

DẠNG 1: BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Bài 1. Cho biểu thức $Q = \left(1 - \frac{x-11}{x+1}\right) : \left(\frac{3+x}{x-3} - \frac{36}{9-x^2} - \frac{x-3}{x+3}\right)$ với $x \neq 3; x \neq -3$

- a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn Q b) Tính giá trị của Q biết $2x^2 + 6x = 0$
c) Tìm điều kiện của m để luôn có giá trị của x thỏa mãn $Q = m$
d) Tìm x để $Q = -x$ e) Tìm x để $Q < 1$

Bài 2. Cho biểu thức $A = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4x + 4} : \left(\frac{x+2}{x} - \frac{1}{2-x} + \frac{6-x^2}{x^2 - 2x}\right)$ với $x \neq 0; x \neq 2; x \neq -2$

- a) Rút gọn biểu thức A b) Tính giá trị biểu thức A biết $|2x+1| = 3$
c) Tìm x để $A < 0$ d) Tìm các giá trị x nguyên để B nhận giá trị nguyên
e) Tìm GTNN của A với $x > 2$

Bài 3. Cho biểu thức $B = \left(\frac{9-3x}{x^2 + 4x - 5} - \frac{x+5}{1-x} - \frac{x+1}{x+5}\right) : \frac{7x-14}{x^2 - 1}$ với $x \neq 1; x \neq 2; x \neq -5$

- a) Chứng minh $B = \frac{x^2 + x + 1}{x - 2}$ b) Tính giá trị B biết $(x+5)^2 - 9x - 45 = 0$
c) Tìm x nguyên để B nhận giá trị nguyên d) Tìm x để $B = \frac{-3}{4}$.
e) Tìm x để $B < 0$. f) Tìm GTLN của M biết $M = \frac{2}{x-2} : B$
g) Với $x > 2$, tìm GTNN của B .

Bài 3. Cho biểu thức $P = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2 - 4} - \frac{2-x}{2+x}\right) : \frac{x^2 - 3x}{2x^2 - x^3}$ với $x \neq 0; x \neq 2; x \neq 3$

- a) Rút gọn P b) Tính giá trị của P biết $|x-5| = 2$
c) Tìm x để $P > 0$ d) Tìm x thỏa mãn $P = -8$
e) Tìm GTNN của P khi $x > 3$

Bài 4. Cho biểu thức $M = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{x^2 + x - 6} + \frac{1}{2-x}$ với $x \neq -3; x \neq 2$

- a) Chứng minh $M = \frac{x-4}{x-2}$ b) Tìm x biết $M = -3$
c) Tính giá trị của M biết $x^2 + 2x + 1 = (3x-5)^2$
d) Tìm giá trị của tham số m để phương trình $M = m$ có nghiệm duy nhất.

Bài 5. Cho biểu thức $P = \frac{1}{x-2} - \frac{x^2 + 8}{x^3 - 8} - \frac{4}{x^2 + 2x + 4}$ với $x \neq 2$

- a) Rút gọn biểu thức P b) Tính giá trị của biểu thức P biết $2x^2 + x - 6 = 0$
c) So sánh P với 0 d) Tìm GTNN của P

Bài 6. Cho 2 biểu thức $A = \frac{1}{x-1} - \frac{x}{1-x^2}$ và $B = \frac{x^2 - x}{2x+1}$ với $x \neq -1; x \neq 1; x \neq -\frac{1}{2}$

Bài 19. Một đội xe vận tải phải vận chuyển 28 tấn hàng đến một địa điểm qui định. Vì trong đội có 2 xe phải điều đi làm việc khác nên mỗi xe phải chở thêm 0,7 tấn hàng nữa. Tính số xe của đội lúc đầu.

Bài 20. Một hình chữ nhật có chu vi là 78cm. Nếu giảm chiều dài đi 3cm và tăng chiều rộng thêm 4 cm thì hình chữ nhật trở thành hình vuông. Tính diện tích của hình chữ nhật ban đầu.

DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Bài 21. Giải các phương trình và bất phương trình sau:

1. $(x+5)(x-1) = 2x(x-1)$
2. $(x^2 - 5x + 7)^2 - (2x - 5)^2 = 0$
3. $3x^2 - 7x + 4 = 0$
4. $2(x+3) - x^2 - 3x = 0$
5. $x^3 + 27 + (x+3)(x-9) = 0$
6. $\frac{x+5}{4} - \frac{2x-3}{3} = \frac{2x-1}{12}$
7. $\frac{2x+5}{x+3} + 1 = \frac{4}{x^2+2x-3} - \frac{3x-1}{1-x}$
8. $\frac{x+2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = \frac{3}{(x+1)(x-2)} + 1$
9. $\frac{x+3}{x+1} + \frac{x-2}{x} = 2$
10. $\frac{x-1}{x+3} - \frac{x}{x-3} = \frac{7x-3}{9-x^2}$
11. $5 + \frac{96}{x^2-16} = \frac{2x-1}{x+4} + \frac{3x-1}{x-4}$
12. $\frac{2x}{2x-1} + \frac{x}{2x+1} = 1 + \frac{4}{(2x-1)(2x+1)}$
13. $\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2-2x}$
14. $\frac{x}{2x-6} + \frac{x}{2x+2} = \frac{2x+4}{x^2-2x-3}$
15. $\frac{x}{2} - \frac{7x+5}{3} - \frac{4x}{5} > -8$
16. $3x+3 < 5(x+1) - 2$
17. $\frac{2x-3}{4} - \frac{x+1}{3} > \frac{1}{2} - \frac{3-x}{5}$
18. $\frac{x+1}{x+3} > 1$
19. $(x^2+1)(3x-2) \leq 0$
20. $(x-2)(x+1) \geq 0$
21. $\frac{2x-1}{x-3} \leq 2$

DẠNG 4. HÌNH HỌC

Bài 22. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 6cm$, $AC = 8cm$, đường cao AH , phân giác BD cắt nhau tại I .

- a) Chứng minh: $\triangle ABH \sim \triangle CBA$
- b) Tính AD , DC
- c) Chứng minh: $AB \cdot BI = BD \cdot HB$
- d) Tính diện tích $\triangle BHI$

Bài 23. Cho góc xOy . Trên Ox lấy 2 điểm A và B sao cho $OA = 3cm$, $OB = 8cm$. Trên Oy lấy 2 điểm C và D sao cho $OC = 4cm$, $OD = 6cm$.

- a) Chứng minh: $\triangle OAD \sim \triangle OCB$
- b) Gọi I là giao điểm của AD và BC . Chứng minh: $IA \cdot ID = IB \cdot IC$
- c) Tính tỉ số diện tích của $\triangle IAB$ và $\triangle ICD$

Bài 24. Cho tam giác ABC , các đường cao BH và CE cắt nhau tại H . Chứng minh rằng:

- a) $AE \cdot AB = AD \cdot AC$
- b) $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$
- c) Tính diện tích $\triangle ABC$ biết $AC = 6cm$, $BC = 5cm$, $CD = 3cm$
- d) $BE \cdot BA + CD \cdot CA = BC^2$

d) Qua trung điểm M của cạnh BC kẻ đường thẳng song song với AD và cắt cạnh AC tại E, cắt tia BA tại F. Chứng minh $BF = CE$

Bài 32. Cho hình chữ nhật $ABCD$. M là hình chiếu của A trên BD .

- Chứng minh: $\triangle ABD$ đồng dạng với $\triangle MAD$
- Nếu $AB = 8\text{cm}$, $AD = 6\text{cm}$, tính đoạn DM .
- Đường thẳng AM cắt các đường thẳng DC và BC thứ tự tại N và P . Chứng minh: $AM^2 = MN.MP$
- Lấy điểm E trên cạnh AB , F trên cạnh BC , EF cắt BD ở K . Chứng minh:
$$\frac{AB}{BE} + \frac{BC}{BF} = \frac{BD}{BK}$$

Bài 33. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). D là trung điểm của BC . Đường thẳng qua D và vuông góc với BC cắt các đường thẳng AC và AB theo thứ tự tại E và F .

- Chứng minh $\triangle AEF$ đồng dạng với $\triangle DEC$ từ đó suy ra $EA.EC = ED.EF$
- Chứng minh: $\widehat{ADE} = \widehat{ECF}$
- Chứng minh $CE.CA + BA.BF = BC^2$
- Trên tia đối của tia CB lấy điểm K bất kì, đường thẳng d tùy ý đi qua K cắt các đoạn FC và FB lần lượt tại M và N . Chứng minh $\frac{BK}{BN} - \frac{CK}{CM}$ không phụ thuộc vị trí điểm K và đường thẳng d .

Bài 34. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH .

- Chứng minh $\triangle ABH$ đồng dạng với $\triangle CAH$, từ đó suy ra $AH^2 = BH.CH$
- Cho $BH = 4\text{cm}$, $BC = 13\text{cm}$. Tính AH , AB
- Gọi E là điểm tùy ý trên cạnh AB , đường thẳng qua H và vuông góc với HE cắt cạnh AC tại F . Chứng minh: $AE.CH = AH.FC$
- Tìm vị trí của điểm E trên cạnh AB để tam giác EHF có diện tích nhỏ nhất.

DẠNG 5. CÁC BÀI TOÁN KHÁC

Bài 29. Tìm GTLN hoặc GTNN của các biểu thức sau:

a) $A = 1 + 6x - x^2$

b) $B = -2x^2 + 6x + 8$

c) $C = x^2 + 3y^2 - 2xy - 2y$

d) $D = 2x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 2y + 2$

e) $E = x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 2x + 12y + 6z + 24$

f) $F = \frac{7}{10x - x^2 - 30}$

g) $G = \frac{6x + 17}{x^2 + 2}$

h) $H = \frac{(2 + x^2)(8 + x^2)}{x^2}$

i) $I = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3}$

Bài 30. Tìm giá trị của m để:

a) Phương trình $\frac{m(x-1)+2x}{x-2} = 1$ có nghiệm lớn hơn 1.

b) Phương trình $\frac{m(x-1)+x}{x+1} = 2$ có nghiệm nhỏ hơn 1.

Bài 31. Chứng minh với mọi x phương trình $|x+1| + |2-x| = -4x^2 + 12x - 10$ vô nghiệm.

Bài 32. Tìm các giá trị nguyên của x để $A = \frac{10x^2 - 7x - 5}{2x - 5}$ có giá trị nguyên.

Bài 33. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $P = (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$ với $a, b > 0$

b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ với $\forall a, b, c$

c) $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ với $a + b = 1$

d) $a^2 + 5b^2 - 4ab + 2a - 6b + 2 \geq 0 \quad \forall a, b$

e) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ với $\forall a, b, c \neq 0$.

Bài 34. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

Bài 35. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a + b + c \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $A = a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Bài 36. Cho $x > 1; y > 1$ và $x + y = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $S = 3x + 4y + \frac{5}{x-1} + \frac{9}{y-1}$