn  $(I)$  nội tiếp tam giác nhọn  $ABC$  ( $AB < AC$ ). Đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với các cạnh  $BC, CA$  lần lượt tại các điểm  $D, E$ . Qua điểm  $B$ , kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng  $BI$ , cắt đường thẳng  $AI$  tại điểm  $J$ . Gọi  $P$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $J$  trên đường thẳng  $BC$ .

- a) Chứng minh rằng  $BD = CP$ .
- b) Gọi  $N$  là giao điểm của hai đường thẳng  $AJ$  và  $BC$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{AI} + \frac{1}{AJ} = \frac{2}{AN}$ .
- c) Gọi  $Q$  là giao điểm của hai đường thẳng  $JP$  và  $DE$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $PQ$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $BK$  vuông góc với đường thẳng  $AP$ .

### Bài 5 (2.0 điểm).

- a) Tìm tất cả các số nguyên dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $3^x + 2^y = 1 + 2^z$ .
- b) Cho một hình chữ nhật có diện tích bằng 1. Năm điểm phân biệt được đặt tùy ý vào hình chữ nhật sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng (mỗi điểm trong năm điểm đó có thể được đặt trên cạnh hoặc đặt nằm trong hình chữ nhật).
- Chứng minh rằng mọi tam giác tạo bởi ba điểm trong năm điểm đã cho đều có diện tích không vượt quá  $\frac{1}{2}$ .
  - Với mỗi cách đặt năm điểm vào hình chữ nhật như trên, gọi  $n$  là số tam giác có ba đỉnh là ba điểm nằm trong năm điểm đó và có diện tích không vượt quá  $\frac{1}{4}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $n$ .

## 2. Lời giải và bình luận các bài toán

### Bài 1 (5.0 điểm).

- a) Giải phương trình  $x^2 - x + 8 = 4\sqrt{x+3}$ .
- b) Chứng minh rằng biểu thức  $K = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$  có giá trị là số nguyên, trong đó  $a, b, c$  là ba số thực đôi một phân biệt.

**Lời giải.** a) Điều kiện:  $x \geq -3$ . Phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$$(x^2 - 2x + 1) + (x + 3 - 4\sqrt{x+3} + 4) = 0,$$

hay

$$(x-1)^2 + (\sqrt{x+3} - 2)^2 = 0. \quad (1)$$

Vì  $(x-1)^2 \geq 0$  và  $(\sqrt{x+3} - 2)^2 \geq 0$  nên (1) xảy ra khi và chỉ khi  $(x-1)^2 = (\sqrt{x+3} - 2)^2 = 0$ , tức  $x = 1$  (thỏa mãn). Vậy phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 1$ .

b) Ta có

$$\begin{aligned} K &= \frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)} = \frac{a^2(b-c) + b^2(c-b+b-a) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)} \\ &= \frac{(a^2-b^2)(b-c) - (b^2-c^2)(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)} = \frac{(a-b)(b-c)(a+b-b-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)} = 1. \end{aligned}$$

Do đó, biểu thức  $K$  luôn nhận giá trị nguyên là 1. □

### Bài 2 (5.0 điểm).

- a) Cho ba số nguyên  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c$  và  $ab - bc - ca$  cùng chia hết cho 3. Chứng minh rằng  $ab - bc - ca$  chia hết cho 9.
- b) Cho đa thức  $P(x) = x^3 + ax + b$  có một nghiệm là  $1 + \sqrt{3}$  ( $a, b$  là các số hữu tỉ). Chứng minh rằng đa thức  $P(x)$  chia hết cho đa thức  $x^2 - 2x - 2$ .

**Lời giải.** a) Từ giả thiết ta có  $(a+b)(a+b+c) + (ab-bc-ca)$  chia hết cho 3, hay  $a^2 + b^2 + 3ab$  chia hết cho 3. Từ đó suy ra  $a^2 + b^2$  cùng chia hết cho 3.

Với mọi số nguyên  $x$ , ta có  $x$  chia 3 dư 0, 1 hoặc 2 nên  $x^2$  chia 3 dư 0 hoặc 1. Suy ra  $a^2$  và  $b^2$  khi chia cho 3 có số dư là 0 hoặc 1. Như vậy, để  $a^2 + b^2$  chia hết cho 3, ta phải có  $a^2$  và  $b^2$  cùng chia hết cho 3, tức  $a$  và  $b$  cùng chia hết cho 3. Mặt khác, do  $a + b + c$  chia hết cho 3 nên  $c$  cũng chia hết cho 3. Từ đây, dễ thấy  $ab - bc - ca$  chia hết cho 9. Ta có điều phải chứng minh.

b) Từ giả thiết, ta có  $P(1 + \sqrt{3}) = 0$ , hay

$$(a+6)\sqrt{3} = -(a+b+10).$$

Nếu  $a+6 \neq 0$ , ta có  $\sqrt{3} = -\frac{a+b+10}{a+6}$  là một số hữu tỉ, mâu thuẫn vì  $\sqrt{3}$  là một số vô tỉ. Do đó  $a = -6$ . Từ đó suy ra  $a+b+10 = 0$ , tức  $b = -4$ . Vậy

$$P(x) = x^3 - 6x - 4 = (x^2 - 2x - 2)(x + 2).$$

Rõ ràng  $P(x)$  chia hết cho đa thức  $x^2 - 2x - 2$ . □

**Bài 3 (2.0 điểm).** Cho các số thực không âm  $a, b, c$  thay đổi thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $Q = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}$ .

**Lời giải.** **Giá trị lớn nhất của biểu thức  $Q$ .** Với mọi số thực  $x, y$  và  $z$ , ta có

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0.$$

Từ đó suy ra  $2(xy + yz + zx) \leq 2(x^2 + y^2 + z^2)$ , hay

$$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

Sử dụng kết quả này, ta được

$$\begin{aligned} Q^4 &= \left[ (\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a})^2 \right]^2 \leq [3(a+b+b+c+c+a)]^2 \\ &= 36(a+b+c)^2 \leq 36 \cdot 3(a^2 + b^2 + c^2) = 108. \end{aligned}$$

Suy ra  $Q \leq \sqrt[4]{108}$ . Mặt khác, dễ thấy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức  $Q$  là  $\sqrt[4]{108}$ .

**Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $Q$ .** Từ giả thiết, ta có  $a^2, b^2, c^2 \leq 1$ . Suy ra  $0 \leq a, b, c \leq 1$ . Từ đây, ta có  $a \geq a^2$  và  $b \geq b^2$ . Từ đó  $a + b \geq a^2 + b^2$ . Mà  $0 \leq a^2 + b^2 = 1 - c^2 \leq 1$  nên  $a^2 + b^2 \geq (a^2 + b^2)^2$ . Tóm lại, ta có

$$\sqrt{a+b} \geq \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = a^2 + b^2.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$\sqrt{b+c} \geq b^2 + c^2, \quad \sqrt{c+a} \geq c^2 + a^2.$$

Từ các kết quả trên, ta suy ra

$$Q \geq a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 = 2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi  $a = 1$  và  $b = c = 0$ . Vậy giá trị nhỏ nhất của  $Q$  là 2.  $\square$

**Bình luận.** Để chứng minh  $Q \geq 2$ , ta còn có hai cách tiếp cận khác như sau.

**Cách 1.** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c$ . Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{a+b} + \sqrt{a+c} &\geq 2\sqrt[4]{(a+b)(a+c)} = 2\sqrt[4]{a^2 + ab + ac + bc} \\ &\geq 2\sqrt[4]{a^2 + b^2 + c^2 + bc} = 2\sqrt[4]{1 + bc} \geq 2. \end{aligned}$$

Lại có  $\sqrt{b+c} \geq 0$  nên  $Q \geq 2$ .

**Cách 2.** Tương tự như trong lời giải đã trình bày ở trên, ta có  $0 \leq a, b, c \leq 1$  nên  $a \geq a^2, b \geq b^2$  và  $c \geq c^2$ . Từ đây, với chú ý  $(a+b)(a+c) \geq a^2, (b+c)(b+a) \geq b^2$  và  $(c+a)(c+b) \geq c^2$ , ta có

$$\begin{aligned} Q^2 &= (\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a})^2 \\ &= 2(a+b+c) + 2\left[\sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{(b+c)(b+a)} + \sqrt{(c+a)(c+b)}\right] \\ &\geq 2(a+b+c) + 2(a+b+c) = 4(a+b+c) \geq 4(a^2 + b^2 + c^2) = 4. \end{aligned}$$

Suy ra  $Q \geq 2$ .

**Bài 4 (6.0 điểm).** Cho đường tròn  $(I)$  nội tiếp tam giác nhọn  $ABC$  ( $AB < AC$ ). Đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với các cạnh  $BC, CA$  lần lượt tại các điểm  $D, E$ . Qua điểm  $B$ , kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng  $BI$ , cắt đường thẳng  $AI$  tại điểm  $J$ . Gọi  $P$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $J$  trên đường thẳng  $BC$ .

- a) Chứng minh rằng  $BD = CP$ .
- b) Gọi  $N$  là giao điểm của hai đường thẳng  $AJ$  và  $BC$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{AI} + \frac{1}{AJ} = \frac{2}{AN}$ .
- c) Gọi  $Q$  là giao điểm của hai đường thẳng  $JP$  và  $DE$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $PQ$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $BK$  vuông góc với đường thẳng  $AP$ .

**Lời giải.** Tham khảo ở Facebook thầy Nguyễn Lê Phước:

<https://www.facebook.com/nguyen.lephuoc.1/posts/4238214622860346>. □

**Bài 5 (2.0 điểm).**

- a) Tìm tất cả các số nguyên dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $3^x + 2^y = 1 + 2^z$ .
- b) Cho một hình chữ nhật có diện tích bằng 1. Năm điểm phân biệt được đặt tùy ý vào hình chữ nhật sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng (mỗi điểm trong năm điểm đó có thể được đặt trên cạnh hoặc đặt nằm trong hình chữ nhật).
  - i) Chứng minh rằng mọi tam giác tạo bởi ba điểm trong năm điểm đã cho đều có diện tích không vượt quá  $\frac{1}{2}$ .
  - ii) Với mỗi cách đặt năm điểm vào hình chữ nhật như trên, gọi  $n$  là số tam giác có ba đỉnh là ba điểm nằm trong năm điểm đó và có diện tích không vượt quá  $\frac{1}{4}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $n$ .

**Lời giải.** a) Xét các trường hợp sau.

**Trường hợp 1:  $y = 1$ .** Trong trường hợp này, ta có

$$2^z - 1 = 3^x.$$

Suy ra  $2^z \equiv 1 \pmod{3}$ . Nếu  $z$  là số lẻ, tức  $z = 2k + 1$  với  $k$  tự nhiên, thì ta có  $2^z = 2^{2k+1} = 2 \cdot 4^k \equiv 2 \pmod{3}$ , mâu thuẫn. Do đó  $z$  là số chẵn, tức  $z = 2k$  với  $k$  nguyên dương. Khi đó, ta có

$$3^x = 2^{2k} - 1 = (2^k - 1)(2^k + 1).$$

Suy ra  $2^k - 1$  và  $2^k + 1$  đều là lũy thừa của 2. Mà hai số này không cùng chia hết cho 3 (do  $(2^k + 1) - (2^k - 1) = 2$  không chia hết cho 3) nên trong hai số phải có một số bằng 1. Lại có  $2^k - 1 < 2^k + 1$  nên  $2^k - 1 = 1$ , tức  $k = 1$ . Một cách tương ứng, ta tính được  $z = 2$  và  $x = 1$ . Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

**Trường hợp 2:  $y \geq 2$ .** Vì  $3^x > 1$  nên từ phương trình đã cho, ta có  $2^z > 2^y$ , tức  $z > y$ . Suy ra  $2^y$  và  $2^z$  cùng chia hết cho 4. Từ đó ta có  $3^x \equiv 1 \pmod{4}$ . Nếu  $x$  là số lẻ, tức  $x = 2\ell + 1$  với  $\ell$  tự nhiên, thì  $3^x = 3^{2\ell+1} = 3 \cdot 9^\ell \equiv 3 \pmod{4}$ , mâu thuẫn. Do đó  $x$  là số chẵn, tức  $x = 2\ell$  với  $\ell$  nguyên dương.

- Giả sử  $y \geq 4$ . Khi đó, ta có  $2^y$  và  $2^z$  cùng chia hết cho 16 nên  $3^x \equiv 1 \pmod{16}$ . Nếu  $\ell$  là số lẻ, tức  $\ell = 2t + 1$  với  $t$  tự nhiên, thì  $3^x = 3^{4t+2} = 9 \cdot 81^t \equiv 9 \pmod{16}$ , mâu thuẫn. Do đó  $\ell$  là số chẵn, tức  $\ell = 2t$  với  $t$  nguyên dương. Suy ra  $3^x = 3^{4t} = 81^t \equiv 1 \pmod{5}$ . Từ đó  $2^z - 2^y$  chia hết cho 5, hay  $2^{z-y} \equiv 1 \pmod{5}$ .

Nếu  $z - y$  là số lẻ, tức  $z - y = 2u + 1$  với  $u$  tự nhiên, thì  $2^{z-y} = 2 \cdot 4^u \equiv \pm 2 \pmod{5}$ , mâu thuẫn. Do đó  $z - y$  là số chẵn, tức  $z - y = 2u$  với  $u$  nguyên dương. Khi đó, ta có  $2^z - 2^y = 2^y(4^u - 1)$  chia hết cho 3. Lại có  $3^x$  chia hết cho 3 nên 1 chia hết cho 3, mâu thuẫn.

- Như vậy, ta phải có  $y \leq 3$ . Nếu  $y = 2$  thì ta có  $3^x + 3 = 2^z$ , suy ra  $2^z$  chia hết cho 3, mâu thuẫn. Do đó  $y = 3$ . Khi đó, ta có

$$2^z - 3^{2\ell} = 7.$$

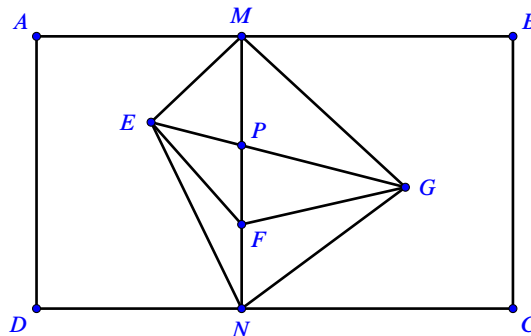
Từ đây, ta có  $2^z \equiv 1 \pmod{3}$ . Chứng minh tương tự **trường hợp 1**, ta suy ra  $z$  là số chẵn, tức  $z = 2m$  với  $m$  nguyên dương. Khi đó ta có

$$(2^m - 3^\ell)(2^m + 3^\ell) = 7.$$

Vì  $2^m - 3^\ell < 2^m + 3^\ell$  và  $2^m + 3^\ell > 0$  nên  $2^m - 3^\ell = 1$  và  $2^m + 3^\ell = 7$ . Từ đó  $m = 2$  và  $\ell = 1$ , hay ta có  $z = 4$  và  $x = 2$ . Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

Vậy có hai bộ số  $(x, y, z)$  thỏa mãn yêu cầu là  $(1, 1, 2)$  và  $(2, 3, 4)$ .

- b) i)** Trước hết, ta chứng minh kết quả sau: *Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có diện tích  $S$ . Xét ba điểm  $E, F, G$  không thẳng hàng thuộc miền mặt phẳng giới hạn bởi hình chữ nhật  $ABCD$ . Khi đó  $S_{EFG} \leq \frac{1}{2}S$ .*



Qua ba điểm  $E, F, G$  kẻ các đường thẳng vuông góc với đường thẳng  $AB$ . Trong các đường thẳng này, có một đường thẳng nằm giữa hoặc trùng với một trong hai đường thẳng kia. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là đường thẳng  $d$  qua điểm  $F$ . Khi đó, đường thẳng  $d$  sẽ cắt đoạn  $EG$  tại điểm  $P$  nào đó. Gọi  $M, N$  theo thứ tự là giao điểm của đường thẳng  $d$  và hai đường thẳng  $AB, CD$ . Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} S_{EFG} &= S_{EPF} + S_{GPF} \leq S_{EMN} + S_{GMN} = \frac{1}{2} \cdot d(E, MN) \cdot MN + \frac{1}{2} \cdot d(G, MN) \cdot MN \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot d(A, MN) \cdot MN + \frac{1}{2} \cdot d(B, MN) \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MN = \frac{1}{2}S, \end{aligned}$$

trong đó  $d(X, ZT)$  được ký hiệu là khoảng cách từ điểm  $X$  đến đường thẳng  $ZT$ .

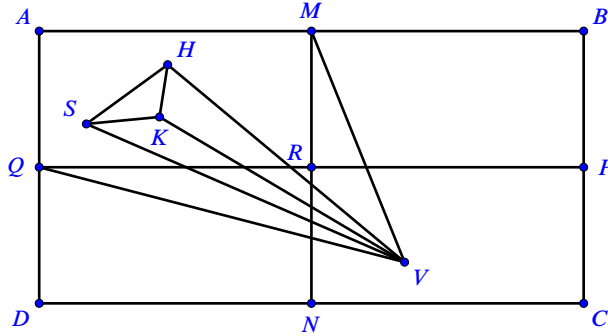
Từ kết quả vừa chứng minh trên, ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

- ii)** Trước hết, ta sẽ chứng minh  $n \geq 2$ . Thật vậy, giả sử  $n \leq 1$ . Gọi hình chữ nhật đã cho là hình chữ nhật  $ABCD$ . Chia hình chữ nhật  $ABCD$  thành bốn hình chữ nhật nhỏ bằng nhau  $AMRQ, BMRP, CPRN, DQRN$  như hình vẽ bên dưới.

Xét hai hình chữ nhật  $AMND$  và  $BMNC$ . Ta thấy mỗi điểm trong năm điểm đã cho sẽ thuộc một trong hai miền mặt phẳng giới hạn bởi hai hình chữ nhật này. Do đó, có ba điểm thuộc cùng một

hình chữ nhật. Không mất tính tổng quát, giả sử ba điểm đó là  $H, K, S$  và chúng cùng thuộc hình chữ nhật  $AMND$ .

Xét hai hình chữ nhật  $AMRQ$  và  $DQRN$ . Ta thấy mỗi điểm trong ba điểm  $H, K, S$  sẽ thuộc một trong hai miền mặt phẳng giới hạn bởi hai hình chữ nhật này. Do đó, có hai điểm thuộc cùng một hình chữ nhật. Không mất tính tổng quát, giả sử hai điểm đó là  $H, K$  và chúng cùng thuộc hình chữ nhật  $AMRQ$ .



Áp dụng kết quả đã chứng minh ở phần **i)**, ta có

$$S_{HKS} \leq \frac{1}{2} S_{AMND} = \frac{1}{4}.$$

Gọi hai điểm còn lại trong năm điểm là  $V$  và  $W$ . Nếu có một điểm nào đó trong hai điểm này thuộc đa giác  $ABPRND$ , chẳng hạn là  $V$  thì bằng cách sử dụng kết quả đã chứng minh ở phần **i)**, ta cũng có  $S_{HKV} \leq \frac{1}{4}$ . Suy ra  $n \geq 2$ , mâu thuẫn. Do đó, cả hai điểm  $V$  và  $W$  phải nằm trong hình chữ nhật  $CPRN$ .

Nếu  $S$  thuộc một trong hai hình chữ nhật  $DQRN$  hoặc  $BMRP$  thì bằng cách sử dụng kết quả đã chứng minh ở phần **i)**, ta có  $S_{SVW} \leq \frac{1}{4}$ , mâu thuẫn. Do đó  $S$  nằm trong hình chữ nhật  $AMRQ$ .

Gọi  $S_1$  là diện tích của tứ giác (không nhất thiết lồi) tạo bởi ba điểm  $H, K, S$  và  $V$ . Khi đó, rõ ràng

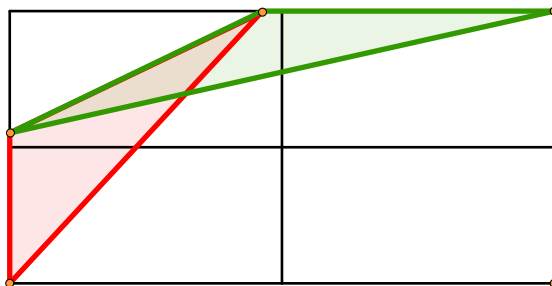
$$S_1 \leq S_{VMAQ} = S_{AMRQ} + S_{VQR} + S_{VMR} \leq \frac{1}{4} + S_{NQR} + S_{PMR} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

Mặt khác, trong ba tia  $VH, VK, VS$  luôn có một tia nằm giữa hai tia còn lại, chẳng hạn là  $VK$ . Do đó

$$S_1 = S_{VKH} + S_{VKS} \geq 2 \min\{S_{VKH}, S_{VKS}\}.$$

Kết hợp với kết quả trên, ta suy ra  $\min\{S_{VKH}, S_{VKS}\} \leq \frac{1}{4}$ . Từ đó, kết hợp với  $S_{HKS} \leq \frac{1}{4}$ , ta có  $n \geq 2$ , mâu thuẫn. Vậy ta phải có  $n \geq 2$ .

Mặt khác, ta có  $n = 2$  được thỏa mãn trong trường hợp sau.



Vậy giá trị nhỏ nhất của  $n$  là 2. □

**Bình luận.** Bài 5a) là một sự tương tự hóa của bài số học trong đề chọn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO 2019: *Tìm tất cả các số nguyên dương  $x, y, z$  thỏa mãn*

$$7^x + 2^y = 1 + 2^z.$$

Trường hợp đặc biệt của bài toán cũng đã được sử dụng làm đề chọn đội tuyển Đại học Vinh tham dự kỳ thi học sinh giỏi cấp Quốc gia 2019: *Tìm tất cả các số nguyên dương  $x, y, z$  thỏa mãn*

$$1 + 2^x = 3^y + 2 \cdot 4^z.$$