TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HỘI ĐỒNG TUYỂN SINH 10

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề gồm 01 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2022

Khóa ngày 31 tháng 5 năm 2021

Môn thi: TOÁN VÒNG 2 (CHUYÊN TOÁN)

Thời gian làm 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $P=\dfrac{x\sqrt{x}-8}{x-2\sqrt{x}}-\dfrac{x\sqrt{x}+8}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$.

a) Tìm điều kiện của x để P có nghĩa và rút gọn P.

b) Tìm x để $P=7$.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $2\left(x^2-x+3\right)=5\sqrt{x^2-x+2}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+3y=y^3+3x \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2<4(ab+bc+ca).$$

b) Tìm tất cả các số tự nhiên a và b với $(a>1, b>1)$ sao cho:

$$(ab-1) \text{ chia hết cho } (a-1)(b-1).$$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho nữa đường tròn tâm O đường kính AB, điểm C thuộc nữa đường tròn và không trùng với A và B, D là điểm chính giữa cung AC, hai đường thẳng BC và AD cắt nhau tại E, đường thẳng BD cắt AC tại F, và cắt tiếp tuyến tại A của nữa đường tròn tại G.

a) Chứng minh tứ giác $ABEG$ nội tiếp.

b) Chứng minh điểm E luôn thuộc đường tròn (S) cố định khi C thay đổi.

c) Gọi H là giao điểm thứ hai của AC với đường tròn (S). Chứng minh tứ giác $BFEH$ nội tiếp.

Câu 5. (1,0 điểm)

Trong mặt phẳng Oxy, điểm X được gọi là “đẹp” nếu hoành độ và tung độ của X đều là số hữu tỉ. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC đều thì một trong ba điểm A, B, C có ít nhất một điểm không là điểm đẹp.

---------------------------HẾT---------------------------

Họ tên thí sinh:……………………………………………Số báo danh: ……………………………………

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $P=\dfrac{x\sqrt{x}-8}{x-2\sqrt{x}}-\dfrac{x\sqrt{x}+8}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$.

a) Tìm điều kiện của x để P có nghĩa và rút gọn P.

b) Tìm x để $P=7$.

Lời giải

a) P có nghĩa khi và chỉ khi $\begin{cases} x\ge 0 \\ x-2\sqrt{x}\ne 0 \\ x+2\sqrt{x}\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)\ne 0 \\ \sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\ne 4 \end{cases}$.

Với điều kiện trên ta có:

$$P=\frac{x\sqrt{x}-8}{x-2\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}+8}{x+2\sqrt{x}}+\frac{x+2}{\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+\sqrt{x}+4\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}-\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(x-\sqrt{x}+4\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}+\frac{x+2}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x+\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}-\frac{x-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}+\frac{x+2}{\sqrt{x}}=\frac{x+2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}.$$

Vậy $P=\dfrac{x+2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x\ne 4 \end{cases}$.

Ta có: $P=7 \Leftrightarrow \dfrac{x+2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}=7 \Leftrightarrow x-5\sqrt{x}+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2} \\ \sqrt{x}=\dfrac{5-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{21+5\sqrt{17}}{2} \\ x=\dfrac{21-5\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$.

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy $x=\dfrac{21+5\sqrt{17}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{21-5\sqrt{17}}{2}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $2\left(x^2-x+3\right)=5\sqrt{x^2-x+2}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+3y=y^3+3x \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$.

Lời giải

a) Ta có: $x^2-x+2>0, \forall x\in\mathbb{R}$ do đó điều kiện xác định: $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình tương đương:

$$\begin{aligned}
&2\left(x^2-x+2\right)+2=5\sqrt{x^2-x+2}\\
&\Leftrightarrow 2\left(x^2-x+2\right)-5\sqrt{x^2-x+2}+2=0\\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-x+2}-2\right)\left(2\sqrt{x^2-x+2}-1\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-x+2}=2\\ \sqrt{x^2-x+2}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-x-2=0\\ 4x^2-4x+7=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=2\end{array}\right..
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=-1$ hoặc $x=2$.

b) Ta có:

$$\begin{aligned}
&x^3+3y=y^3+3x\Leftrightarrow x^3-y^3-3\left(x-y\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)-3\left(x-y\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2-3\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\ x^2+xy+y^2=3\end{array}\right..
\end{aligned}$$

Nếu $x=y,$ ta có hệ: $\begin{cases}x=y\\ x^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ x=y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right..$

Nếu $x^2+xy+y^2=3,$ ta có hệ: $\begin{cases}x^2+xy+y^2=3\\ x^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2=1\\ xy=2\end{cases}.$

Với mọi $x,\ y\in\mathbb{R},$ ta có: $x^2+y^2\ge 2xy,$ suy ra: $1\ge 2\cdot 2=4,$ vô lí. Do đó hệ vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$3\left(ab+bc+ca\right)\le\left(a+b+c\right)^2<4\left(ab+bc+ca\right).$$

b) Tìm tất cả các số tự nhiên a và b với $\left(a>1,\ b>1\right)$ sao cho:

$$\left(ab-1\right) \text{ chia hết cho } \left(a-1\right)\left(b-1\right).$$

Lời giải

a) Ta chứng minh: $3(ab+bc+ca)\le (a+b+c)^2$. Thật vậy, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ta chứng minh: $(a+b+c)^2<4(ab+bc+ca)$.

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $\begin{cases} a+b-c>0 \\ b+c-a>0 \\ c+a-b>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c(a+b-c)>0 \\ a(b+c-a)>0 \\ b(c+a-b)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ca+bc>c^2 \\ ab+ca>a^2 \\ bc+ab>b^2 \end{cases}$.

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế ta được:

$$2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow 4(ab+bc+ca)>(a+b+c)^2.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

b) Ta có: $(ab-1)$ chia hết cho $(a-1)(b-1)$ nên $(ab-1)$ chia hết cho $(a-1)$.

Ta có: $ab-1=ab-1-b+b=b(a-1)+b-1$ suy ra $(b-1)$ chia hết cho $(a-1)$.

Tương tự ta cũng chứng minh đươc: $(a-1)$ chia hết cho $(b-1)$.

Từ đó suy ra: $a-1=b-1\Leftrightarrow a=b$.

Do đó ta cần tìm số tự nhiên a để a^2-1 chia hết cho $(a-1)^2$.

Tức là: $k=\dfrac{a^2-1}{(a-1)^2}=\dfrac{a+1}{a-1}=1+\dfrac{2}{a-1}\in\mathbb{N}\Rightarrow 2\,\vdots\,(a-1)\Rightarrow (a-1)\in\{1;2\}\Leftrightarrow a\in\{2;3\}$.

Do đó $(a;b)=(2;2), (3;3)$ là các cặp số cần tìm.

Câu 4. (3,0 điểm)

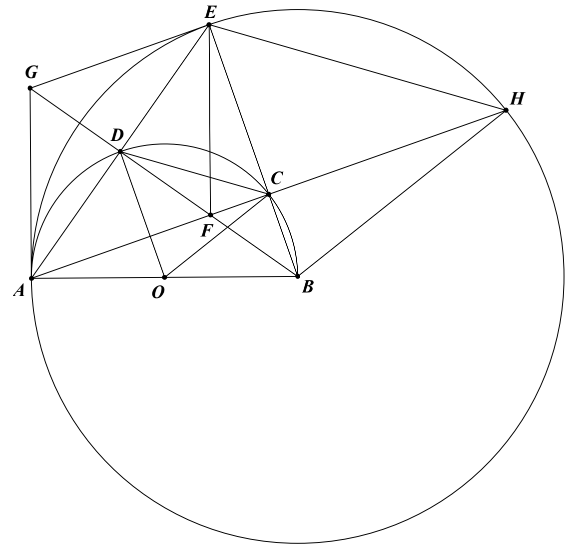
Cho nữa đường tròn tâm O đường kính AB, điểm C thuộc nữa đường tròn và không trùng với A và B, D là điểm chính giữa cung AC, hai đường thẳng BC và AD cắt nhau tại E, đường thẳng BD cắt AC tại F, và cắt tiếp tuyến tại A của nữa đường tròn tại G.

a) Chứng minh tứ giác $ABEG$ nội tiếp.

b) Chứng minh điểm E luôn thuộc đường tròn (S) cố định khi C thay đổi.

c) Gọi H là giao điểm thứ hai của AC với đường tròn (S). Chứng minh tứ giác $BFEH$ nội tiếp.

Lời giải



a) Ta có: $\angle ABD = \angle DBC = \angle GBE$ do D là điểm chính giữa cung AC.

Mặt khác D nằm trên đường tròn đường kính $AB \Rightarrow \angle ADB = 90^0$.

AG là tiếp tuyến tại A của đường tròn nên $\angle GAB = 90^0$.

Từ đây ta có: $\angle GAD = \angle DAB$ do cùng phụ với $\angle DAB$, hay $\angle GAE = \angle ABD$.

Do đó: $\angle GAE = \angle GBE$ nên tứ giác $ABEG$ nội tiếp.

b) Xét tam giác ABE có BD vừa là phân giác của $\angle EBA$ vừa là đường cao nên tam giác ABE cân B.

Suy ra: $AB = BE$. Mà A, B cố định nên BE không đổi.

Do đó E nằm trên đường tròn (S) có tâm là B, bán kính AB khi C thay đổi.

c) Tam giác ABH cân tại B nên $\angle FHB = \angle AHB = \angle HAB$.

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\angle HAB = \angle CAB = \angle CDB$.

Ta có có $\angle FDE + \angle FCE = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên tứ giác $CFDE$ nội tiếp.

Suy ra: $\angle CDB = \angle CDF = \angle BEF$.

Từ đây suy ra: $\angle FHB = \angle BEF$ nên tứ giác $BFEH$ nội tiếp.

Câu 5. (1,0 điểm)

Trong mặt phẳng Oxy, điểm X được gọi là "đẹp" nếu hoành độ và tung độ của X đều là số hữu tỉ. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC đều thì một trong ba điểm A, B, C có ít nhất một điểm không là điểm đẹp.

Lời giải

Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Giả giử tam giác ABC đều và các điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ có hoành độ và tung độ là số hữu tỉ.

Ta có: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Ta tính diện tích tam giác ABC theo hai cách.

Theo giả thiết, tam giác ABC đều nên: $S_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2\right]$.

Mặt khác $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)\right|$.

Suy ra: $\frac{\sqrt{3}}{2}\left[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2\right] = \left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)\right|$, hay:

$$\frac{2\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)\right|}{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{3}$$

Do $x_A,\, y_A,\, x_B,\, y_B,\, x_C,\, y_C \in \mathbb{Q}$ nên đẳng thức vế trái là số hữu tỉ, trong đó khi $\sqrt{3}$ là số vô tỉ, mâu thuẫn.

Vậy điều giả sử là sai, suy ra ta có điều phải chứng minh.

--------------Chúc các bạn học tốt!--------------