SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO **ĐĂK LĂK**	**KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH** **NĂM HỌC 2016 – 2017** **MÔN THI: TOÁN 9 – THCS**
ĐỀ CHÍNH THỨC	*Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)* **Ngày thi: 05/4/2017**

Bài 1: (4 điểm)

1) Cho số thực a, mà a > 2. Rút gọn biểu thức: $\mathrm{A}=\frac{1}{\mathrm{a}}\cdot\left[\frac{(\mathrm{a}-1)\sqrt{\mathrm{a}-1}+1}{\sqrt{\mathrm{a}+2\sqrt{\mathrm{a}-1}}}+\frac{(\mathrm{a}-1)\sqrt{\mathrm{a}-1}-1}{\sqrt{\mathrm{a}-2\sqrt{\mathrm{a}-1}}}\right]$

2) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2-3x\sqrt{y}+3\sqrt{y}=1 \\ \dfrac{16}{x}-3\sqrt{y}=5 \end{cases}$

Bài 2 : (4 điểm)

1) Tìm m để phương trình $x^2+(2m+1)x+3m-1=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=5$

2) Cho số thực b thỏa mãn điều kiện đa thức $P(x)=x^2+bx+2017$ có giá trị nhỏ nhất là một số thực dương. Chứng minh cả hai phương trình $4x^2-12\sqrt{10}x+b=0$ và $4x^2-12\sqrt{10}x-b=0$ đều có hai nghiệm phân biệt.

Bài 3: (4 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình $1+2^x=y^2$

2) Với mỗi số tự nhiên n, ta đặt $M(n)=2^{n^2}+2^{4n^4+1-n^2}$. Chứng minh rằng số $2^{M(n)}-8$ luôn chia hết cho 31.

Bài 4: (4 điểm) Cho đường tròn (O) có tâm O. Dây AB cố định không phải đường kính. Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Trên cung nhỏ AB lấy hai điểm C, E sao cho góc CIA và EIB là các góc nhọn. CI cắt đường tròn (O) tại điểm D khác C. EI cắt đường tròn (O) tại điểm F khác E. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C và D cắt nhau tại M; các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại E và F cắt nhau tại N. Nối OM cắt CD tại P và ON cắt EF tại Q. Chứng minh rằng:

1) Tứ giác PQNM nội tiếp.

2) MN song song với AB.

Bài 5: (2 điểm) Cho tam giác ABC cân tại C, có góc ở đỉnh là 36^0. Chứng minh $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bài 6: (2 điểm) Cho hai số thực a, b thay đổi sao cho $1\le \mathrm{a}\le 2; 1\le \mathrm{b}\le 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\left(a+b^2+\frac{4}{a^2}+\frac{2}{b}\right)\left(b+a^2+\frac{4}{b^2}+\frac{2}{a}\right)$

BÀI GIẢI

Bài 1: (4 điểm)

1) $A=\frac{1}{a}\cdot\left[\frac{(a-1)\sqrt{a-1}+1}{\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}}+\frac{(a-1)\sqrt{a-1}-1}{\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}}\right]=\frac{1}{a}\cdot\left[\frac{\left(\sqrt{a-1}\right)^3+1}{\sqrt{\left(\sqrt{a-1}+1\right)^2}}+\frac{\left(\sqrt{a-1}\right)^3-1}{\sqrt{\left(\sqrt{a-1}-1\right)^2}}\right]$

$$=\frac{1}{a}\cdot\left[\frac{\left(\sqrt{a-1}+1\right)\left(a-1-\sqrt{a-1}+1\right)}{\sqrt{a-1}+1}+\frac{\left(\sqrt{a-1}-1\right)\left(a-1+\sqrt{a-1}+1\right)}{\sqrt{a-1}-1}\right]$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\left(a-\sqrt{a-1}+a+\sqrt{a-1}\right)=2\quad\left(\text{do } a>2\Rightarrow a-1>0,\ \sqrt{a-1}-1>0\right)$$

2) $\begin{cases}x^2-3x\sqrt{y}+3\sqrt{y}=1\\ \frac{16}{x}-3\sqrt{y}=5\end{cases}$ (*) (ĐK: $x\neq 0, y\geq 0$)

Ta có $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)\left(x-3\sqrt{y}+1\right)=0\\ \frac{16}{x}-3\sqrt{y}=5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=0\\ \frac{16}{x}-3\sqrt{y}=5\end{cases}\quad(1)\\ \begin{cases}x-3\sqrt{y}+1=0\\ \frac{16}{x}-3\sqrt{y}=5\end{cases}\quad(2)\end{array}\right.$

Giải $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ 3\sqrt{y}=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=\frac{121}{9}\end{cases}$ (TMĐK)

Giải $(2)\begin{cases}x=3\sqrt{y}-1\\ \frac{16}{3\sqrt{y}-1}-3\sqrt{y}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\sqrt{y}-1\\ 3y+4\sqrt{y}-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\sqrt{y}-1\\ \left(\sqrt{y}-1\right)\left(3\sqrt{y}+7\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\sqrt{y}-1\\ \sqrt{y}-1=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$ (TMĐK) $\left(3\sqrt{y}+7\neq 0 \text{ vì } y\geq 0\right)$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $\begin{cases}x=1\\ y=\frac{121}{9}\end{cases}$ và $\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$

Bài 2 : (4 điểm)

1) Ta có: $\Delta=(2m+1)^2-4(3m-1)=4(m-1)^2+1>0$ với mọi m. Nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m. Theo Vi ét, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-(2m+1)\\ x_1x_2=3m-1\end{cases}$

Khi đó $x_1^2+x_2^2=5\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=5$

$$\Leftrightarrow(2m+1)^2-2(3m-1)=5\Leftrightarrow 2m^2-m-1=0\Leftrightarrow(m-1)(2m+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

2) $P(x)=x^2+bx+2017=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+2017-\frac{b^2}{4}\geq 2017-\frac{b^2}{4}$. Do đó $Min\,P(x)=2017-\frac{b^2}{4}$.

Ta có $2017-\dfrac{b^2}{4}>0 \Leftrightarrow b^2<4\cdot 2017 \Leftrightarrow -2\sqrt{2017}<b<2\sqrt{2017}$

Phương trình: $4x^2-12\sqrt{10}x+b=0$ có $\Delta_1'=360-4b$

Phương trình: $4x^2-12\sqrt{10}x-b=0$ có $\Delta_2'=360+4b$

Mà $-2\sqrt{2017}<b<2\sqrt{2017} \Rightarrow \begin{cases} 360-8\sqrt{2017}<360-4b<360+8\sqrt{2017} \\ 360-8\sqrt{2017}<360+4b<360+8\sqrt{2017} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1'>0 \\ \Delta_2'>0 \end{cases}$

Vậy cả hai phương trình đều có hai nghiệm phân biệt.

Bài 3: (4 điểm)

1) $1+2^x=y^2 \Leftrightarrow (y+1)(y-1)=2^x \Rightarrow \begin{cases} y+1=2^m & (1) \\ y-1=2^n & (2) \\ m+n=x \end{cases}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2^m-2^n=2=2^2-2 \Rightarrow m=2, n=1 \Rightarrow x=3, y=3$

2) +) Nếu n chẵn $\Rightarrow$ $n^2 \vdots 4 \Rightarrow n^2=4t\,(t\in N) \Rightarrow 2^{n^2}=2^{4t}=16^t=5k_1+1\,(k_1\in N)$

và $4n^4+1-n^2=4p+1\,(p\in N) \Rightarrow 2^{4n^4+1-n^2}=2^{4p+1}=2\cdot 16^p=5k_2+2\,(k_2\in N)$

Nên $M(n)=5k+3\,(k\in N) \Rightarrow 2^{M(n)}-8=2^{5k+3}-8=8(32^k-1) \vdots 31$ **(1)**

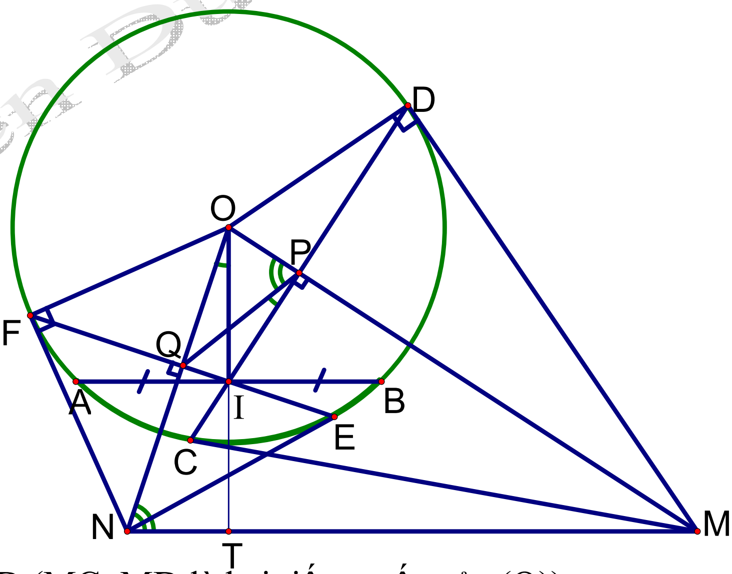
+) Nếu n lẽ $\Rightarrow$ $n^2=4t+1\,(t\in N) \Rightarrow 2^{n^2}=2^{4t+1}=2\cdot 16^t=5k_1+2\,(k_1\in N)$

và $4n^4+1-n^2=4p\,(p\in N) \Rightarrow 2^{4n^4+1-n^2}=2^{4p}=16^p=5k_2+1\,(k_2\in N)$

Nên $M(n)=5k+3\,(k\in N) \Rightarrow 2^{M(n)}-8=2^{5k+3}-8=8(32^k-1) \vdots 31$ **(2)**

Từ (1) và (2) suy ra $2^{M(n)}-8$ luôn chia hết cho 31.

Bài 4: (4 điểm)



1) Tứ giác PQNM nội tiếp.

Ta có: OC = OD (bán kính), MC = MD (MC, MD là hai tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow$ OM là trung trực của CD $\Rightarrow$ OM $\perp$ DP

Xét ΔODM: $\widehat{ODM}=90^0$ (MD là tiếp tuyến của (O) tại D), OM $\perp$ DP (cmt)

$\Rightarrow$ OD^2 = OP.OM (a)

Chứng minh tương tự có: OF^2 = OQ.ON (b). Lại có OD = OF (bán kính)

Từ a), b), c) $\Rightarrow$ OP.OM = OQ.ON $\Rightarrow$ $\dfrac{OP}{OQ}=\dfrac{ON}{OM}$

Xét ΔOPQ và ΔONM có: $\hat{O}$ (góc chung); $\dfrac{OP}{OQ}=\dfrac{ON}{OM}$ (cmt)

Vậy $\Delta OPQ \backsim \Delta ONM$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{OPQ} = \widehat{ONM}$ $\Rightarrow$ tứ giác PQNM nội tiếp (đpcm)

2) MN song song với AB.

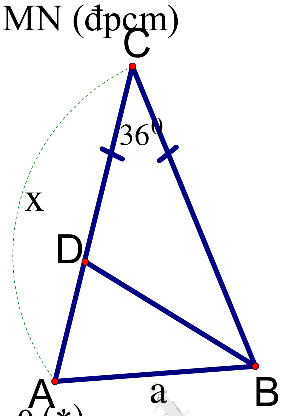
Tứ giác OPIQ có: $\widehat{OPI} = \widehat{OQI} = 90^0$ (theo câu a)

Vậy tứ giác OPIQ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QOI} = \widehat{QPI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{QI}$)

Lại có $\widehat{ONM} = \widehat{OPQ}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{QOI} + \widehat{ONM} = \widehat{QPI} + \widehat{OPQ} = \widehat{OPI} = 90^0$ (do OM $\perp$ DP)

$\Rightarrow \Delta ONT$ vuông tại T (T là giao điểm của OI và MN)

$\Rightarrow$ OI $\perp$ MN, mặt khác OI $\perp$ AB (vì $IA = IB = \frac{1}{2}AB$ (gt)). Vậy AB // MN (đpcm)



Bài 5: (2 điểm)

Ta có $\widehat{CAB} = \widehat{CBA} = \frac{180^0 - \widehat{ACB}}{2} = \frac{180^0 - 36^0}{2} = 72^0$ (ΔABC cân tại C)

Kẻ phân giác BD của góc ABC $\Rightarrow \widehat{CBD} = \widehat{ABD} = 36^0$

Chứng minh được ΔBDC cân tại D, ΔABD cân tại B

Đặt AC = BC = x, AB = BD = CD = a (x, a > 0)

Mặt khác BD là phân giác của ΔABC

nên $\frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{CD + AD}{BC + AB} = \frac{AC}{BC + AB} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{x + a} \Rightarrow x^2 - ax - a^2 = 0\,(*)$

Giải phương trình (*) ta được $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$ (vì x > 0) $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)a}{2} : a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bài 6: (2 điểm) Áp dụng BĐT $xy \le \frac{(x+y)^2}{4}$

Ta có: $A = \left(a + b^2 + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b}\right)\left(b + a^2 + \frac{4}{b^2} + \frac{2}{a}\right) \le \frac{\left(a + \frac{2}{a} + b + \frac{2}{b} + a^2 + \frac{4}{a^2} + b^2 + \frac{4}{b^2}\right)^2}{4}$

Đặt $a + \frac{2}{a} = x \Rightarrow a^2 + \frac{4}{a^2} = x^2 - 4; b + \frac{2}{b} = y \Rightarrow b^2 + \frac{4}{b^2} = y^2 - 4$

Lại có $1 \le a \le 2, 1 \le b \le 2$ suy ra

$$(a-1)(a-2) \le 0 \Rightarrow a^2 \le 3a - 2 \Rightarrow a + \frac{2}{a} = \frac{a^2 + 2}{a} \le \frac{3a - 2 + 2}{a} = 3 \Rightarrow 0 < x \le 3$$

$$(b-1)(b-2) \le 0 \Rightarrow b^2 \le 3b - 2 \Rightarrow b + \frac{2}{b} = \frac{b^2 + 2}{b} \le \frac{3b - 2 + 2}{b} = 3 \Rightarrow 0 < y \le 3$$

Nên $A \le \frac{\left(x + y + x^2 + y^2 - 8\right)^2}{4} \le \frac{(3 + 3 + 9 + 9 - 8)^2}{4} = 64$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a + b^2 + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b} = b + a^2 + \frac{4}{b^2} + \frac{2}{a} \\ (a-1)(a-2) = 0 \\ (b-1)(b-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 1 \\ a = b = 2 \end{array}\right.$.

Vậy Max(A) = 64 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 1 \\ a = b = 2 \end{array}\right.$

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
ĐĂK LĂK

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
NĂM HỌC 2013 – 2014
MÔN THI: TOÁN 9 – THCS
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi: 28/3/2014

Bài 1: (4 điểm)

a) Chứng minh rằng $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$ là một số nguyên

b) Cho số n nguyên dương tùy ý. Xét ba số tự nhiên $a=11\ldots1$ (có 2n chữ số 1), $b=11\ldots1$ (có n + 1 chữ số 1) và $c=66\ldots6$ (có n chữ số 6). Chứng minh rằng $a+b+c+8$ là một số chính phương.

Bài 2: (4 điểm)

a) Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $x^2+y^2\le x+y$. Chứng minh $x+y\le 2$

b) Giải phương trình $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=15$

Bài 3 : (4 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y+z)^2=3(xy+yz+zx)\\ x^{2013}+y^{2013}+z^{2013}=3^{2014}\end{cases}$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình $x^3-y^3+2x^2+3x+1=0$

Bài 4: (2 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|+4|x-4|+5|x-5|$

Bài 5: (4 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 8 cm, AC = 6 cm. Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác tiếp xúc với hai cạnh AB, BC lần lượt tại E, F. Tia AO cắt EF tại K. Chứng minh tứ giác KFCO nội tiếp và tính diện tích tam giác OKC.

Bài 6: (2 điểm) Cho tam giác ABC đều. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $\widehat{BAM}=15^0$. Đường thẳng qua điểm C và song song với đường thẳng AB cắt đường thẳng AM tại điểm N. Chứng minh rằng $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{4}{3AB^2}$

BÀI GIẢI

Bài 1: (4 điểm)

a) Đặt $m=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} \Leftrightarrow m^3=18+3m \Leftrightarrow (m-3)\left[\left(m+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right]=0$

$\Leftrightarrow m-3=0 \Leftrightarrow m=3$ (Vì $\left(m+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\neq 0$ với mọi m)

b) Ta có $a+b+c+8=\frac{10^{2n}-1}{9}+\frac{10^{n+1}-1}{9}+6\cdot\frac{10^n-1}{9}+8=\frac{10^{2n}+16\cdot 10^n+64}{9}=\left(\frac{10^n+8}{3}\right)^2$

mà $10^n+8 \,\vdots\, 3$ với mọi n nguyên dương, nên $\frac{10^n+8}{3}\in N$. Do đó $a+b+c+8$ là một số chính phương.

Bài 2: (4 điểm)

a) Ta có $(x-1)^2+(y-1)^2=x^2+y^2-2(x+y)+2\geq 0$

$\Rightarrow x+y\geq x^2+y^2\geq 2(x+y)-2 \Rightarrow x+y\leq 2$. Dấu '=' xảy ra khi $x=y=1$

b) ĐK : $x\neq -1$

Ta có $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=15 \Leftrightarrow \left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2+2\cdot\frac{x^2}{x+1}-15=0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2+2\cdot\frac{x^2}{x+1}-15=0$

$\Leftrightarrow t^2+2t-15=0 \Leftrightarrow (t-3)(t+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-5 \end{array}\right. \left(t=\frac{x^2}{x+1}\right)$

+) $t=3 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}=3 \Leftrightarrow x^2-3x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$ (TMĐK)

+) $t=-5 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}=-5 \Leftrightarrow x^2+5x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$ (TMĐK)

Vậy phương trình có bốn nghiệm $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$, $x_{3,4}=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$

Bài 3 : (4 điểm)

a) Ta có $(x+y+z)^2=3(xy+yz+zx) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=0 \Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0 \Rightarrow x=y=z$

Từ đó ta có $3x^{2013}=3y^{2013}=3z^{2013}=3^{2014} \Rightarrow x=y=z=3$

Vậy hệ phương trình có một nghiệm duy nhất $(x,y,z)=(3;3;3)$

b) Ta có $x^3-y^3+2x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow y^3=x^3+2x^2+3x+1$

Mà $x^3-3x^2+3x-1<x^3+2x^2+3x+1\leq x^3+3x^2+3x+1$

$\Leftrightarrow (x-1)^3<y^3\leq(x+1)^3 \Leftrightarrow x-1<y\leq x+1$

Do đó $\left[\begin{array}{l} y=x \\ y=x+1 \end{array}\right.$ (vì $x,y\in Z$)

+) $y=x \Leftrightarrow x^3=x^3+2x^2+3x+1 \Leftrightarrow (x+1)(2x+1)=0 \Rightarrow x=y=-1$ (Vì $x\in Z$ nên $2x+1\neq 0$)

+) $y=x+1 \Leftrightarrow (x+1)^3=x^3+2x^2+3x+1 \Leftrightarrow x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy các cặp số nguyên (x; y) cần tìm là: $(-1;-1),(0;1)$

Bài 4: (2 điểm)

Áp dụng bất đẳng thức $|A|+|B|\ge|A+B|$. Đẳng thức xảy ra khi $AB\ge 0$, ta có:

$|x-1|+|x-5|=|x-1|+|5-x|\ge 4$, dấu '=' xảy ra khi $1\le x\le 5$

$2|x-2|+2|x-4|=2\left(|x-2|+|4-x|\right)\ge 2\cdot 2=4$, dấu '=' xảy ra khi $2\le x\le 4$

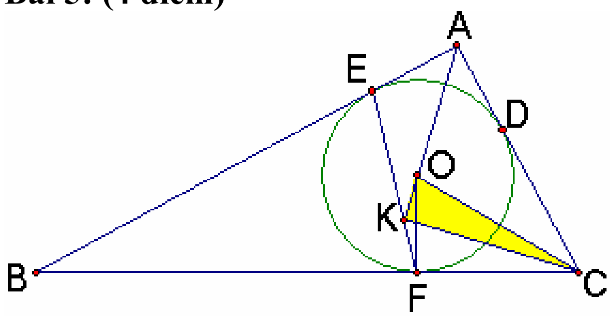
$3|x-3|+3|x-5|=3\left(|x-3|+|5-x|\right)\ge 3\cdot 2=6$, dấu '=' xảy ra khi $3\le x\le 5$

$|x-4|+|x-5|=|x-4|+|5-x|\ge 1$, dấu '=' xảy ra khi $4\le x\le 5$

$|x-4|\ge 0$, dấu '=' xảy ra khi $x=4$

$\Rightarrow f(x)\ge 4+4+6+1=15$, dấu '=' xảy ra khi $x=4$. Vậy Min f(x) = 15 khi $x=4$

Bài 5: (4 điểm)



Vì O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, nên ta có:

$\widehat{OAC}=\frac{1}{2}\widehat{BAC};\widehat{OCA}=\frac{1}{2}\widehat{BCA}$

Do đó $\widehat{AOC}=180^0-\left(\widehat{OAC}+\widehat{OCA}\right)=180^0-\frac{1}{2}\left(\widehat{BAC}+\widehat{BCA}\right)=180^0-\frac{1}{2}\left(180^0-\widehat{ABC}\right)=90^0+\frac{1}{2}\widehat{ABC}$

Vì BE, BF là tiếp tuyến của (O) nên tam giác BEF cân tại B

Do đó $\widehat{BFE}=\frac{180^0-\widehat{ABC}}{2}=90^0-\frac{\widehat{ABC}}{2}\Rightarrow\widehat{CFE}=180^0-\widehat{BFE}=90^0+\frac{\widehat{ABC}}{2}$

Nên $\widehat{AOC}=\widehat{CFE}$. Vậy tứ giác KFCO là tứ giác nội tiếp

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10\,cm$

Vì (O) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC, nên ta có:

AE = AD, BE = BF, CD = CF (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Do đó $AB+AC-BC=(AE+BE)+(AD+CD)-(BF+CF)=2AD$

$\Rightarrow AD=\frac{AB+AC-BC}{2}=\frac{8+6-10}{2}=2\,cm$

$\Delta AOD,\widehat{ADO}=90^0,\widehat{OAD}=45^0$ nên vuông cân tại D $\Rightarrow OA=\sqrt{2}AD=2\sqrt{2}\,cm$

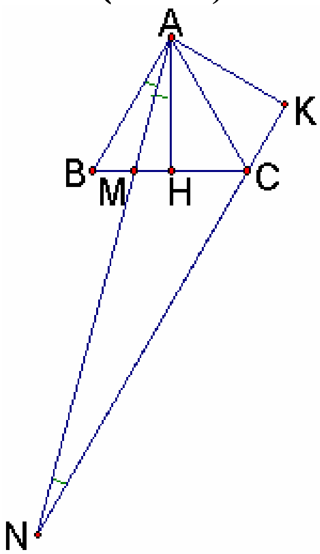
$\Delta AKC,\widehat{AKC}=90^0$ ($\widehat{AKC}=\widehat{OFC}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn))

$\widehat{KAC}=45^0$ nên ΔAKC vuông cân tại K $\Rightarrow AK=CK=\frac{AC}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}\,cm$

Do đó $OK=AK-OA=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}\,cm$

$\Delta OKC,\widehat{OKC}=90^0\Rightarrow S_{OKC}=\frac{1}{2}OK\cdot CK=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=3\,cm^2$

Bài 6: (2 điểm)



Kẻ AH $\perp$ BC, AK $\perp$ CN

Ta có $AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2}, \widehat{BAH} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\cdot 60^0 = 30^0$ (đường cao tam giác đều cạnh AB)

Do CN // AB $\widehat{ANK} = \widehat{BAM} = 15^0, \widehat{BCN} = \widehat{ABC} = 60^0$

nên $\widehat{ACK} = 180^0 - \left(\widehat{ACB} + \widehat{BCN}\right) = 180^0 - \left(60^0 + 60^0\right) = 60^0$

$\Delta AKC = \Delta AHC$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow AK = AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$

$\Delta AHM, \widehat{AHM} = 90^0, \widehat{MAH} = \widehat{BAH} - \widehat{BAM} = 30^0 - 15^0 = 15^0$

Nên $\cos\widehat{MAH} = \frac{AH}{AM} \Rightarrow \frac{1}{AM} = \frac{\cos\widehat{MAH}}{AH} = \frac{\cos 15^0}{\frac{AB\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\cos 15^0}{AB\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{AM^2} = \frac{4\cos^2 15^0}{3AB^2}\,(a)$

$\Delta AKN, \widehat{AKN} = 90^0, \widehat{ANK} = 15^0$

nên $\sin\widehat{ANK} = \frac{AK}{AN} \Rightarrow \frac{1}{AN} = \frac{\sin\widehat{ANK}}{AK} = \frac{\sin 15^0}{\frac{AB\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sin 15^0}{AB\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{AN^2} = \frac{4\sin^2 15^0}{3AB^2}\,(b)$

Từ (a) và (b) ta có $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{4\cos^2 15^0}{3AB^2} + \frac{4\sin^2 15^0}{3AB^2} = \frac{4\left(\cos^2 15^0 + \sin^2 15^0\right)}{3AB^2} = \frac{4}{3AB^2}$

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
ĐĂK LĂK

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
NĂM HỌC 2014 – 2015
MÔN THI: TOÁN 9 – THCS
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi: 03/4/2015

Bài 1: (4 điểm) Cho biểu thức $P=\dfrac{x\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$

a) Tìm điều kiện của x để P có nghĩa.
b) Rút gọn biểu thức P.
c) Tìm giá trị của x để P đạt GTNN

Bài 2 : (4 điểm)

a) Cho hai số thực a, b đều khác 0 và thỏa mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}$. Chứng minh phương trình $\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+bx+a\right)=0$ với ẩn x luôn có nghiệm.

b) Biết $\left(\sqrt{x^2+2015}+x\right)\left(\sqrt{y^2+2015}+y\right)=2015$. Tính $x+y$

Bài 3: (4 điểm)

a) Tìm tất cả số chính phương có 4 chữ số biết rằng khi tăng mỗi chữ số thêm một đơn vị ta vẫn thu được một số chính phương. *(Một số được gọi là số chính phương nếu nó là bình phương của một số tự nhiên nào đó)*

b) Tìm các số nguyên a để phương trình $x^2-(3+2a)x+40-a=0$ có nghiệm nguyên. Hãy tìm các nghiệm nguyên của phương trình ứng với giá trị a tìm được.

Bài 4: (4 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O; R). Biết hai đường cao AI và BE của tam giác đó cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng EI $\perp$ OC
b) Biết CH = R. Tính góc C của tam giác ABC

Bài 5: (2 điểm) Cho tam giác ABC có đường cao AH. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Hạ BE, CF lần lượt vuông góc với HN, HM. Chứng minh ba đường thẳng AH, BE, CF đồng quy.

Bài 6: (2 điểm) Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn a + b + c = 3. Chứng minh: $a^3+b^3+c^3+ab+bc+ca\ge 6$

BÀI GIẢI

Bài 1: (4 điểm)

a) P có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

b) $P = \dfrac{x\sqrt{x} - \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 - x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{x\sqrt{x} - \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x(x-1)}} = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$

c) $P = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \geq 2 \left(A \geq 0, B \geq 0: \quad A + B \geq 2\sqrt{AB} \right)$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow x = 2$ (TMĐK)

Vậy $x = 2$ thì P đạt GTNN là 2

Bài 2 : (4 điểm)

a) Từ giả thiết $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow ab = 2(a+b) \Rightarrow 2ab - 4(a+b) = 0$

Ta có $(x^2 + ax + b)(x^2 + bx + a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + ax + b = 0\,(1) \\ x^2 + bx + a = 0\,(2) \end{array} \right.$

có $\Delta_1 + \Delta_2 = (a^2 - 4b) + (b^2 - 4a) = (a^2 + b^2) - 4(a+b) = (a-b)^2 + 2ab - 4(a+b) = (a-b)^2 \geq 0$

$\Rightarrow \Delta_1 \geq 0 \cap \Delta_2 \geq 0$ nên (1) có nghiệm hoặc (2) có nghiệm. Do đó $(x^2 + ax + b)(x^2 + bx + a) = 0$ luôn có nghiệm.

b) Ta có $\left(\sqrt{x^2 + 2015} + x\right)\left(\sqrt{y^2 + 2015} + y\right) = 2015$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + 2015} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 2015} + x\right)\left(\sqrt{y^2 + 2015} + y\right) = 2015\left(\sqrt{x^2 + 2015} - x\right)$

$\Rightarrow \sqrt{y^2 + 2015} + y = \sqrt{x^2 + 2015} - x\,(1)$

Tương tự $\left(\sqrt{x^2 + 2015} + x\right)\left(\sqrt{y^2 + 2015} + y\right) = 2015$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + 2015} + x\right)\left(\sqrt{y^2 + 2015} + y\right)\left(\sqrt{y^2 + 2015} - y\right) = 2015\left(\sqrt{y^2 + 2015} - y\right)$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 2015} + x = \sqrt{y^2 + 2015} - y\,(2)$

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được $x + y = -(x + y) \Rightarrow x + y = 0$

Bài 3: (4 điểm)

a) Gọi các số phải tìm là $\overline{abcd} = k^2\ (k \in N, 32 \leq k \leq 99)$

Theo đề có $\overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} = m^2\ (m \in N)$

$\Rightarrow m^2 - k^2 = 1111 \Leftrightarrow (m-k)(m+k) = 1 \cdot 1111 = 11 \cdot 101\ (m - k < m + k)$

$\Rightarrow \begin{cases} m - k = 1 \\ m + k = 1111 \end{cases} \Rightarrow k = 555$ (loại); $\begin{cases} m - k = 11 \\ m + k = 101 \end{cases} \Rightarrow k = 45$ (chọn)

Do đó $\overline{abcd} = 45^2 = 2025$

b) Ta có: $\Delta = (3 + 2a)^2 - 4(40 - a) = 4a^2 + 16a - 151$.

Phương trình có nghiệm nguyên với a nguyên thì $4a^2 + 16a - 151 = k^2\ (k \in N)$

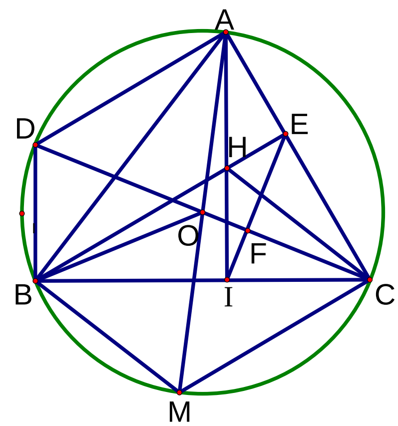
$\Leftrightarrow (2a+4)^2 - k^2 = 167 \Leftrightarrow (2a-k+4)(2a+k+4) = (-167)\cdot(-1) = 1\cdot 167$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a-k+4=-167 \\ 2a+k+4=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2a-k+4=1 \\ 2a+k+4=167 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-44 \\ a=40 \end{array}\right.$$

+) Với a = -44, phương trình trở thành $x^2+85x+84=0$ có nghiệm $x_1=-1, x_2=-84$

+) Với a = 40, phương trình trở thành $x^2-83x=0$ có nghiệm $x_1=0, x_2=83$

Bài 4: (4 điểm)



a) Chứng minh rằng EI ⊥ OC

Kẻ đường kính CD của (O), gọi F là giao điểm của CD và EI

Ta có $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AD}$ của (O))

Tứ giác ABIE có $\widehat{AIB} = \widehat{AEB} = 90^0$ (gt) nên tứ giác ABIE nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CEI} = \widehat{ABC}$

Do đó $\widehat{ACD} + \widehat{CEI} = \widehat{ABD} + \widehat{ABC} = \widehat{CBD} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra tam giác CEF vuông tại F hay EI ⊥ OC (đpcm)

b) Biết CH = R. Tính góc C của tam giác ABC

Kẻ đường kính AM của (O), ta có $\widehat{ABM} = \widehat{ACM} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên BM ⊥ AB, CM ⊥ AC mà CH ⊥ AB, BH ⊥ AC (do H là trực tâm ΔABC)

⇒ BM // CH, CM // BH do đó tứ giác BHCM là hình bình hành

⇒ BM = CH = R, lại có OB = OM = R nên OB = OM = BM = R. Vậy ΔOBM đều $\widehat{AMB} = 60^0$. Do đó $\widehat{ACB} = \widehat{AMB} = 60^0$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$ của (O))

<u>Cách khác</u>: Tứ giác CEHI có $\widehat{CEH} = \widehat{CIH} = 90^0$ nên tứ giác CEHI là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CHI} = \widehat{CEI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{CI}$)

mà $\widehat{CEI} = \widehat{ABC}$ (cmt), $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$)

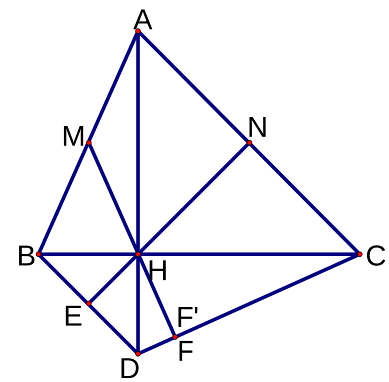
$\Rightarrow \widehat{CHI} = \widehat{CDA}$

Xét ΔCHI và ΔCDA: $\widehat{CHI} = \widehat{CDA}$, $\widehat{CIH} = \widehat{CAD} = 90^0$ nên ΔCHI ∽ ΔCDA

$$\Rightarrow \frac{CI}{CA} = \frac{CH}{CD} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

ΔAIC : $\widehat{AIC} = 90^0$, $\dfrac{CI}{CA} = \dfrac{1}{2}$ nên $\widehat{ACI} = 60^0$

Bài 5: (2 điểm)



Gọi D là giao điểm của AH và BE; F' là giao điểm của MH và CD

ΔAHB:

$\widehat{AHB} = 90^0, MA = MB = \dfrac{AB}{2}(gt) \Rightarrow MH = \dfrac{AB}{2} = MA = MB$

Nên ΔBMH cân tại M $\widehat{ABH} = \widehat{BHM}$

ΔAHC: $\widehat{AHC}=90^0, NA=NC=\dfrac{AC}{2}(gt)\Rightarrow NH=\dfrac{AC}{2}=NA=NC$

Nên ΔCNH cân tại N $\widehat{ACH}=\widehat{CHN}$

ΔBHD: $\widehat{BHD}=90^0, HE\perp BD(gt)\Rightarrow \widehat{BDA}=\widehat{BHE}$ (cùng phụ $\widehat{DHE}$)

Mà $\widehat{BHE}=\widehat{CHN}$ (đối đỉnh), $\widehat{CHN}=\widehat{ACH}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{BDA}=\widehat{ACH}=\widehat{ACB}$. Vậy tứ giác ABDC nội tiếp

Nên $\widehat{ADC}=\widehat{ABH}$, lại có $\widehat{ABH}=\widehat{BHM}$ (cmt), $\widehat{BHM}=\widehat{CHF'}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{ADC}=\widehat{CHF'}$

ΔCHD: $\widehat{CHD}=90^0$ nên $\widehat{ADC}+\widehat{DCH}=90^0\Rightarrow \widehat{CHF'}+\widehat{DCH}=90^0$ ⇒ΔCHF' vuông tại F'

⇒ CF' ⊥ MH mà CF ⊥ MH (gt) do đó F' ≡ F. Vậy AH, BE, CF đồng quy tại D

Bài 6: (2 điểm)

Chứng minh được $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\ge(ax+by+cz)^2$ (*)

Áp dụng (*) ta có: $(a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2)\ge(a+b+c)^2$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{3}=\dfrac{3^2}{3}=3\Rightarrow(a^2+b^2+c^2)^2\ge3(a^2+b^2+c^2)\,(a)$

Mặt khác $3(a^3+b^3+c^3)=(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)\ge(a^2+b^2+c^2)^2\,(b)$

Từ (a) và (b) ta có: $3(a^3+b^3+c^3)\ge3(a^2+b^2+c^2)\Rightarrow a^3+b^3+c^3\ge a^2+b^2+c^2\,(1)$

Lại có $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=\dfrac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\ge0$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\Rightarrow(a+b+c)^2\ge3(ab+bc+ca)\Rightarrow ab+bc+ca\le\dfrac{(a+b+c)^2}{3}=3\,(2)$

Từ (1) và (2) ta có $VT\ge a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)\ge3^2-3=6$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO **ĐĂK LĂK** **ĐỀ CHÍNH THỨC**	**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH** **NĂM HỌC 2015 – 2016** **MÔN THI: TOÁN 9 – THCS** *Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)* **Ngày thi: 05/4/2016**

Bài 1: (4 điểm)

1) Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x-5y=-20 \\ (1+x)(1+2x)(1+3x)=(1+3y)\left(1+3y+2x^2\right) \end{cases}$$

2) Tìm tất cả số thực m để phương trình: $x^2 - 2(2m + 1)x + 3m + 4 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

Bài 2 : (4 điểm)

1) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}\cdot\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}+\frac{\sqrt{y}}{y+1}+\frac{\sqrt{z}}{z+1}\right)$$

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M(1; 2) cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B đều khác gốc tọa độ O mà OA + OB = 6.

Bài 3: (4 điểm)

a) Tìm số tự nhiên có hai chữ số $\overline{ab}$ thỏa mãn $\overline{ab}+6=(a+b)^3$

b) Cho $a=\underbrace{111\ldots1}_{2017\,chu\,so\,1}$, $b=\underbrace{100\ldots05}_{2016\,chu\,so\,0}$. Chứng minh rằng số $M=ab+1$ là số chính phương.

Bài 4: (4 điểm) Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AB = 2R. Biết BC = CD và hai đường thẳng AD, BC cắt nhau tại F. Trên đường kính AB lấy điểm E sao cho AD = BE. Vẽ EH vuông góc với AD tại điểm H. Hai đường thẳng AC, EH cắt nhau tại k. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng AE. Chứng minh rằng:

1) AD. AF + BC. BF = $4R^2$.

2) Ba điểm D, I, K thẳng hàng.

Bài 5: (2 điểm) Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O và diện tích tam giác AOB bằng 9 cm^2, diện tích tam giác COD bằng 16 cm^2. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác ABCD.

Bài 6: (2 điểm) Với a, b, c là ba số thực thay đổi thỏa mãn ab + 7bc + ca = 188. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 5a^2 + 11b^2 + 5c^2$.

BÀI GIẢI

Bài 1: (4 điểm)

1) Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x-5y=-20 \\ (1+x)(1+2x)(1+3x)=(1+3y)\left(1+3y+2x^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-5y=-20 \\ (1+x)(1+2x)(1+3x)=(1+3y)\left(1+3y+2x^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5y=-20 \\ (1+3x)^2+2x^2(1+3x)=(1+3y)^2+2x^2(1+3y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5y=-20 \\ (1+3x)^2-(1+3y)^2=2x^2(1+3y)-2x^2(1+3x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5y=-20 \\ 3\left[2+3(x+y)\right](x-y)=-6x^2(x-y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5y=-20 \\ 3\left[2+3(x+y)\right](x-y)=-6x^2(x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5y=-20 \\ 3(x-y)\left[2+3(x+y)+2x^2\right]=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5y=-20 \\ \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ 2+3(x+y)+2x^2=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-5y=-20 \\ x-y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-5y=-20 \\ 2+3(x+y)+2x^2=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=5 \\ \begin{cases} y=\dfrac{x+20}{5} \\ 5x^2+9x+35=0\ (vo\ nghiem) \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có một nghiệm là $(5;5)$

2) Tìm tất cả số thực m để phương trình: $x^2 - 2(2m + 1)x + 3m + 4 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ P>0 \\ S>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2-(3m+4)>0 \\ 3m+4>0 \\ 2(2m+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(4m-3)>0 \\ m>-\dfrac{4}{3} \\ m>-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>\dfrac{3}{4} \end{array}\right. \\ m>-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m>\dfrac{3}{4}$$

Bài 2 : (4 điểm)

1) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}\cdot\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}+\frac{\sqrt{y}}{y+1}+\frac{\sqrt{z}}{z+1}\right)$$

Ta có $2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2-(x+y+z)=2^2-2=2 \Rightarrow \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$

Nên $x+1=x+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)$

tương tự: $y+1=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right);\quad z+1=\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$

Do đó: $P=\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}+\dfrac{\sqrt{y}}{y+1}+\dfrac{\sqrt{z}}{z+1}\right)$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)+\sqrt{y}\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)+\sqrt{z}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)=2$$

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M(1; 2) cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B đều khác gốc tọa độ O mà OA + OB = 6.

Phương trình đường thẳng có dạng y = ax + b (a, b $\neq$ 0, vì cắt Ox, Oy)

Vì đường thẳng đi qua điểm M(1; 2) nên có: a + b = 2 $\Rightarrow$ b = 2 – a

Đường thẳng y = ax + 2 – a cắt tia Ox tại điểm có hoành độ $\frac{a-2}{a}$, cắt tia Oy tại điểm có tung độ $2-a$. Nên $\begin{cases}\frac{a-2}{a}>0\\ 2-a>0\end{cases}\Leftrightarrow a<0$

Ta có OA + OB = 6 $\Leftrightarrow \frac{a-2}{a}+2-a=6\Leftrightarrow a^2+3a+2=0\Leftrightarrow (a+1)(a+2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-1\\ a=-2\end{array}\right.$ (TM)

+) Với a = –1, phương trình đường thẳng là : y = –x + 3

+) Với a = –2, phương trình đường thẳng là : y = –2x + 4

Bài 3: (4 điểm)

a) Tìm số tự nhiên có hai chữ số $\overline{ab}$ thỏa mãn $\overline{ab}+6=(a+b)^3$

Ta có $10\le\overline{ab}\le 99\Rightarrow 16\le\overline{ab}+6\le 105\Rightarrow 16\le (a+b)^3\le 105\Rightarrow 3\le a+b\le 4\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a+b=3\\ a+b=4\end{array}\right.$

Nên $\overline{ab}\in\{12;21;30;13;22;31\}$. Chỉ có $21+6=(2+1)^3$ là đúng. Vậy $\overline{ab}=21$

b) Cho $a=\underbrace{111\ldots1}_{2017\ chu\ so\ 1}$, $b=\underbrace{100\ldots05}_{2016\ chu\ so\ 0}$. Chứng minh rằng số $M=ab+1$ là số chính phương.

Ta có: $a=\underbrace{111\ldots1}_{2017\ chu\ so\ 1}=\frac{10^{2017}-1}{9}$; $b=\underbrace{100\ldots05}_{2016\ chu\ so\ 0}=10^{2017}+5$.

Do đó $M=ab+1=\frac{10^{2017}-1}{9}\cdot\left(10^{2017}+5\right)+1=\frac{\left(10^{2017}\right)^2+4\cdot10^{2017}-5}{9}+1=\frac{\left(10^{2017}\right)^2+4\cdot10^{2017}+4}{9}$

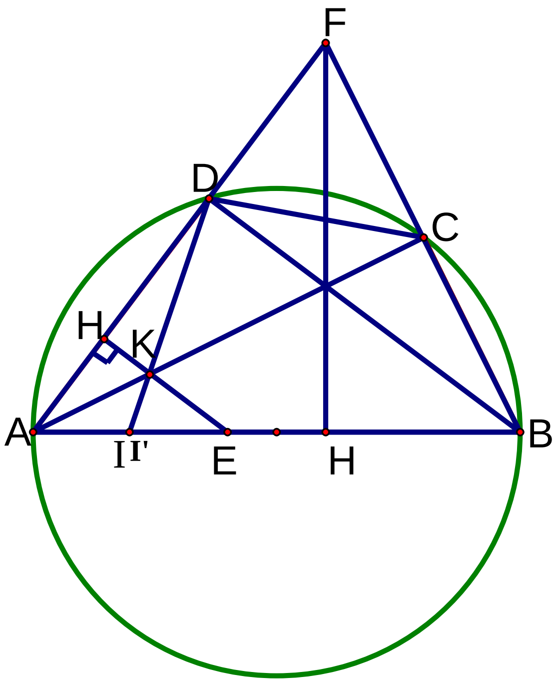
$$=\frac{\left(10^{2017}+2\right)^2}{9}=\left(\frac{10^{2017}+2}{3}\right)^2$$

Vì $10^{2017}+2\,\vdots\,3$ nên $\frac{10^{2017}+2}{3}\in N$. Do đó $M=ab+1$ là số chính phương.

Bài 4: (4 điểm) Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AB = 2R. Biết BC = CD và hai đường thẳng AD, BC cắt nhau tại F. Trên đường kính AB lấy điểm E sao cho AD = BE. Vẽ EH vuông góc với AD tại điểm H. Hai đường thẳng AC, EH cắt nhau tại k. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng AE. Chứng minh rằng:

1) AD. AF + BC. BF = 4R^2.

2) Ba điểm D, I, K thẳng hàng.



1) AD. AF + BC. BF = 4R².

Kẻ FH ⊥ AB (H ∈ AB), ta có: $ADB = ACB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét ΔADB và ΔAHF có: $ADB = AHF = 90^0$, A (góc chung)

Vậy ΔADB ∽ ΔAHF $\Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AH}{AF} \Rightarrow AD.AF = AB.AH\,(a)$

Xét ΔACB và ΔFHB có: $ACB = FHB = 90^0$, B (góc chung)

Vậy ΔACB ∽ ΔFHB $\Rightarrow \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{BH}{BF} \Rightarrow BC.BF = AB.BH\,(b)$

Từ a), b) $\Rightarrow AD.AF + BC.BF = AB(AH + BH) = AB^2 = 4R^2$ (đpcm)

2) Ba điểm D, I, K thẳng hàng.

Vì $BC = CD \Rightarrow BC = CD \Rightarrow BAC = CAD$ ⇒ AC là phân giác góc BAD.

Gọi I’ là giao điểm của DK với AB. (1)

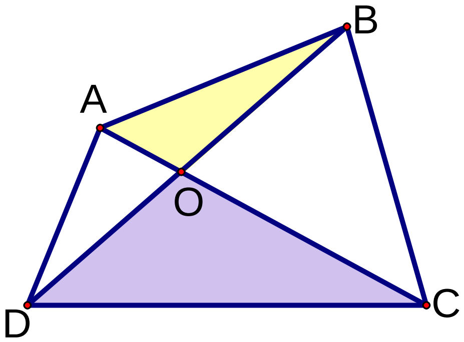
Xét ΔAI’D có AK là phân giác $DAI' \Rightarrow \dfrac{AI'}{AD} = \dfrac{KI'}{KD}(c)$

Xét ΔBI’D có EK // BD (EH ⊥ AD, BD ⊥ AD)$\Rightarrow \dfrac{KI'}{KD} = \dfrac{I'E}{BE}(c)$

Từ c), d) $\Rightarrow \dfrac{AI'}{AD} = \dfrac{I'E}{BE}$ mà AD = BE (gt) ⇒ AI’ = I’E ⇒ I’ ≡ I (vì AI = IE (gt)) (2)

Từ 1) và 2) suy ra D, I, K thẳng hàng (đpcm)

Bài 5: (2 điểm) Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O và diện tích tam giác AOB bằng 9 cm², diện tích tam giác COD bằng 16 cm². Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác ABCD.



Ta có: $\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \frac{S_{BOC}}{S_{COD}} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow S_{AOD} \cdot S_{BOC} = S_{AOB} \cdot S_{COD} = 9 \cdot 16 = 144$

Do đó $S_{AOD} + S_{BOC} \geq 2\sqrt{S_{AOD} \cdot S_{BOC}} = 2\sqrt{144} = 24$

Nên $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{COD} + S_{AOD} + S_{BOC} \geq 9 + 16 + 24 = 49$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow S_{AOD} = S_{BOC} \Leftrightarrow OA.OD = OB.OC \Leftrightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Leftrightarrow AB//CD$

Vậy Min $S_{ABCD} = 49$ cm^2 khi AB // CD.

Bài 6: (2 điểm) Với a, b, c là ba số thực thay đổi thỏa mãn ab + 7bc + ca = 188. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 5a^2 + 11b^2 + 5c^2$.

$$P = 5a^2 + 11b^2 + 5c^2 = \left(2a^2 + \frac{1}{2}b^2\right) + \left(\frac{21}{2}b^2 + \frac{14}{3}c^2\right) + \left(\frac{1}{3}c^2 + 3a^2\right)$$

$$\geq 2\sqrt{2a^2 \cdot \frac{1}{2}b^2} + 2\sqrt{\frac{21}{2}b^2 \cdot \frac{14}{3}c^2} + 2\sqrt{\frac{1}{3}c^2 \cdot 3a^2}$$

$$= 2ab + 14bc + 2ca = 2(ab + 7bc + ca) = 2 \cdot 188 = 376$$

Dấu "=" xảy ra $\begin{cases} 2a^2 = \frac{1}{2}b^2 \\ \frac{21}{2}b^2 = \frac{14}{3}c^2 \\ \frac{1}{3}c^2 = 3a^2 \\ ab + 7bc + ca = 188 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots\cdots$ (tự xử tiếp)

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO **ĐĂK LĂK** **ĐỀ CHÍNH THỨC**	**KỲ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH** **NĂM HỌC 2017 – 2018** **MÔN THI: TOÁN 9 – THCS** *Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)* **Ngày thi: 04/4/2018**

Bài 1: (4 điểm)

1) Thu gọn biểu thức $P=\dfrac{x-3+2\sqrt{x+4\sqrt{x}+4}}{x+3\sqrt{x}+2}$. Tìm x sao cho $P=\dfrac{2017}{2018}$

2) Giải phương trình $\left(x^2-4x\right)\left(x^2-4\right)=20$

Bài 2: (4 điểm)

1) Cho phương trình $x^2+2(2m-3)x+m^2=0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm khác 0 x_1,x_2 (chúng có thể trùng nhau) và biểu thức $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2) Cho parabol $(P): y=ax^2$. Tìm điều kiện của a để trên (P) có điểm $A\left(x_0;y_0\right)$ với hoành độ dương thỏa mãn điều kiện $\sqrt{x_0^2+1}-\sqrt{y_0+4}=x_0-\sqrt{y_0+3}$

Bài 3: (4 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn: $x^2-y^2+4x-2y=18$

2) Tìm tất cả các cặp số $(a;b)$ nguyên dương thỏa mãn hai điều kiện:

i) a,b đều khác 1 và ước số chung lớn nhất của a,b là 1.

ii) Số $N=ab(ab+1)(2ab+1)$ có đúng 16 ước số nguyên dương.

Bài 4: (4 điểm) Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E (D ≠ B, E ≠ C). BE cắt CD tại H. Kéo dài AH cắt BC tại F.

1) Chứng minh các tứ giác ADHE và BDHF là tứ giác nội tiếp.

2) Các đoạn thẳng BH và DF cắt nhau tại M, CH và EF cắt nhau tại N. Biết rằng tứ giác HMFN là tứ giác nội tiếp. Tính số đo $\widehat{BAC}$.

Bài 5: (2 điểm) Với x,y là hai số thực thỏa mãn $y^3+3y^2+5y+3=11\sqrt{9-x^2}-\sqrt{9x^4-x^6}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x-y+2018$.

Bài 6: (2 điểm) Cho tam giác đều ABC. Một điểm M nằm trong tam giác nhìn đoạn thẳng BC dưới một góc bằng 150^0. Chứng minh $MA^2\ge 2MB.MC$

-------------------- Hết --------------------

BÀI GIẢI

Bài 1: (4 điểm)

1) ĐK: $x \ge 0$.

$$P = \frac{x-3+2\sqrt{x+4\sqrt{x}+4}}{x+3\sqrt{x}+2} = \frac{x-3+2\sqrt{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$$

$P = \frac{2017}{2018} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{2017}{2018} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2016 \Leftrightarrow x = 2016^2$ (TMĐK)

2) $\left(x^2-4x\right)\left(x^2-4\right) = 20 \Leftrightarrow x(x-4)(x-2)(x+2) = 20 \Leftrightarrow \left(x^2-2x\right)\left(x^2-2x-8\right) = 20$

$\Leftrightarrow \left[\left(x^2-2x-4\right)+4\right]\left[\left(x^2-2x-4\right)-4\right] = 20 \Leftrightarrow \left(x^2-2x-4\right)^2 = 36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-4=-6 \\ x^2-2x-4=6 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-2x+2=0 & (1) \\ x^2-2x-10=0 & (2) \end{array}\right.$

Giải (1): Phương trình vô nghiệm

Giải (2): $x_1 = 1+\sqrt{11}; x_2 = 1-\sqrt{11}$

Bài 2: (4 điểm)

1) PT có 2 nghiệm khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} (2m-3)^2 - m^2 \ge 0 \\ m^2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)(m-1) \ge 0 \\ m \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \le 1 \\ m \ge 3 \end{array}\right. \\ m \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \le 1 \\ m \ne 0 \end{cases} (*) \\ m \ge 3 \end{array}\right.$

Theo Vi ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(2m-3) \\ x_1x_2 = m^2 \end{cases}$.

Khi đó $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{-2(2m-3)}{m^2} = \frac{-12m+18}{3m^2} = \frac{-2m^2 + \left(2m^2-12m+18\right)}{3m^2} = -\frac{2}{3} + \frac{2(m-3)^2}{3m^2} \ge -\frac{2}{3}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m = 3$ (TMĐK (*))

Vậy $m = 3$; Min $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = -\frac{2}{3}$

2)

$\sqrt{x_0^2+1} - \sqrt{y_0+4} = x_0 - \sqrt{y_0+3} \Leftrightarrow \sqrt{x_0^2+1} - x_0 = \sqrt{y_0+4} - \sqrt{y_0+3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x_0^2+1}+x_0} = \frac{1}{\sqrt{y_0+4}+\sqrt{y_0+3}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x_0^2+1} + x_0 = \sqrt{y_0+4} + \sqrt{y_0+3}$. Do đó $\begin{cases} \sqrt{x_0^2+1} - x_0 = \sqrt{y_0+4} - \sqrt{y_0+3} \\ \sqrt{x_0^2+1} + x_0 = \sqrt{y_0+4} + \sqrt{y_0+3} \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{x_0^2+1} = \sqrt{y_0+4} \Leftrightarrow x_0^2 + 1 = y_0 + 4 \Leftrightarrow (1-a)x_0^2 = 3 \Rightarrow x_0^2 = \frac{3}{1-a} > 0 \Rightarrow a < 1$ (vì $x_0 > 0$)

Bài 3: (4 điểm)

1) $x^2 - y^2 + 4x - 2y = 18 \Leftrightarrow \left(x^2+4x+4\right) - \left(y^2+2y+1\right) = 21 \Leftrightarrow (x-y+1)(x+y+3) = 21$

Do x, y nguyên dương nên ta có các trường hợp sau

+) $\begin{cases} x-y+1=1 \\ x+y+3=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=9 \end{cases}$; +) $\begin{cases} x-y+1=3 \\ x+y+3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

2) Ta có: $N = ab(ab+1)(2ab+1)$ chia hết cho các số: 1; a; b(ab + 1)(2ab + 1); b; a(ab + 1)(2ab + 1); ab + 1; ab(2ab + 1); 2ab + 1; ab(ab + 1); N; ab; (ab + 1)(2ab + 1); b(ab + 1); a(2ab + 1); a(ab + 1); b(2ab + 1) có 16 ước dương

Nên để N chỉ có đúng 16 ước dương thì a; b; ab +1; 2ab + 1 là số nguyên tố

Do a, b > 1 $\Rightarrow$ ab +1 > 2

+) Nếu a; b cùng lẻ thì ab + 1 chia hết cho 2 nên là hợp số (vô lý). Do đó không mất tính tổng quát, giả sử a chẵn b lẻ $\Rightarrow$ a = 2

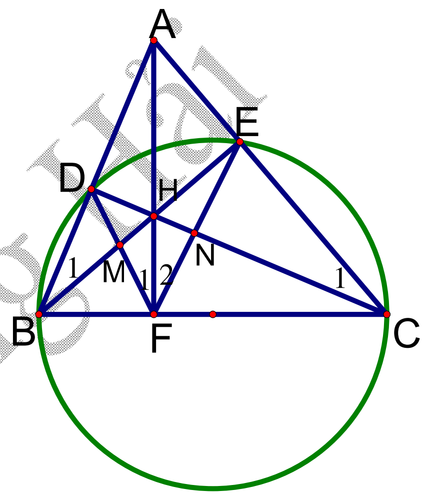
+) Ta cũng có nếu b không chia hết cho 3 thì 2ab + 1= 4b + 1 và ab + 1 = 2b + 1 chia hết cho 3 là hợp số (vô lý) $\Rightarrow$ b = 3.

Vậy a = 2; b = 3

Bài 4: (4 điểm)

1) Chứng minh các tứ giác ADHE và BDHF là tứ giác nội tiếp. *(Tự xử)*

2) Các đoạn thẳng BH và DF cắt nhau tại M, CH và EF cắt nhau tại N. Biết rằng tứ giác HMFN là tứ giác nội tiếp. Tính số đo $\widehat{BAC}$.



$\widehat{BAC} + \widehat{DHE} = \widehat{MFN} + \widehat{BHC} = 180^0$ (tứ giác ADHE; HMFN nội tiếp)

mà $\widehat{DHE} = \widehat{BHC}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{MFN} = \widehat{F_1} + \widehat{F_2}$

lại có $\widehat{F_1} = \widehat{B_1}; \widehat{F_2} = \widehat{C_1}; \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (tứ giác BDHF; CEHF; BCED nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{F_1} = \widehat{F_2} = \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$

do đó $\widehat{BAC} = \widehat{F_1} + \widehat{F_2} = 2\widehat{B_1}$, mặt khác $\widehat{B_1} = 90^0 - \widehat{BAC}$ (ΔABE, $\widehat{AEB} = 90^0$)

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 2\widehat{B_1} = 2\left(90^0 - \widehat{BAC}\right) \Rightarrow 3\widehat{BAC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^0$

Bài 5: (2 điểm)

ĐK: $-3 \le x \le 3$

$y^3 + 3y^2 + 5y + 3 = 11\sqrt{9-x^2} - \sqrt{9x^4 - x^6}$

$\Leftrightarrow (y+1)^3 + 2(y+1) = \left(\sqrt{9-x^2}\right)^3 + 2\sqrt{9-x^2}$

$\Leftrightarrow a^3 + 2a = b^3 + 2b \quad \left(a = y+1; b = \sqrt{9-x^2}\right)$

$\Leftrightarrow \left(a^3 - b^3\right) + 2(a-b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)\left(a^2 + ab + b^2 + 2\right) = 0$

do $a^2 + ab + b^2 + 2 = \left(a + \dfrac{1}{2}b\right)^2 + \dfrac{3}{4}b^2 + 2 > 0$

$\Rightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow y + 1 - \sqrt{9-x^2} = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{9-x^2} - 1$

$\Leftrightarrow x - y = x - \sqrt{9-x^2} + 1 = 4 - \left(3 - x + \sqrt{9-x^2}\right) \le 4$

$\Rightarrow T = x - y + 2018 \le 4 + 2018 = 2022$

Vì $-3 \le x \le 3$ nên $3 - x \ge 0; \sqrt{9-x^2} \ge 0 \Rightarrow 3 - x + \sqrt{9-x^2} \ge 0$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x=0 \\ 9-x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=-1$

Vậy $Max(T)=2022 \Leftrightarrow x=3; y=-1$

Mặt khác, ta chứng minh

$x-y \ge 1-3\sqrt{2} \Leftrightarrow x-\sqrt{9-x^2}+1 \ge 1-3\sqrt{2} \Leftrightarrow x+3\sqrt{2} \ge \sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow x^2+6\sqrt{2}x+18 \ge 9-x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2+6\sqrt{2}x+9 \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}x+3\right)^2 \ge 0$ (đúng)

$\Rightarrow T=x-y+2018 \ge 1-3\sqrt{2}+2018=2019-3\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{2}x+3=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}(\text{TM}) \Rightarrow y=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\left(1-3\sqrt{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{2}$

$Min(T)=2019-3\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{-3\sqrt{2}}{2}; y=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{2}$

Bài 6: (2 điểm) Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm M, lấy điểm E sao cho ΔAME đều; trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm M, lấy điểm F sao cho ΔCMF đều

Ta có $\widehat{MAE}=\widehat{BAC}=60^0 \Rightarrow \widehat{MAB}+\widehat{BAE}=\widehat{MAB}+\widehat{CAM} \Rightarrow \widehat{BAE}=\widehat{CAM}$

$\Rightarrow \Delta BAE=\Delta CAM\ (c-g-c) \Rightarrow BE=CM; \widehat{ABE}=\widehat{ACM}$

tương tự $\widehat{MCF}=\widehat{ACB}=60^0 \Rightarrow \widehat{MCB}+\widehat{BCF}=\widehat{MCB}+\widehat{ACM} \Rightarrow \widehat{BCF}=\widehat{ACM}$

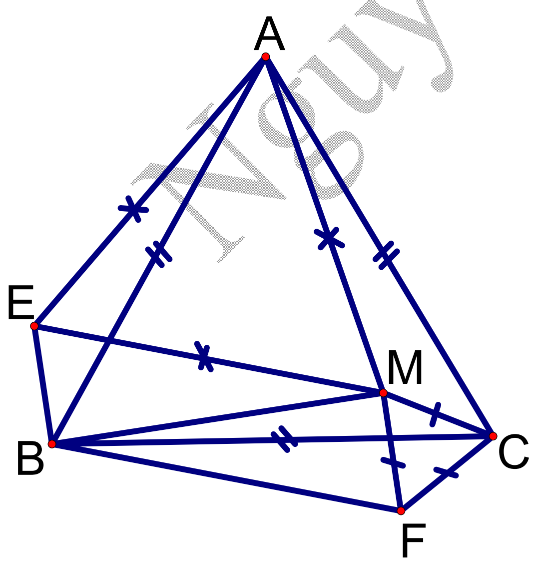
ta có $BE=CM; CM=CF \Rightarrow BE=CF;$

$\widehat{ABE}=\widehat{ACM}; \widehat{ACM}=\widehat{BCF} \Rightarrow \widehat{ABE}=\widehat{BCF}$

$\Rightarrow \Delta BAE=\Delta CBF\ (c-g-c) \Rightarrow AE=BF$ mà $AE=AM \Rightarrow BF=AM$

Mặt khác $\widehat{BMF}=\widehat{BMC}-\widehat{CMF}=150^0-60^0=90^0$ (ΔCMF đều, nên $\widehat{CMF}=60^0$)

$\Delta BMF: \widehat{BMF}=90^0 \Rightarrow BF^2=MB^2+MF^2 \Rightarrow MA^2=MB^2+MC^2 \ge 2MB.MC$ (ΔCMF đều $MF=MC$)



SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO **ĐĂK LĂK** **ĐỀ CHÍNH THỨC**	**KỲ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH** **NĂM HỌC 2018 – 2019** **MÔN THI: TOÁN 9 – THCS** *Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)* **Ngày thi: 10/4/2019**

Bài 1: (4 điểm)

1) Rút gọn biểu thức $A=\left(3+2\sqrt{3}\right)\sqrt{33-12\sqrt{5-\sqrt[3]{37-30\sqrt{3}}}}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{x}-6x+12\sqrt{x}-8=y\sqrt{y} \\ x-2\sqrt{x}-1=2\sqrt{y} \end{cases}$

Bài 2: (4 điểm)

1) Cho phương trình $x^2-4x=2|x-2|-m-5$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, một đường thẳng *d* có hệ số góc *k* đi qua điểm M(0; 3) và cắt parabol $(P): y=x^2$ tại hai điểm A, B. Gọi C, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên trục Ox. Viết phương trình đường thẳng d, biết hình thang ABDC có diện tích bằng 20.

Bài 3: (4 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $2x^2+y^2+2xy+6x+4y=20$

2) Tìm tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng số đó bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

Bài 4: (4 điểm) Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là tiếp điểm) và một cát tuyến ADE của (O) sao cho ADE nằm giữa hai tia AO và AB; D, E $\in$ (O). Đường thẳng qua D và song song với BE cắt BC, AB lần lượt tại P, Q.

1) Gọi H là giao điểm của BC với OA. Chứng minh OEDH là tứ giác nội tiếp.

2) Gọi K là điểm đối xứng của B qua E. Chứng minh ba điểm A, P, K thẳng hàng.

Bài 5: (2 điểm) Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh CB, CD lần lượt lấy các điểm M, N (M không trùng với B và C; N không trùng với C và D) sao cho $\widehat{MAN}=45^0$. Chứng minh rằng đường chéo BD chia tam giác AMN thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Bài 6: (2 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\geq 3$$

-------------------- Hết --------------------

BÀI GIẢI

Bài 1: (4 điểm)

1) Ta có $A=\left(3+2\sqrt{3}\right)\sqrt{33-12\sqrt{5-\sqrt[3]{37-30\sqrt{3}}}}=\left(3+2\sqrt{3}\right)\sqrt{33-12\sqrt{5-\sqrt[3]{\left(1-2\sqrt{3}\right)^3}}}$

$=\left(3+2\sqrt{3}\right)\sqrt{33-12\sqrt{4+2\sqrt{3}}}=\left(3+2\sqrt{3}\right)\sqrt{33-12\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}=\left(3+2\sqrt{3}\right)\sqrt{21-12\sqrt{3}}$

$=\left(3+2\sqrt{3}\right)\sqrt{\left(3-2\sqrt{3}\right)^2}=\left(3+2\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}-3\right)=12-9=3$

2) (ĐK: $x\ge 0, y\ge 0$)

$$\begin{cases}x\sqrt{x}-6x+12\sqrt{x}-8=y\sqrt{y}\\ x-2\sqrt{x}-1=2\sqrt{y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{x}-2\right)^3=\left(\sqrt{y}\right)^3\\ x-2\sqrt{x}-1=2\sqrt{y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-2=\sqrt{y}\\ x-2\sqrt{x}-1=2\sqrt{y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-2=\sqrt{y}\\ x-2\sqrt{x}-1=2\sqrt{x}-4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-2=\sqrt{y}\\ x-2\sqrt{x}-1=2\sqrt{x}-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-2=\sqrt{y}\\ x-4\sqrt{x}+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-2=\sqrt{y}\\ \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x}-2=\sqrt{y}\\ \sqrt{x}-1=0\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x}-2=\sqrt{y}\\ \sqrt{x}-3=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{y}=-1(vo\,ly)\\ \sqrt{x}=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{y}=1\\ \sqrt{x}=3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\ y=1\end{cases}(tm)$$

. Vậy nghiệm của hệ là $\begin{cases}x=9\\ y=1\end{cases}$

Bài 2: (4 điểm)

1) Ta có $x^2-4x=2|x-2|-m-5\Leftrightarrow|x-2|^2-2|x-2|+m+1=0\quad(*)$

Đặt $t=|x-2|\,(t\ge 0)$. Khi đó (*) trở thành: $t^2-2t+m+1=0\quad(**)$

Do đó (*) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (**) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_t>0\\ P_t>0\\ S_t>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-(m+1)>0\\ m+1>0\\ 2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ m>-1\end{cases}\Leftrightarrow -1<m<0$$

2) Vì đường thẳng *d* có hệ số góc *k* đi qua điểm M(0; 3), nên phương trình đường thẳng *d* có dạng $y=kx+3$

Phương trình hoành độ giao điểm của (*d*) và (*P*) là: $x^2=kx+3\Leftrightarrow x^2-kx-3=0\quad(*)$

Vì $ac=-3<0$, nên (*) luôn có hai nghiệm phân biệt

Vì (*d*) cắt (*P*) tại hai điểm A; B, nên hoành độ các điểm A, B là hai nghiệm của (*).

Theo Vi ét ta có: $\begin{cases}x_A+x_B=k\\ x_Ax_B=-3\end{cases}$. Lại có $A\left(x_A;x_A^2\right),B\left(x_B;x_B^2\right),C\left(x_A;0\right),D\left(x_B;0\right)$

Do đó $20=S_{ABDC}=\dfrac{(AC+BD)CD}{2}=\dfrac{\left(x_A^2+x_B^2\right)}{2}\cdot\left(|x_A|+|x_B|\right)=\dfrac{\left(|x_A|+|x_B|\right)^2-2|x_Ax_B|}{2}\cdot\left(|x_A|+|x_B|\right)$

Đặt $t=|x_A|+|x_B|$, ta có:

$$20=\frac{t^2-2|-3|}{2}\cdot t\Leftrightarrow t^3-6t-40=0\Leftrightarrow(t-4)\left(t^2+4t+10\right)=0\Leftrightarrow(t-4)\left[(t+2)^2+6\right]=0\Leftrightarrow t=4.$$

$4=t\Leftrightarrow 4=|x_A|+|x_B|\Leftrightarrow 16=\left(|x_A|+|x_B|\right)^2=x_A^2+x_B^2+2|x_Ax_B|=(x_A+x_B)^2-2x_Ax_B+2\cdot|-3|=k^2+6+6$

$\Leftrightarrow k^2=4\Leftrightarrow k=\pm 2$. Vậy phương trình đường thẳng *d* là: $y=2x+3$ hoặc $y=-2x+3$

Bài 3: (4 điểm)

1) Ta có: $2x^2+y^2+2xy+6x+4y=20\Leftrightarrow (x+1)^2+(x+y+2)^2=25$

Vì $25=0^2+5^2=0^2+(-5)^2=3^2+4^2=3^2+(-4)^2=(-3)^2+4^2=(-3)^2+(-4)^2$, nên có các trường hợp sau:

+) $\begin{cases}x+1=0\\x+y+2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=4\end{cases}$; +) $\begin{cases}x+1=0\\x+y+2=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-6\end{cases}$; +) $\begin{cases}x+1=5\\x+y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=-6\end{cases}$;

+) $\begin{cases}x+1=-5\\x+y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-6\\y=4\end{cases}$; +) $\begin{cases}x+1=3\\x+y+2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$; +) $\begin{cases}x+1=4\\x+y+2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$;

+) $\begin{cases}x+1=3\\x+y+2=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-8\end{cases}$; +) $\begin{cases}x+1=-4\\x+y+2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5\\y=6\end{cases}$; +) $\begin{cases}x+1=-3\\x+y+2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=6\end{cases}$

+) $\begin{cases}x+1=4\\x+y+2=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-8\end{cases}$; +) $\begin{cases}x+1=-3\\x+y+2=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=-2\end{cases}$; +) $\begin{cases}x+1=-4\\x+y+2=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5\\y=0\end{cases}$

Vậy các cặp số $(x;y)$ là: $(-1;4),(-1;-6),(4;-6),(-6;4),(2;0),(3;-2),(2;-8),(-5;6),(-4;6)$ $(3;-8),(-4;-2),(-5;0)$

Cách khác: $2x^2+y^2+2xy+6x+4y=20\Leftrightarrow 2x^2+2(3+y)x+y^2+4y-20=0\quad(*)$

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'=(3+y)^2-2(y^2+4y-20)\ge 0\Leftrightarrow -y^2-2y+49\ge 0\Leftrightarrow y^2+2y-49\le 0$

$\Leftrightarrow (y+1)^2\le 50\Leftrightarrow |y+1|\le 5\sqrt{2}\Leftrightarrow -1-5\sqrt{2}\le y\le -1+5\sqrt{2}\Rightarrow -8\le y\le 6$ (vì $y\in Z$)

(*) có nghiệm nguyên $\Rightarrow \Delta'=-y^2-2y+49=k^2\ (k\in N)\Rightarrow y=-8;-6;-2;0;4;6$

+) Với $y=-8$; $(*)\Leftrightarrow 2x^2-10x+12=0\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.$

+) Với $y=-6$; $(*)\Leftrightarrow 2x^2-6x-8=0\Leftrightarrow x^2-3x-4=0\Leftrightarrow (x+1)(x-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=4\end{array}\right.$

+) Với $y=-2$; $(*)\Leftrightarrow 2x^2+2x-24=0\Leftrightarrow x^2+x-12=0\Leftrightarrow (x-3)(x+4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-4\end{array}\right.$

+) Với $y=0$; $(*)\Leftrightarrow 2x^2+6x-20=0\Leftrightarrow x^2+3x-10=0\Leftrightarrow (x+5)(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\\x=2\end{array}\right.$

+) Với $y=4$; $(*)\Leftrightarrow 2x^2+14x+12=0\Leftrightarrow x^2+7x+6=0\Leftrightarrow (x+1)(x+6)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-6\end{array}\right.$

+) Với $y=6$; $(*)\Leftrightarrow 2x^2+18x+40=0\Leftrightarrow x^2+9x+20=0\Leftrightarrow (x+4)(x+5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=-5\end{array}\right.$

2) Gọi $\overline{abcd}$ là số tự nhiên phải tìm $\left(1000\le\overline{abcd}\le 9999\right)$

Ta có $\overline{abcd}=(a+b+c+d)^3\Rightarrow 1000\le(a+b+c+d)^3\le 9999\Rightarrow 10\le a+b+c+d\le 21$

+) Nếu $a+b+c+d=10\Rightarrow\overline{abcd}=1000\,(loai)$; +) Nếu $a+b+c+d=11\Rightarrow\overline{abcd}=1331\,(loai)$;

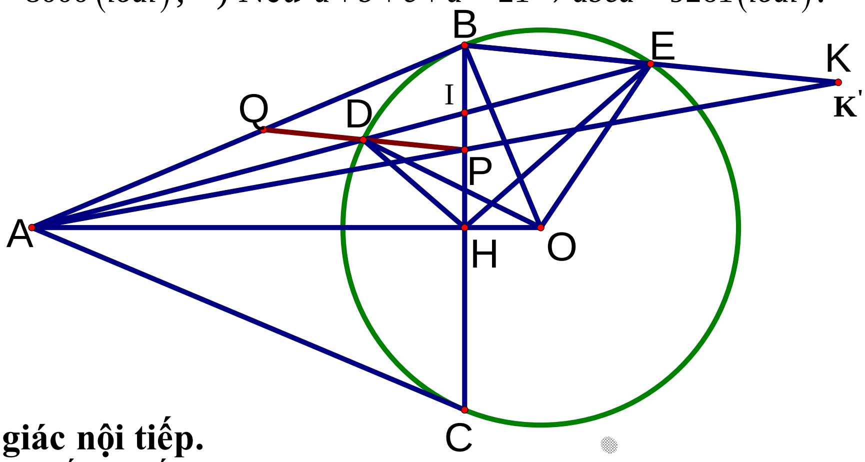
+) Nếu $a+b+c+d=12\Rightarrow\overline{abcd}=1728\,(loai)$; +) Nếu $a+b+c+d=13\Rightarrow\overline{abcd}=2917\,(loai)$;

+) Nếu $a+b+c+d=14\Rightarrow\overline{abcd}=2744\,(loai)$; +) Nếu $a+b+c+d=15\Rightarrow\overline{abcd}=3375\,(loai)$;

+) Nếu $a+b+c+d=16\Rightarrow\overline{abcd}=4096\,(loai)$; +) Nếu $a+b+c+d=17\Rightarrow\overline{abcd}=4913\,(nhan)$;

+) Nếu $a+b+c+d=18 \Rightarrow \overline{abcd}=5832\,(nhan)$; +) Nếu $a+b+c+d=19 \Rightarrow \overline{abcd}=6859\,(loai)$;
+) Nếu $a+b+c+d=20 \Rightarrow \overline{abcd}=8000\,(loai)$; +) Nếu $a+b+c+d=21 \Rightarrow \overline{abcd}=9261\,(loai)$.
Vậy $\overline{abcd}=4913; 5832$.

Bài 4: (4 điểm)



1) Chứng minh OEDH là tứ giác nội tiếp.

Ta có: AB = AC (AB, AC là hai tiếp tuyến của (O)), OB = OC (bán kính)
Nên OA là trung trực của BC
Xét ΔABO: $\widehat{ABO}=90^0$ (AB là tiếp tuyến của (O)), BH ⊥ OA (OA là trung trực của BC)
$\Rightarrow AB^2 = AH.AO \quad (a)$

Xét ΔABD và ΔAEB: $\widehat{ABD}=\widehat{AED}=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{BD}$ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây)
$\widehat{BAD}$ (góc chung). Vậy ΔABD ∽ ΔAEB (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AE\,(b)$

Từ (a) và (b) suy ra $\Rightarrow AH.AO = AD.AE \Rightarrow \frac{AH}{AD}=\frac{AE}{AO}$

Xét ΔAHD và ΔAEO: $\frac{AH}{AD}=\frac{AE}{AO}\,(cmt)$, $\widehat{HAD}\,(chung)$. Vậy ΔAHD ∽ ΔAEO (c.g.c)
$\Rightarrow \widehat{AHD}=\widehat{AEO}$. Do đó tứ giác OEDH là tứ giác nội tiếp (đpcm)

2) Chứng minh ba điểm A, P, K thẳng hàng.

Ta có: ΔODE cân tại O (do OD = OE) $\Rightarrow \widehat{EDO}=\widehat{AEO}$ mà $\widehat{AHD}=\widehat{AEO}\,(cmt) \Rightarrow \widehat{EDO}=\widehat{AHD}$
Lại có: $\widehat{EDO}=\widehat{EHO}$ (tứ giác OEDH nội tiếp)
$\Rightarrow \widehat{AHD}=\widehat{EHO} \Rightarrow 90^0-\widehat{AHD}=90^0-\widehat{EHO} \Rightarrow \widehat{BHA}-\widehat{AHD}=\widehat{BHO}-\widehat{EHO} \Rightarrow \widehat{BHD}=\widehat{BHE}$
Nên HB là phân giác trong của ΔDHE, mà HA ⊥ HB (cmt) nên HA là phân giác ngoài của ΔDHE $\Rightarrow \frac{HD}{HE}=\frac{ID}{IE}=\frac{AD}{AE} \quad (c)$ (I là giao điểm của HB và DE)

ΔDIP, DP // BE (gt) $\Rightarrow \frac{DP}{BE}=\frac{ID}{IE} \quad (d)$ (hệ quả Ta Lét)

ΔABE, DQ // BE (gt) $\Rightarrow \frac{DQ}{BE}=\frac{AD}{AE} \quad (e)$ (hệ quả Ta Lét)

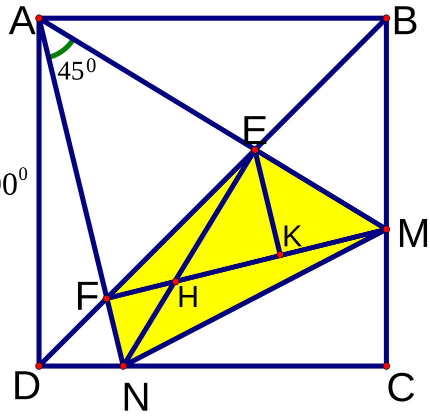
Từ c), d), e) $\Rightarrow \frac{DP}{BE}=\frac{DQ}{BE} \Rightarrow DP = DQ$.

Gọi K’ là giao điểm của AP và BE. ΔAEK’, DP // EK’ (gt) $\Rightarrow \frac{DP}{EK'}=\frac{AD}{AE} \quad (f)$

Từ e), f) $\Rightarrow \frac{DQ}{BE}=\frac{DP}{EK'}$ mà $DP = DQ\,(cmt) \Rightarrow BE = EK'$

Mặt khác $BE = EK\,(gt) \Rightarrow K' \equiv K$. Vậy A, P, K thẳng hàng (đpcm).

Bài 5: (2 điểm)



Tứ giác ABMF:

$\widehat{MAF}=45^0\,(gt)$, $\widehat{MBF}=45^0$ (BD là đường chéo hình vuông)

Vậy tứ giác ABMF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AFM}=180^0-\widehat{ABM}=180^0-90^0=90^0$

ΔAFM: $\widehat{AFM}=90^0, \widehat{FAM}=45^0$,

nên ΔAFM vuông cân tại F $\Rightarrow$ AF = MF

Tương tự ΔAENvuông cân tại E $\Rightarrow$ AE = NE

Tứ giác AEHF: $\widehat{AFH}=\widehat{AEH}=90^0\,(cmt)$ (H là giao điểm của MF và NE)

nên tứ giác AEHF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{NHF}=\widehat{MHE}=\widehat{EAF}=45^0$

Kẻ EK $\perp$ MF (K $\in$ MF). ΔNFH vuông tại F; ΔEKH vuông tại K nên có:

$NF=NH\cdot\sin\widehat{NHF}=NH\cdot\sin 45^0,\quad EK=EH\cdot\sin\widehat{MHE}=EH\cdot\sin 45^0$

Ta có: $S_{MNFE}=S_{MHN}+S_{NHF}+S_{FHE}+S_{EHM}$

$$=\frac{1}{2}HM\cdot NF+\frac{1}{2}HN\cdot HF\cdot\sin\widehat{NHF}+\frac{1}{2}HF\cdot EK+\frac{1}{2}HM\cdot HE\cdot\sin\widehat{MHE}$$

$$=\frac{1}{2}\left(HM\cdot HN\cdot\sin 45^0+HN\cdot HF\cdot\sin 45^0+HF\cdot HE\cdot\sin 45^0+HM\cdot HE\cdot\sin 45^0\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[(HM+HF)\cdot HN+(HF+HM)\cdot HE\right]\cdot\sin 45^0$$

$$=\frac{1}{2}MF\cdot(HN+HE)\cdot\sin 45^0=\frac{1}{2}MF\cdot NE\cdot\sin 45^0=\frac{1}{2}AF\cdot AE\cdot\sin 45^0=S_{AEF}$$

Bài 6: (2 điểm) Ta chứng minh $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)\quad(*)$.

Thật vậy $(*)\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge 0\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$ (luôn đúng). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Áp dụng (*), ta có: $3^2\ge 3(ab+bc+ca)\Leftrightarrow ab+bc+ca\le 3$

Lại có: $\dfrac{a+1}{b^2+1}=\dfrac{(a+1)\left[(b^2+1)-b^2\right]}{b^2+1}=(a+1)-\dfrac{(a+1)b^2}{b^2+1}$

Vì $b^2+1\ge 2b\Rightarrow \dfrac{1}{b^2+1}\le\dfrac{1}{2b}\Rightarrow\dfrac{(a+1)b^2}{b^2+1}\le\dfrac{(a+1)b^2}{2b}=\dfrac{(a+1)b}{2}\Rightarrow-\dfrac{(a+1)b^2}{b^2+1}\ge-\dfrac{(a+1)b}{2}$

$\Rightarrow (a+1)-\dfrac{(a+1)b^2}{b^2+1}\ge(a+1)-\dfrac{(a+1)b}{2}\Rightarrow\dfrac{a+1}{b^2+1}\ge(a+1)-\dfrac{ab+b}{2}\quad(do\,b>0)$

Tương tự có: $\dfrac{b+1}{c^2+1}\ge(b+1)-\dfrac{bc+c}{2};\quad\dfrac{c+1}{a^2+1}\ge(c+1)-\dfrac{ca+a}{2}$

Vậy $\dfrac{a+1}{b^2+1}+\dfrac{b+1}{c^2+1}+\dfrac{c+1}{a^2+1}\ge(a+b+c)+3-\dfrac{(ab+bc+ca)+(a+b+c)}{2}=6-\dfrac{3+3}{2}=3$

Dấu "=" xảy ra $a=b=c=1$.

PHÒNG GIÁO DỤC – ĐÀO TẠO
TP BUÔN MA THUỘT

KỲ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9-CẤP THÀNH PHỐ
NĂM HỌC 2011-2012
ĐỀ THI MÔN: **TOÁN**
Thời gian: 150 phút (không tính giao đề)

Bài 1: *(6 điểm)*

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm A(2; 5); B(-1; -1); C(4; 9). Chứng minh rằng ba điểm A; B; C thẳng hàng.
b) Với $m \in Z$. Chứng minh rằng $m(m + 1)(2m + 1) \vdots 6$
c) Tìm phần dư của phép chia đa thức P(x) cho đa thức $(x – 1)(x^3 + 1)$, biết rằng P(x) chia cho đa thức x – 1 thì dư là 1 còn nếu P(x) chia cho đa thức $x^3 + 1$ thì có đa thức dư là $x^2 + x + 1$

Bài 2: *(4 điểm)*

a) Rút gọn $Q=\left(\dfrac{a-3\sqrt{a}}{a-9}-1\right):\left(\dfrac{9-a}{a+\sqrt{a}-6}+\dfrac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}-2}-\dfrac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}\right)$

b) Cho $n \in N$ và $n \geq 3$, cho

$$S_n=\frac{1}{3\left(1+\sqrt{2}\right)}+\frac{1}{5\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}+\frac{1}{7\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}$$

Chứng minh $S_n<\dfrac{1}{2}$

Bài 3: *(2 điểm)* Cho a, b, c là các số nguyên dương.

Chứng minh rằng $\dfrac{a^2-c^2}{b+c}+\dfrac{c^2-b^2}{a+b}+\dfrac{b^2-a^2}{c+a}\geq 0$

Bài 4: *(4 điểm)* Qua tâm O của hình vuông MNPQ có độ dài cạnh x(cm), kẻ đường thẳng d (d cắt cạnh MQ tại A và cắt cạnh NP tại B), cho biết AB = y(cm). Tính tổng các khoảng cách từ các đỉnh hình vuông MNPQ đến đường thẳng d theo x, y.

Bài 5:*(4 điểm)* Cho ΔABC vuông tại A, AB = c, AC = b, BC = a. Kẻ các trung tuyến BE, CD. Biết BE = m, CD = n (a, c, b, n, m có cùng đơn vị đo). Gọi (I; r) là đường tròn nội tiếp ΔABC và diện tích ΔABC = S.

a) Chứng minh $r=\dfrac{2S}{a+b+c}$
b) Chứng minh $\dfrac{r^2}{m^2+n^2}<\dfrac{1}{20}$

BÀI GIẢI SƠ LƯỢC

Bài 1: *(6 điểm)*

a) A, B thuộc đường thẳng y = 2x + 1; A, C thuộc đường thẳng y = 2x + 1

b) +) Nếu m $\vdots$ 3 thì m(m + 1)(2m + 1) $\vdots$ 3

+) Nếu m $\not\vdots$ 3 thì m = 3k ± 1

Nếu m = 3k + 1 $\Rightarrow$ 2m + 1 = 6k + 3 $\vdots$ 3 $\Rightarrow$ m(m + 1)(2m + 1) $\vdots$ 3

Nếu m = 3k – 1 $\Rightarrow$ m + 1 = 3k $\vdots$ 3 $\Rightarrow$ m(m + 1)(2m + 1) $\vdots$ 3

Vậy m(m + 1)(2m + 1) $\vdots$ 3 (a)

Lại có m(m + 1) $\vdots$ 2 $\Rightarrow$ m(m + 1)(2m + 1) $\vdots$ 2 (b). Vì (2; 3) = 1 nên từ (a) và (b) có đccm

c) Giả sử P(x) = (x – 1)(x^3 + 1)Q(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d

Từ các điều kiện của đề bài ta có P(x) = (x – 1)A(x) + 1 = (x^3 + 1)B(x) + x^2 + x + 1

$\Rightarrow$ P(1) = P(-1) = 1 $\Rightarrow$ a + b + c + d = –a + b – c + d = 1 $\Rightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ b+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-a \\ d=1-b \end{cases}$ (*)

Lại có P(x) = (x – 1)(x^3 + 1)Q(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d

= (x^3 + 1)[(x – 1)Q(x) + a] + bx^2 + cx + d – a = (x^3 + 1)B(x) + x^2 + x + 1

$\Rightarrow$ b = 1; c = 1; d – a = 1 (**). Từ (*) và (**) có a = -1; b = 1; c = 1; d = 0

Vậy đa thức dư cần tìm là –x^3 + x^2 + x

Bài 2: *(4 điểm)*

a) ĐK $a \geq 0, a \neq 4, a \neq 9$. Kết quả rút gọn $Q = \dfrac{3}{\sqrt{a}+2}$

b) Ta có: $\dfrac{1}{(2n+1)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)} = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n+1} = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n+1}} < \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n}}$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

Từ đó ta có $S_n < \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < \dfrac{1}{2}$ (Vì $1 - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < 1$)

(BL: đúng với $n \geq 1$ chứ không chỉ $n \geq 3$ như đề)

Bài 3: *(2 điểm)* Cho a, b, c là các số nguyên dương.

Chứng minh rằng $\dfrac{a^2-c^2}{b+c} + \dfrac{c^2-b^2}{a+b} + \dfrac{b^2-a^2}{c+a} \geq 0$

Vì a, b, c dương nên b + c, a + b, c + a dương, do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\left(a^2-c^2\right)(a+b)(c+a) + \left(c^2-b^2\right)(b+c)(c+a) + \left(b^2-a^2\right)(b+c)(a+b) \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2(a+b)(c+a-b-c) + b^2(b+c)(a+b-c-a) + c^2(c+a)(b+c-a-b) \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2\left(a^2-b^2\right) + b^2\left(b^2-c^2\right) + c^2\left(c^2-a^2\right) \geq 0$

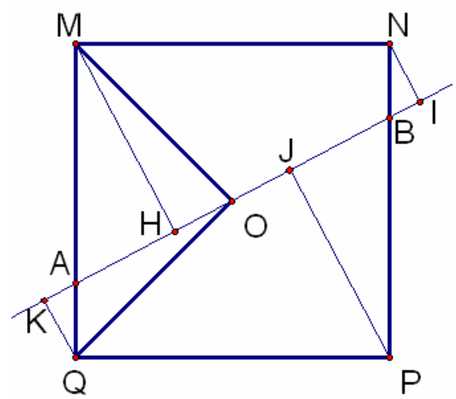
$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(a^2-b^2\right)^2 + \left(b^2-c^2\right)^2 + \left(c^2-a^2\right)^2 \geq 0$ (*)

(*) đúng.

(BL: a; b; c không cần phải nguyên)

Bài 4: *(4 điểm)* Qua tâm O của hình vuông MNPQ có độ dài cạnh x(cm), kẻ đường thẳng d (d cắt cạnh MQ tại A và cắt cạnh NP tại B), cho biết AB = y(cm). Tính tổng các khoảng cách từ các đỉnh hình vuông MNPQ đến đường thẳng d theo x, y.



Chứng minh MH = PJ, QK = NI, OA = OB = $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}y$

Do đó MH + PJ + QK + NI = 2(MH + QK)

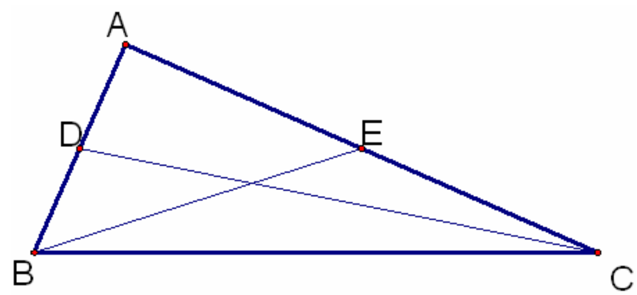
Lại có $S_{MOQ} = S_{MOA} + S_{QOA} = \frac{1}{2}OA(MH + QK)$

$$S_{MOQ} = S_{MOA} + S_{QOA} = \frac{1}{2}OA(MH + QK)$$

$$\Rightarrow MH + QK = \frac{2S_{MOQ}}{OA} = \frac{\frac{1}{2}S_{MNPQ}}{OA} = \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}y} = \frac{x^2}{y}$$

Vậy MH + PJ + QK + NI = $\frac{2x^2}{y}(cm)$

Bài 5:*(4 điểm)* Cho ΔABC vuông tại A, AB = c, AC = b, BC = a. Kẻ các trung tuyến BE, CD. Biết BE = m, CD = n (a, c, b, n, m có cùng đơn vị đo). Gọi (I; r) là đường tròn nội tiếp ΔABC và diện tích ΔABC = S.



a) Chứng minh $r = \frac{2S}{a+b+c}$

b) Chứng minh $\frac{r^2}{m^2+n^2} < \frac{1}{20}$

a) Tự giải quyết

b) $$\frac{r^2}{m^2+n^2} = \frac{\frac{4S^2}{(a+b+c)^2}}{\left(c^2+\frac{b^2}{4}\right)+\left(\frac{c^2}{4}+b^2\right)} = \frac{4b^2c^2}{5(a+b+c)^2(b^2+c^2)} = \frac{4b^2c^2}{5a^2\left(\sqrt{b^2+c^2}+b+c\right)^2}$$

Lại có
$$a^2 = b^2+c^2 \ge 2bc \quad \left(b^2+c^2-2bc = (b-c)^2 \ge 0\right)$$
$$b+c \ge 2\sqrt{bc} \quad \left(b+c-2\sqrt{bc} = \left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2 \ge 0\right)$$

Do đó $\frac{r^2}{m^2+n^2} \le \frac{4b^2c^2}{5.2bc\left(\sqrt{2bc}+2\sqrt{bc}\right)^2} = \frac{1}{5\left(\sqrt{2}+1\right)^2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{5} < \frac{1}{20}$

PHÒNG GIÁO DỤC – ĐÀO TẠO
TP BUÔN MA THUỘT

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9-CẤP THÀNH PHỐ
NĂM HỌC 2012-2013
ĐỀ THI MÔN: **TOÁN**
Thời gian: 150 phút (không tính giao đề)

Bài 1: *(2 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức: $A=\sqrt{1+2012^2+\frac{2012^2}{2013^2}}+\frac{2012}{2013}$

b) Tìm giá trị lớn nhất của $B=\frac{1}{x-\sqrt{x}+1}$ $(x\ge 0)$

Bài 2: *(2 điểm)*

Giải phương trình: $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$

Bài 3: *(2 điểm)* Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+my=m+1 \\ mx+y=3m-1 \end{cases}$

a) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x; y) thỏa mãn x.y đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó. (cần xem lại đề, chỉ có GTNN)

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm (x; y) thỏa mãn x + y < 0

Bài 4: *(4 điểm)*

a) Chứng minh rằng $(n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n) \vdots 384$ (với mọi n chẵn, $n \ge 4$)

b) Cho a + b + c + d = 2. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ge 1$

Bài 5:*(4,5 điểm)* Cho đường tròn (O; R). Hai đường kính cố định của (O) là AB và CD vuông góc với nhau. M là một điểm thuộc cung nhỏ AC của (O). K và H lần lượt là hình chiếu của M trên CD và AB.

a) Tính $\sin^2\widehat{MBA}+\sin^2\widehat{MAB}+\sin^2\widehat{MCD}+\sin^2\widehat{MDC}$

b) Chứng minh $OK^2=AH(2R-AH)$

c) Tìm vị trí điểm M để giá trị của $P=MA.MB.MC.MD$ lớn nhất.

Bài 6:*(5,5 điểm)* Cho AB là đường kính của đường tròn (O; R). C là một điểm thay đổi trên đường tròn (C khác A và B), kẻ CH vuông góc với AB tại H. Gọi I là trung điểm của AC, OI cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O; R) tại M, MB cắt CH tại K.

a) Chứng minh 4 điểm C, H, O, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh MC là tiếp tuyến của (O; R)

c) Chứng minh K là trung điểm của CH.

d) Xác định vị trí của C để chu vi tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất ? Tìm giá trị lớn nhất đó theo R.

BÀI GIẢI SƠ LƯỢC

Bài 1: *(2 điểm)*

a) $A=\sqrt{1+2012^2+\frac{2012^2}{2013^2}}+\frac{2012}{2013}=\sqrt{\left(1-\frac{2012}{2013}\right)^2+2\cdot 1\cdot\frac{2012}{2013}+2012^2}+\frac{2012}{2013}$

$=\sqrt{\frac{1}{2013^2}+2\cdot\frac{1}{2013}\cdot 2012+2012^2}+\frac{2012}{2013}=\sqrt{\left(\frac{1}{2013}+2012\right)^2}+\frac{2012}{2013}$

$=\frac{1}{2013}+2012+\frac{2012}{2013}=2013$

b) Ta có $x-\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0\quad(x\ge 0)$. Do đó B lớn nhất $\Leftrightarrow x-\sqrt{x}+1$ nhỏ nhất. Mà $x-\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}\quad(x\ge 0)$, dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$ (TMĐK)

Vậy GTLN của B là $\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$ khi $x=\frac{1}{4}$

Bài 2: *(2 điểm)*

ĐK: $3x^2+5x+8\ge 0, 3x^2+5x+1\ge 0$

Đặt $3x^2+5x+1=t\ (t\ge 0)$, phương trình trở thành $\sqrt{t+7}-\sqrt{t}=1\Leftrightarrow\sqrt{t+7}=1+\sqrt{t}$

$\Leftrightarrow t+7=t+2\sqrt{t}+1\Leftrightarrow\sqrt{t}=3\Leftrightarrow t=9$ (TMĐK)

Khi đó ta có $3x^2+5x+1=9\Leftrightarrow(x-1)(3x+8)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-\frac{8}{3}\end{array}\right.$ (TMĐK)

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=1, x=-\frac{8}{3}$

Bài 3: *(2 điểm)*

a) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow\frac{1}{m}\ne m\Leftrightarrow m\ne\pm 1$

Ta có $\begin{cases}x+my=m+1\\ mx+y=3m-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+m(3m-1-mx)=m+1\\ y=3m-1-mx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-1)(m+1)x=(m-1)(3m+1)\\ y=3m-1-mx\end{cases}$ (*)

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3m+1}{m+1}\\ y=3m-1-m\cdot\frac{3m+1}{m+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3m+1}{m+1}\\ y=\frac{m-1}{m+1}\end{cases}$ (Vì $m\ne\pm 1$)

Khi đó $xy=\frac{3m+1}{m+1}\cdot\frac{m-1}{m+1}=\frac{3m^2-2m-1}{(m+1)^2}=\frac{4m^2-(m^2+2m+1)}{(m+1)^2}=\frac{4m^2}{(m+1)^2}-1\ge -1$

Dấu "=" xảy ra khi m = 0. Vậy m = 0 thì hệ phương trình có một nghiệm duy nhất (x; y) mà GTNN của xy là -1

b) +) Nếu m = 1, (*) trở thành $\begin{cases}0x=0\\ y=2-x\end{cases}$. Hệ phương trình có vô số nghiệm $(x\in R; y=2-x)$. Khi đó x + y = 2 > 0, không thỏa x + y < 0

+) Nếu m = -1, (*) trở thành $\begin{cases} 0x = 4 \\ y = -4 + x \end{cases}$. Hệ phương trình vô nghiệm.

+) Nếu m ≠ ± 1. Hệ phương trình có một nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{3m+1}{m+1} \\ y = \dfrac{m-1}{m+1} \end{cases}$ (theo a)

Khi đó $x + y < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3m+1}{m+1} + \dfrac{m-1}{m+1} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{4m}{m+1} < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 0$

Vậy $-1 < m < 0$ thì hệ phương trình có nghiệm (x; y) thỏa mãn x + y < 0.

Bài 4: *(4 điểm)*

a) Ta có $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n = (n-4)(n-2)n(n+2)$

Vì n chẵn, n ≥ 4, đặt n = 2k (k ≥ 2). Ta có $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n = 16(k-2)(k-1)k(k+1)$

Do $k-2, k-1, k, k+1$ là bốn số tự nhiên liên tiếp nên có hai số chia hết cho 2 trong đó có một số chia hết cho 4 , có ít nhất một số chia hết cho 3 $\Rightarrow (k-2)(k-1)k(k+1) \vdots 8.3 = 24$ (Vì (8; 3) = 1) $\Rightarrow 16(k-2)(k-1)k(k+1) \vdots 16.24 = 384$

b) Vì $2 = a + b + c + d$

$$\Rightarrow 4 = (a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4 - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \quad (*)$$

Lại có $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (vì $(a-b)^2 \geq 0$), tương tự có $a^2 + c^2 \geq 2ac$, $a^2 + d^2 \geq 2ad$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $b^2 + d^2 \geq 2bd$, $c^2 + d^2 \geq 2cd$. Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

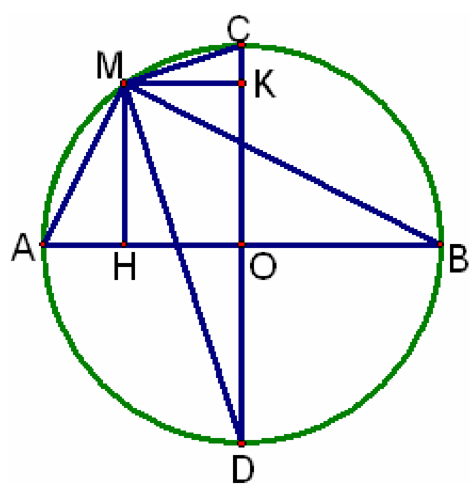
$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$\Rightarrow 4 - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \geq 4 - 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \quad (**)$$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4 - 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 1$ (đpcm)

Bài 5: *(4,5 điểm)*



a) $\widehat{AMB} = \widehat{CMD} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{MBA} + \widehat{MAB} = \widehat{MCD} + \widehat{MDC} = 90^0$

$\Rightarrow \sin\widehat{MAB} = \cos\widehat{MBA}, \sin\widehat{MDC} = \cos\widehat{MCD}$

Do đó

$\sin^2\widehat{MBA} + \sin^2\widehat{MAB} + \sin^2\widehat{MCD} + \sin^2\widehat{MDC}$

$= \left(\sin^2\widehat{MBA} + \cos^2\widehat{MBA}\right) + \left(\sin^2\widehat{MCD} + \cos^2\widehat{MCD}\right) = 2$

b) ΔAMB, $\widehat{AMB} = 90^0$, MH ⊥ AB

$\Rightarrow MH^2 = AH.BH = AH.(AB - AH) = AH.(2R - AH) \quad (a)$

Mặt khác tứ giác OHMK có $\hat{O} = \hat{K} = \hat{H} = 90^0$ (gt) nên tứ giác OHMK là hình chữ nhật

$\Rightarrow MH = OK \quad (b)$. Từ (a), (b) $\Rightarrow OK^2 = AH(2R - AH)$ (đpcm)

c) ΔAMB, $\widehat{AMB} = 90^0$, MH ⊥ AB $\Rightarrow MA.MB = AB.MH = 2R.MH$

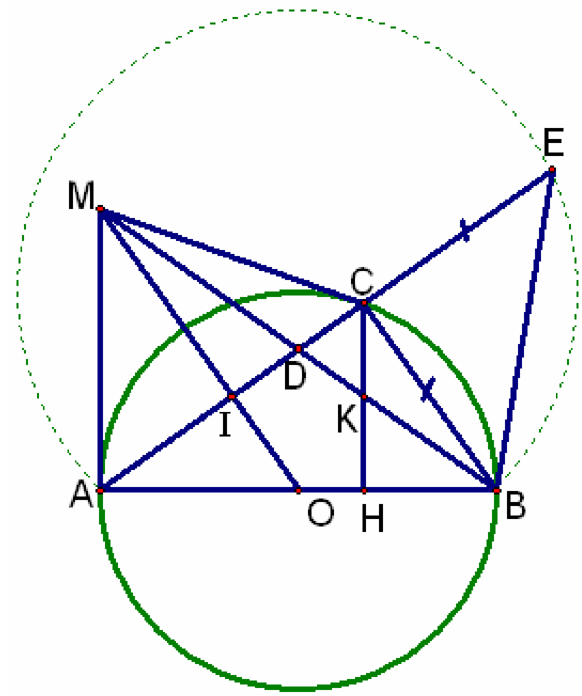
ΔCMD, $\widehat{CMD} = 90^0$, MK ⊥ CD $\Rightarrow MC.MD = CD.MK = 2R.MK$

Do đó $P = MA.MB.MC.MD = 4R^2.MH.MK$

Lại có $MH.MK \le \frac{MH^2+MK^2}{2} = \frac{HK^2}{2} = \frac{OM^2}{2} = \frac{R^2}{2}$

Nên $P = 4R^2.MH.MK \le 4R^2.\frac{R^2}{2} = 2R^4$. Đẳng thức xảy ra khi MH = MK ⇔ tứ giác OHMK là hình vuông ⇔ M là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$

Bài 6: *(5,5 điểm)*



a) Ta có $IA = IC = \frac{1}{2}AC$ (gt)

$\Rightarrow OI \perp AC \Rightarrow \widehat{OIC} = 90^0$

⇒ I thuộc đường tròn đường kính OC

Lại có $\widehat{OHC} = 90^0 \left(CH \perp AB\right) \Rightarrow$ H thuộc đường tròn đường kính OC

Vậy 4 điểm C, H, O, I cùng thuộc đường tròn đường kính OC (đpcm)

b) $OM \perp AC \left(OI \perp AC\right), IA = IC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow$ OM là trung trực AC ⇒ ΔOCM = ΔOAM (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{OCM} = \widehat{OAM} = 90^0$ (AM là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow MC \perp OC \Rightarrow$ MC là tiếp tuyến của (O)

c) Gọi D là giao điểm của MB và AC.

$\widehat{ACM} = \widehat{ABC} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến, dây cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$ của (O))

Lại có $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $\widehat{ACH} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$)

$\Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{ACH} \Rightarrow$ CD là phân giác $\widehat{MCK}$ của ΔMCK

Mặt khác CB ⊥ CD ($\widehat{ACB} = 90^0$)⇒ CB là phân giác ngoài của ΔMCK

Do đó ta có $\frac{KD}{MD} = \frac{KB}{MB} \quad (a)$

Xét ΔABM, KH // AM (CH ⊥ AB, AM ⊥ AB) $\Rightarrow \frac{KB}{MB} = \frac{KH}{AM} \quad (b)$

Xét ΔADM, CK // AM (CH ⊥ AB, AM ⊥ AB) $\Rightarrow \frac{KD}{MD} = \frac{KC}{AM} \quad (c)$

Từ (a), (b), (c) $\Rightarrow \frac{KH}{AM} = \frac{KC}{AM} \Rightarrow KH = KC$ (đpcm)

d) Trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho CE = BC

Khi đó $P_{ABC} = AB + AC + BC = 2R + AC + CE = 2R + AE$ nên P_{ABC} đạt max ⇔ AE đạt max

ΔBCE vuông cân tại C $\Rightarrow \widehat{AEB} = 45^0$

Vì AB cố định nên E thuộc cung chứa góc 45^0 dựng trên đoạn thẳng AB, do đó AE đạt max ⇔ AE là đường kính của cung chứa góc 45^0 dựng trên đoạn thẳng AB

⇔ $\widehat{ABE} = 90^0 \Leftrightarrow \widehat{ABC} = 45^0 \Leftrightarrow$ C là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O)

Khi đó ΔABE vuông cân tại E, nên $AE = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{2}R$

Vậy chu vi tam giác ABC đạt GTLN là $2\left(\sqrt{2}+1\right)R$ khi C là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O)

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP BUÔN MA THUỘT

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI HỌC SINH GIỎI BẬC THCS
CẤP THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2015-2016
ĐỀ THI MÔN: **TOÁN**
Thời gian: 150 phút (không tính giao đề)
Ngày thi: 24/02/2016

Bài 1: *(4 điểm)*

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}-\dfrac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+3\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P khi $x=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Bài 2: *(5,5 điểm)*

a) Chứng minh rằng: $n^5-n \vdots 30$ với mọi $n\in Z$

b) Giải phương trình $\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}=\dfrac{x+3}{5}$

c) Cho biết $a^3+b^3+3\left(a^2+b^2\right)+4\left(a+b\right)+4=0$ và $ab>0$.

Tìm giá trị lớn nhất của $Q=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

Bài 3: *(3,0 điểm)*

a) Tìm tất cả các số thực m để hệ phương trình $\begin{cases} mx-y=2 \\ 3x+my=5 \end{cases}$ có nghiệm (x; y) sao cho x > 0 và y < 0.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình 5x – 2007y = 1 với x ∈ [0; 3000]

Bài 4:*(4,5 điểm)* Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; r) cắt nhau tại A và B (R > r). Hai điểm O và O' nằm khác phía đối với đường thẳng AB. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài CD cắt đường thẳng AB tại K (C ∈ (O) và D ∈ (O')).

a) Chứng minh: $KC^2 = KA.KB$.

b) Đường thẳng qua C song song với AD cắt đường thẳng qua D song song với AC tại E. Chứng minh K là trung điểm của AE.

c) Chứng minh: BE < R + r.

Bài 5:*(3,0 điểm)* Cho tam giác ABC có góc A nhọn nội tiếp đường tròn (O; R). Lấy điểm D trên cung BC (D thuộc cung BC không chứa đỉnh A, D ≠ B, D ≠ C). Vẽ DH ⊥ BC (H ∈ BC), DK ⊥ AB (K ∈ AB), DI ⊥ CA (I thuộc đường thẳng AC).

Chứng minh rằng: $\dfrac{BC}{DH}=\dfrac{AC}{DI}+\dfrac{AB}{DK}$

BÀI GIẢI SƠ LƯỢC

Bài 1: *(4 điểm)*

a) Rút gọn P (ĐK: $x > 0$)

$$P = \left(\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + 3\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \left[\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}} + 3\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \left[\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right) - 2\sqrt{x}+2\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{x-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$$

b) Tính giá trị của P khi $x = \dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$

Ta có $\left(\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}\right)^2 = \dfrac{2\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+1} = 2 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} > 0\right)$

do đó $x = \dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \sqrt{2}-\sqrt{2}+1 = 1 > 0$

Vậy giá trị của P khi $x = 1$ là $\dfrac{1-\sqrt{1}+2}{\sqrt{1}+1} = 1$

c) Tìm GTNN của P: Ta có $P = \dfrac{x-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{\left(x-2\sqrt{x}+1\right)+\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1} = 1 + \dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt{x}+1} \ge 1$

(vì $\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt{x}+1} \ge 0$ với mọi $x > 0$). Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (TMĐK)

Vậy Min P = 1 khi x = 1

Bài 2: *(5,5 điểm)*

a) Chứng minh rằng: $n^5 - n \,\vdots\, 30$ với mọi $n \in Z$

Ta có $n^5 - n = \left(n-1\right)n\left(n+1\right)\left(n^2+1\right) \vdots\, 6$ (Vì $n-1, n, n+1$ là ba số nguyên liên tiếp)

Lại có $n^5 - n = \left(n-1\right)n\left(n+1\right)\left[\left(n^2-4\right)+5\right] = \left(n-2\right)\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\left(n+2\right) + 5\left(n-1\right)n\left(n+1\right) \vdots\, 5$ (Vì $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ là 5 số nguyên liên tiếp)

Vậy $n^5 - n \,\vdots\, 6, n^5 - n \,\vdots\, 5$ và ƯCLN(5; 6) = 1 nên $n^5 - n \,\vdots\, 30$ với mọi $n \in Z$

b) Giải phương trình $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \dfrac{x+3}{5}\,(*)$ (ĐK $x \ge \dfrac{2}{3}$)

Đặt $a = \sqrt{4x+1}, b = \sqrt{3x-2}\ \left(a \ge 0, b \ge 0\right)$

Ta có $(*) \Leftrightarrow a - b = \dfrac{a^2-b^2}{5} \Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(a+b-5\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ a+b-5=0 \end{array}\right.$

+) Trường hợp: $a - b = 0 \Rightarrow \sqrt{4x+1} = \sqrt{3x-2} \Rightarrow 4x+1 = 3x-2 \Rightarrow x = -3$ (loại vì $x \ge \dfrac{2}{3}$)

+) Trường hợp: $a + b - 5 = 0 \Rightarrow \sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2} = 5 \Rightarrow \sqrt{4x+1} = 5 - \sqrt{3x-2}\left(\dfrac{2}{3} \le x \le 9\right)$

$\Rightarrow 10\sqrt{3x-2} = 22 - x \Rightarrow x^2 - 344x + 684 = 0 \Rightarrow \left(x-2\right)\left(x-342\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\left(TMDK\right) \\ x = 342\left(khong\ TMDK\right) \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$

c) Ta có: $a^3+b^3+3\left(a^2+b^2\right)+4\left(a+b\right)+4=0 \Leftrightarrow \left(a^3+3a^2+4a+2\right)+\left(b^3+3b^2+4b+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(a+1\right)\left[\left(a^2+2a+1\right)+1\right]+\left(b+1\right)\left[\left(b^2+2b+1\right)+1\right]=0 \Leftrightarrow \left(a+1\right)^3+\left(b+1\right)^3+\left(a+1\right)+\left(b+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(a+1\right)^3+\left(b+1\right)^3+\left(a+1\right)+\left(b+1\right)=0 \Leftrightarrow \left(a+b+2\right)\left[\left(a+1\right)^2-\left(a+1\right)\left(b+1\right)+\left(b+1\right)^2+1\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(a+b+2\right)\left\{\left[\left(a+1\right)-\frac{1}{2}\left(b+1\right)\right]^2+\frac{3}{4}\left(b+1\right)^2+1\right\}=0 \Leftrightarrow a+b+2=0$

(Vì $\left[\left(a+1\right)-\frac{1}{2}\left(b+1\right)\right]^2+\frac{3}{4}\left(b+1\right)^2+1>0$). Do $\begin{cases} a+b+2=0 \\ ab>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2<a<0 \\ -2<b<0 \end{cases}$

Do đó $Q=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{-2}{a\left(-a-2\right)}=\frac{2}{a\left(a+2\right)}$

Mặt khác $\left(a+1\right)^2\ge 0 \Rightarrow a^2+2a\ge -1 \Rightarrow \frac{1}{a^2+2a}\le -1$ (Vì $-2<a<0 \Rightarrow a^2+2a=a\left(a+2\right)<0$)

Nên $Q=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{a\left(a+2\right)}\le -2$. Dấu “=” xảy ra $\begin{cases} a+b+2=0 \\ ab>0 \\ a+1=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=-1$

Vậy Max Q = $-2 \Leftrightarrow a=b=-1$

Bài 3: *(3,0 điểm)*

a) $\begin{cases} mx-y=2 \\ 3x+my=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=mx-2 \\ 3x+m\left(mx-2\right)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=mx-2 \\ \left(3+m^2\right)x=2m+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=m\cdot\frac{2m+5}{m^2+3}-2 \\ x=\frac{2m+5}{m^2+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{5m-6}{m^2+3} \\ x=\frac{2m+5}{m^2+3} \end{cases}$

(vì $m^2+3\ne 0, \forall m$)

Khi đó $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m+5}{m^2+3}>0 \\ \frac{5m-6}{m^2+3}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+5>0 \\ 5m-6<0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{2}<m<\frac{6}{5}$ (vì $m^2+3>0, \forall m$)

b) Ta có: $5x-2007y=1 \Leftrightarrow x=\frac{2007y+1}{5}=401y+\frac{2y+1}{5} \Rightarrow \frac{2y+1}{5}\in Z$

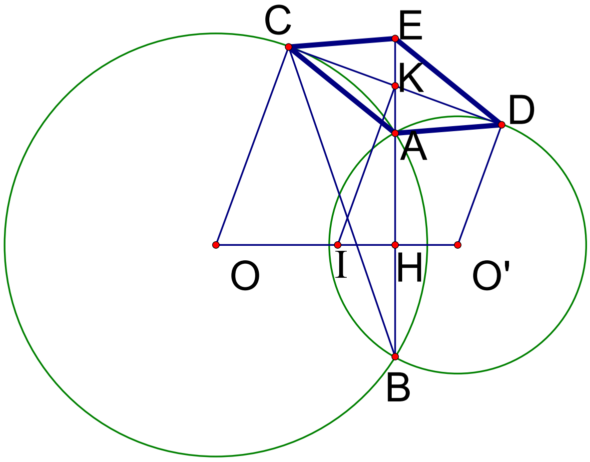
đặt $\frac{2y+1}{5}=m \left(m\in Z\right) \Rightarrow y=\frac{5m-1}{2}=2m+\frac{m-1}{2} \Rightarrow \frac{m-1}{2}\in Z$

đặt $\frac{m-1}{2}=k \left(k\in Z\right) \Rightarrow m=2k+1 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2007y+1}{5} \\ y=\frac{5\left(2k+1\right)-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2007\left(5k+2\right)+1}{5}=2007k+803 \\ y=5k+2 \end{cases}$

vì $x\in\left[0;3000\right] \Rightarrow 0\le 2007k+803\le 3000 \Rightarrow 0\le k\le 1 \Rightarrow k\in\left\{0;1\right\} \left(k\in Z\right)$

+) Với $k=0$, ta có $\begin{cases} x=803 \\ y=2 \end{cases}$;   +) Với $k=1$, ta có $\begin{cases} x=2810 \\ y=7 \end{cases}$.

Bài 4: *(4,5 điểm)*



a) **Chứng minh: $KC^2 = KA.KB$**.

ΔACK và ΔCBK có: $\widehat{AKC} = \widehat{CKB}$ (góc chung), $\widehat{ACK} = \widehat{CBK}$ (góc nội tiếp và góc ….)

Vậy $\Delta ACK \backsim \Delta CBK \Rightarrow \frac{KC}{KA} = \frac{KB}{KC} \Rightarrow KC^2 = KA \cdot KB$

b) **Chứng minh K là trung điểm của AE**.

Chứng minh tương tự câu a) có $KD^2 = KA.KB \Rightarrow KC^2 = KD^2 \Rightarrow KC = KD = \frac{1}{2}CD\,(a)$

Tứ giác ACED có: AD // CE, AC // DE (gt) nên tứ giác ACED là hình bình hành

Suy ra AE và CD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường (b)

Từ a) và b) $\Rightarrow$ K là trung điểm của AE.

c) **Chứng minh: BE < R + r**.

Tứ giác CDO'O có: OC // O'D (OC $\perp$ CD, O'D $\perp$ CD vì CD là tiếp tuyến của (O) và (O')), nên tứ giác CDO'O là hình thang.

Gọi I là trung điểm OO', K là trung điểm CD (theo trên) $\Rightarrow$ IK là đường trung bình bình thang CDO'O $\Rightarrow 2KI = OC + O'D = R + r\,(1)$

Gọi H là giao điểm của AB và OO'

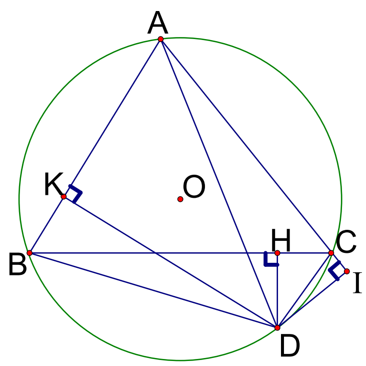
$\Rightarrow$ AH $\perp$ OO', AB = 2AH ((O) và (O') cắt nhau tại A, B)

vì AE = 2AK (câu b), AB = 2AH $\Rightarrow$ BE = 2(AK + AH) = 2KH (2)

Mặt khác ΔKHI vuông tại H (AH $\perp$ OO') $\Rightarrow$ KH < KI $\Rightarrow$ 2KH < 2KI (3)

Từ 1), 2), 3) $\Rightarrow$ BE < R + r.

Bài 5: *(3,0 điểm)* Chứng minh rằng: $\frac{BC}{DH} = \frac{AC}{DI} + \frac{AB}{DK}$



Cách 1:

ΔBKD và ΔCID có: $\widehat{BKD} = \widehat{CID} = 90^0$ (gt), $\widehat{KBD} = \widehat{ICD}$ (tứ giác ABDC nội tiếp)

Vậy $\Delta BKD \backsim \Delta CID \Rightarrow \frac{BK}{DK} = \frac{CI}{DI}$

Do đó $\frac{AC}{DI} + \frac{AB}{DK} = \frac{AI - CI}{DI} + \frac{AK + BK}{DK} = \left(\frac{AI}{DI} + \frac{AK}{DK}\right) + \left(\frac{BK}{DK} - \frac{CI}{DI}\right) = \frac{AI}{DI} + \frac{AK}{DK} \text{ (a)}$

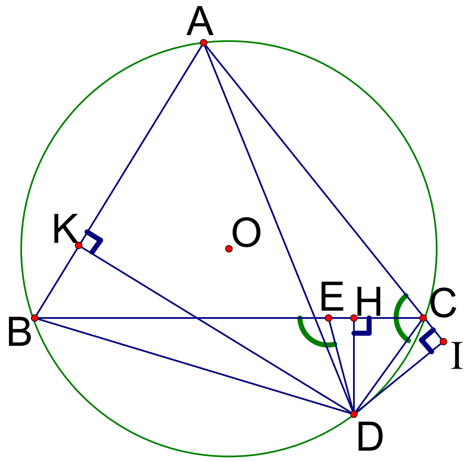
ΔAKD và ΔCHD có: $\widehat{AKD} = \widehat{CHD} = 90^0$ (gt), $\widehat{KAD} = \widehat{HCD}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$)

Vậy $\Delta AKD \backsim \Delta CHD \Rightarrow \frac{AK}{DK} = \frac{CH}{DH} \text{ (b)}$

ΔAID và ΔBHD có: $\widehat{AID} = \widehat{BHD} = 90^0$ (gt), $\widehat{IAD} = \widehat{HBD}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CD}$)

Vậy $\Delta AID \backsim \Delta BHD \Rightarrow \frac{AI}{DI} = \frac{BH}{DH} \text{ (c)}$

Từ a), b), c) $\Rightarrow \frac{AC}{DI} + \frac{AB}{DK} = \frac{BH}{DH} + \frac{CH}{DH} = \frac{BC}{DH}$



<u>Cách 2</u>:

Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $\widehat{BED} = \widehat{ACD}$

ΔBED và ΔACD có: $\widehat{BED} = \widehat{ACD}$ (gt), $\widehat{EBD} = \widehat{CAD}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CD}$)

Vậy $\Delta BED \backsim \Delta ACD$, lại có $DH \perp BE$, $DI \perp AC$ (gt) $\Rightarrow \frac{AC}{DI} = \frac{BE}{DH} \text{ (1)}$

ΔABD và ΔCED có: $\widehat{ABD} = \widehat{CED}$ (lần lượt bù với $\widehat{ACD} = \widehat{BED}$), $\widehat{BAD} = \widehat{ECD}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$)

Vậy $\Delta ABD \backsim \Delta CED$, lại có $DK \perp AB$, $DH \perp CE$ (gt) $\Rightarrow \frac{AB}{DK} = \frac{CE}{DH} \text{ (2)}$

Từ 1), 2) $\Rightarrow \frac{AC}{DI} + \frac{AB}{DK} = \frac{BE}{DH} + \frac{CE}{DH} = \frac{BC}{DH}$

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP BUÔN MA THUỘT

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI HỌC SINH GIỎI BẬC THCS
CẤP THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2016-2017
MÔN: TOÁN
Thời gian: 150 phút *(không tính giao đề)*
Ngày thi: 24/02/2017

Bài 1: *(4 điểm)*

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{3x+3}{x\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(\dfrac{2x-5\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-1}\right)$

a) Tìm điều kiện của x để P có nghĩa và rút gọn P.

b) Tính giá trị của P khi $x=\dfrac{18}{4+\sqrt{7}}$.

c) Tính giá trị lớn nhất của P.

Bài 2: *(5,5 điểm)*

a) Chứng minh rằng với $B=n^3+3n^2-n-3\,\vdots\,48$ với n là số nguyên lẻ.

b) Giải phương trình $(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2})(1+\sqrt{x^2+7x+10})=3$.

c) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên n và k để n^4+4^{2k+1} là số nguyên tố (trong đó $n\ge 1$).

Bài 3: *(2,5 điểm)*

a) Cho đường thẳng (d) có phương trình 2m(m + 1)x – y = –m và đường thẳng (d') có phương trình 4(m – 2)x + y = 3m – 1, trong đó x, y là ẩn số, m là tham số, cho biết $m\ne -1$, $m\ne 0$, $m\ne 2$ và $m\ne \dfrac{1}{3}$). Hãy xác định các giá trị của m để (d) // (d').

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2+y^2-6x+4y+13=0$.

Bài 4: *(4,0 điểm)* Cho ba điểm A, B, C cố định, thẳng hàng, B nằm giữa A và C. Vẽ đường tròn (O;R) sao cho (O;R) luôn nhận BC làm dây cung (BC < 2R). Từ A kẻ các tiếp tuyến AF và AE đến (O;R), (F nằm trong nửa mặt phẳng bờ là AO có chứa dây BC). Gọi I là trung điểm của dây BC, EF cắt BC tại N và cắt AO tại K. Chứng minh:

a) $AF^2=AB.AC$.

b) 5 điểm A, E, O, I, F cùng thuộc một đường tròn.

c) Khi đường tròn (O;R) thay đổi thì đường tròn ngoại tiếp ΔKOI luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5: *(4,0 điểm)* Cho đường tròn tâm O đường kính AB, lấy điểm M thuộc đường tròn sao cho MA < MB (M khác A và B). Vẽ MC là tia phân giác của $\widehat{AMB}$ (C thuộc AB). Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt các đường thẳng AM và BM lần lượt tại D và H. Chứng minh rằng:

a) Các đường thẳng AH và BD cắt nhau tại một điểm N nằm trên đường tròn (O).

b) Gọi E là hình chiếu của H trên tiếp tuyến tại A của (O), gọi F là hình chiếu của D trên tiếp tuyến tại B của đường tròn (O). Chứng minh các tứ giác ACHE và CBFD là hình vuông.

c) Chứng minh bốn điểm M, N, E, F thẳng hàng.

d) Gọi S_1,S_2 lần lượt là diện tích của các tú giác ACHE và BCDF. Chứng minh: $CM^2<\sqrt{S_1S_2}$.

BÀI GIẢI SƠ LƯỢC

Bài 1: *(4,0 điểm)*

a) P có nghĩa khi $\begin{cases} x \ge 0,\ x\sqrt{x}-1 \ne 0 \\ x+\sqrt{x}+1 \ne 0 \\ \sqrt{x}-1 \ne 0 \\ \dfrac{2x-5\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-1} \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0, x \ne 1$

$$P=\left(\frac{3x+3}{x\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(\frac{2x-5\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-1}\right)=\frac{3x+3-\left(\sqrt{x}-1\right)^2-\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}:\frac{2x-5\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{2x-5\sqrt{x}+5}=\frac{1}{2x-5\sqrt{x}+5}$$

b) Ta có: $x=\dfrac{18}{4+\sqrt{7}}=\dfrac{18\left(4-\sqrt{7}\right)}{9}=8-2\sqrt{7}=\left(\sqrt{7}-1\right)^2$ (TMĐK).

Do đó $P=\dfrac{1}{2\left(8-2\sqrt{7}\right)-5\sqrt{\left(\sqrt{7}-1\right)^2}+5}=\dfrac{1}{26-9\sqrt{7}}=\dfrac{26+9\sqrt{7}}{109}$

c) $P=\dfrac{1}{2x-5\sqrt{x}+5}=\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x}-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{15}{8}}\le\dfrac{8}{15}$. Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}-\dfrac{5}{4}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{25}{16}$ (TMĐK)

Vậy max P = $\dfrac{8}{15}\Leftrightarrow x=\dfrac{25}{16}$

Bài 2: *(5,5 điểm)*

a) $B=n^3+3n^2-n-3=\left(n-1\right)\left(n+1\right)\left(n+3\right)=2k\left(2k+2\right)\left(2k+4\right)=8k\left(k+1\right)\left(k+2\right)$ (n lẻ, $n=2k+1$)

Vì $k\left(k+1\right)\left(k+2\right)\,\vdots\,6\Rightarrow B\,\vdots\,48$

b) ĐK: $x\ge-2$. Đặt $a=\sqrt{x+5}, b=\sqrt{x+2}\ \left(a\ge0, b\ge0\right)$. ta có: $\begin{cases} a^2-b^2=3 \\ \left(a-b\right)\left(1+ab\right)=3 \end{cases}$

$$\Rightarrow a^2-b^2=\left(a-b\right)\left(1+ab\right)\Rightarrow\left(a-b\right)\left(a+b-1-ab\right)=0\Rightarrow\left(a-b\right)\left(a-1\right)\left(1-b\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} a=b \\ a=1 \\ b=1 \end{array}\right.$$

+) $a=b\Rightarrow\sqrt{x+5}=\sqrt{x+2}\Rightarrow 0x=3$ (vô nghiệm)

+) $a=1\Rightarrow b^2=-2$ (vô lí)

+) $b=1\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=2$ (vì $a\ge0$). Ta có: $\sqrt{x+5}=2\Rightarrow x=-1$ (TMĐK)

Vậy phương trình có một nghiệm là $x=-1$

c) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên n và k để n^4+4^{2k+1} là số nguyên tố (trong đó $n\ge1$).

Ta có: $n^4+4^{2k+1}=\left[n^4+2n^2 2^{2k+1}+2^{2(2k+1)}\right]-2n^2 2^{2k+1}=\left(n^2+2^{2k+1}\right)^2-\left(2^{k+1}n\right)^2$

$= \left(n^2 + 2^{2k+1} - 2^{k+1}n\right)\left(n^2 + 2^{2k+1} + 2^{k+1}n\right) = \left[\left(n - 2^k\right)^2 + 2^{2k}\right]\left[\left(n + 2^k\right)^2 + 2^{2k}\right]$

+) Nếu $n = 1, k = 0$ thì $n^4 + 4^{2k+1} = 5$ là số nguyên tố

+) Nếu $n > 1, k > 0$ thì $\left(n - 2^k\right)^2 + 2^{2k} > 2; \left(n + 2^k\right)^2 + 2^{2k} > 2 \Rightarrow n^4 + 4^{2k+1}$ là hợp số.

Vậy n = 1, k = 0

Bài 3: *(2,5 điểm)*

a) Ta có : $2m(m + 1)x - y = -m \Leftrightarrow y = 2m(m + 1)x + m$ *(d)*

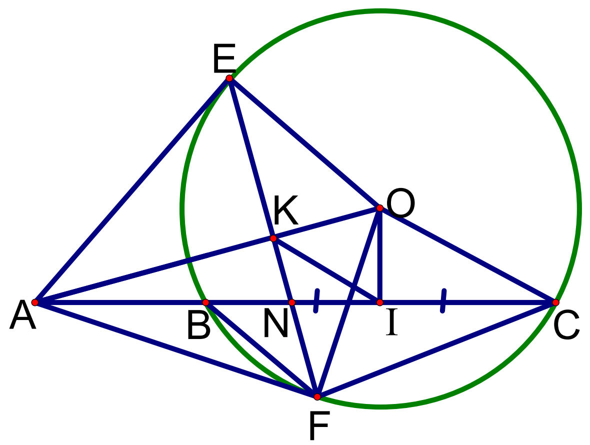
$4(m - 2)x + y = 3m - 1 \Leftrightarrow y = -4(m - 2)x + 3m - 1$ *(d')*

Do đó (d) // (d') $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m(m+1) = -4(m-2) \\ m \neq 3m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m+4) = 0 \\ m \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -4 \end{array}\right.$

Vậy m = 1 hoặc m = –4 thì (d) // (d')

b) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ (thỏa mãn x, y ∈ Z)

Bài 4: *(4,0 điểm)*



a) $AF^2 = AB.AC$

ΔACF và ΔAFB có: $\widehat{CAF} = \widehat{FAB}$ (góc chung), $\widehat{ACF} = \widehat{AFB}$ (góc nội tiếp và góc ….)

Vậy ΔACF ∽ ΔAFB $\Rightarrow \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AB}{AF} \Rightarrow AF^2 = AB \cdot AC$

b) <u>5 điểm A, E, O, I, F cùng thuộc một đường tròn.</u>

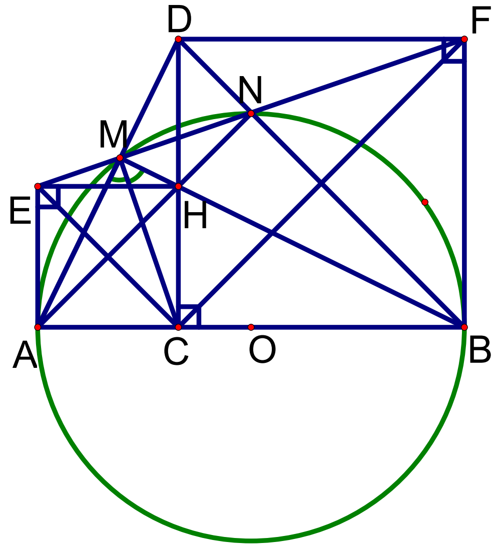
$\widehat{AEO} = \widehat{AFO} = 90^0$ (AE, AF là tiếp tuyến của (O)); $\widehat{AIO} = 90^0$ (do $IB = IC = \dfrac{BC}{2}$)

Vậy 5 điểm A, E, O, I, F cùng thuộc một đường tròn đường kính OA.

c) <u>Khi đường tròn (O;R) thay đổi thì đường tròn ngoại tiếp ΔKOI luôn đi qua một điểm cố định.</u>

Vì B, C cố định ⇒ I cố định, nên đường tròn ngoại tiếp ΔKOI luôn đi qua một điểm cố định I khi đường tròn (O;R) thay đổi.

Bài 5: *(4,0 điểm)*



a) <u>Các đường thẳng AH và BD cắt nhau tại một điểm N nằm trên đường tròn (O).</u>

ΔABD: $DC \perp AB$ (gt), $BM \perp AD$ ($\widehat{AMB} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow$ H là trực tâm $\Delta ABD \Rightarrow AN \perp BD \Rightarrow \widehat{ANB} = 90^0 \Rightarrow$ N nằm trên đường tròn (O).

b) <u>Chứng minh các tứ giác ACHE và CBFD là hình vuông.</u>

Ta có: $\widehat{ACH} = \widehat{AEH} = 90^0$ (gt), $\widehat{AMH} = 90^0$ (cmt) $\Rightarrow$ A, C, H, M, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH $\Rightarrow \widehat{CAH} = \widehat{CMH} = \dfrac{\widehat{AMB}}{2} = 45^0 \Rightarrow$ AH là phân giác góc CAE

Tứ giác ACHE: $\hat{A} = \hat{C} = \hat{E} = 90^0$, AH là phân giác góc CAE $\Rightarrow$ tứ giác ACHE là hình vuông

Do $\widehat{CAH} = 45^0, \widehat{ANB} = 90^0 \Rightarrow \Delta ABN$ vuông cân tại N $\Rightarrow \widehat{CBD} = 45^0 = \dfrac{\widehat{CBF}}{2} \Rightarrow$ BD là phân giác góc CBF.

Tứ giác CBFD: $\hat{B} = \hat{C} = \hat{F} = 90^0$, BD là phân giác góc CBF $\Rightarrow$ tứ giác CBFD là hình vuông

c) <u>Chứng minh bốn điểm M, N, E, F thẳng hàng.</u>

$\widehat{AME} = \widehat{AHE} = 45^0$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AE}$ của đường tròn đường kính AH)

$\widehat{BMN} = \widehat{BAN} = 45^0$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BN}$ của đường tròn (O))

$\Rightarrow \widehat{EMN} = \widehat{AME} + \widehat{AMB} + \widehat{BMN} = 45^0 + 90^0 + 45^0 = 180^0 \Rightarrow$ E, M, N thẳng hàng (1)

Lại có $\widehat{BMD} = 90^0$ (BM $\perp$ AD), tứ giác CBFD là hình vuông $\Rightarrow$ M nằm trên đường tròn ngoại tiếp hình vuông CBFD $\Rightarrow \widehat{CMF} = 90^0 \Rightarrow FM \perp CM$, lại có $NM \perp CM$ ($\widehat{NMC} = \widehat{BMN} + \widehat{BMC} = 45^0 + 45^0 = 90^0$) $\Rightarrow$ F, M, N thẳng hàng (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ E, M, N, F thẳng hàng (đpcm)

d) <u>Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của các tứ giác ACHE và BCDF. Chứng minh: $CM^2 < \sqrt{S_1S_2}$.</u>

Ta có $\widehat{ECH} = \widehat{FCH} = 45^0$ (ACHE; CBFE là các hình vuông) $\Rightarrow \widehat{ECF} = 90^0$

ΔECF: $\widehat{ECF} = 90^0$, $CM \perp EF$ (cmt)

$$\Rightarrow \frac{1}{CM^2} = \frac{1}{CE^2} + \frac{1}{CF^2} \geq \frac{2}{CE \cdot CF} = \frac{2}{\sqrt{2}AC \cdot \sqrt{2}BC} = \frac{1}{\sqrt{AC^2 \cdot BC^2}} = \frac{1}{\sqrt{S_1S_2}} \Rightarrow CM^2 \leq \sqrt{S_1S_2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{1}{CE} = \dfrac{1}{CF} \Leftrightarrow CE = CF \Leftrightarrow$ AC = BC $\Leftrightarrow$ MA = MB (không thỏa mãn MA < MB). Vậy $CM^2 < \sqrt{S_1S_2}$

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP BUÔN MA THUỘT

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS
CẤP THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2017-2018
MÔN: TOÁN
Thời gian: 150 phút *(không tính giao đề)*
Ngày thi: 06/03/2018

Bài 1: *(4,0 điểm)*

a) Cho biểu thức $K=\dfrac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3}-\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$. Tìm điều kiện để K có nghĩa và rút gọn K.

b) Cho $B=\dfrac{2018x+2019\sqrt{1-x^2}+2020}{\sqrt{1-x^2}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của B.

Bài 2: *(4,5 điểm)*

a) Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương thì: $A=5^n(5^n+1)-6^n(3^n+2^n)\,\vdots\,91$

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x+8y=3(x^2+xy+y^2)$

c) Giải phương trình: $\sqrt{x^2-3x+2}+1=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Bài 3: *(3,5 điểm)*

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm giá trị của tham số m để hai đường thẳng (d): $y=x-2$ và (d’): $y=3-mx$ cắt nhau tại một điểm có tọa độ dương.

b) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{9}{c}=3\\ a+b+c\le 12\end{cases}$. Tìm a, b, c.

Bài 4: *(4,5 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông cân tại A có AB = AC = a. Gọi D là trung điểm của BC, E là một điểm di động trên đoạn thẳng AD. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của E lên các cạnh AB và AC. Kẻ HI vuông góc với DK (với $I\in DK$). Đường thẳng DK cắt đường thăng vuông góc với AB tại B ở F.

a) Chứng minh rằng năm điểm A, H, E, I, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Tính số đo góc HIB.

c) Chứng minh rằng ba điểm B, E, I thẳng hàng.

d) Tìm vị trí của E trên AD để diện tích tam giác ABI lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo a.

Bài 5: *(3,5 điểm)*

Cho đường tròn (O,R) vẽ tứ giác ABCD có 4 đỉnh thuộc đường tròn (O).

a) Chứng minh AB.DC + AD.BC = BD.AC

b) Gọi D là điểm chính giữa của cung lớn BC có chứa đỉnh A. Trên BC chọn I sao cho BI = 2IC, DI cắt đường tròn (O;R) tại điểm thứ hai là E.

Chứng minh $AB+2AE=\dfrac{AE.BC}{CE}$

--------------- Hết ----------------

BÀI GIẢI SƠ LƯỢC

Bài 1: *(4,0 điểm)*

a) K có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x+2\sqrt{x}-3 \ne 0 \\ \sqrt{x}-1 \ne 0 \\ \sqrt{x}+3 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne 1 \end{cases}$

$$K = \frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} = \frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19-2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)+\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19-2x-6\sqrt{x}+x-4\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)} = \frac{x\sqrt{x}-x+16\sqrt{x}-16}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)} = \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+16\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)} = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3}$$

b) Cho $B = \dfrac{2018x+2019\sqrt{1-x^2}+2020}{\sqrt{1-x^2}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của B.

(ĐK: $-1 < x < 1$) Đặt $a = 2019$, ta có $B = \dfrac{(a-1)x + a\sqrt{1-x^2}+(a+1)}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{(a-1)x+(a+1)}{\sqrt{1-x^2}} + a = M + a$

$$\Rightarrow M^2 = \frac{(a-1)^2x^2+2\left(a^2-1\right)x+(a+1)^2}{1-x^2} = \frac{4a\left(1-x^2\right)+(a+1)^2x^2+2\left(a^2-1\right)x+(a-1)^2}{1-x^2}$$

$$= 4a + \frac{\left[(a+1)x+(a-1)\right]^2}{1-x^2} \ge 4a \quad \left(\text{do } 1-x^2>0, \left[(a+1)x+(a-1)\right]^2 \ge 0\right)$$

$\Rightarrow M \ge 2\sqrt{a} \Rightarrow B \ge 2\sqrt{a}+a = 2\sqrt{2019}+2019$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a+1)x+(a-1)=0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{a-1}{a+1} = -\dfrac{2018}{2020} = -\dfrac{1009}{1010}$ (TMĐK)

Bài 2: *(4,5 điểm)*

a) $A = 5^n(5^n+1)-6^n(3^n+2^n) = 25^n+5^n-18^n-12^n = \left(25^n-18^n\right)-\left(12^n-5^n\right) \vdots 7$

lại có $A = 25^n+5^n-18^n-12^n = \left(25^n-12^n\right)-\left(18^n-5^n\right) \vdots 13$; mặt khác $(7;13)=1 \Rightarrow A \vdots 7\cdot 13 = 91$

b) $x+8y = 3(x^2+xy+y^2) \Leftrightarrow 3x^2+(3y-1)x+3y^2-8y=0 \quad (*)$

Ta có $\Delta = (3y-1)^2-12\left(3y^2-8y\right) = -27y^2+90y+1$.

Do đó $(*)$ có nghiệm $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow -27y^2+90y+1 \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{15-2\sqrt{57}}{9} \le y \le \dfrac{15+2\sqrt{57}}{9} \Rightarrow y \in \{0;1;2;3\}$

+) $y=0 \Rightarrow 3x^2-x=0 \Rightarrow x(3x-1)=0 \Rightarrow x=0$ (vì $x \in Z$)

+) $y=1 \Rightarrow 3x^2+2x-5=0 \Rightarrow (x-1)(3x+5)=0 \Rightarrow x=1$ (vì $x \in Z$)

+) $y=2 \Rightarrow 3x^2+5x-4=0 \Rightarrow x = \dfrac{-5\pm\sqrt{73}}{6}$ (loại, vì $x \in Z$)

+) $y=3 \Rightarrow 3x^2+8x+3=0 \Rightarrow x = \dfrac{-4\pm\sqrt{7}}{3}$ (loại, vì $x \in Z$)

Vậy các cặp số nguyên $(x;y)$ cần tìm là $(0;0);(1;1)$

c) ĐKXĐ: $\left[\begin{array}{l} 0 < x \le 1 \\ x \ge 2 \end{array}\right.$

$\sqrt{x^2-3x+2}+1=x+\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2}=x+\frac{1}{\sqrt{x}}-1 \Rightarrow x^2-3x+2=x^2+\frac{1}{x}+1+2\sqrt{x}-2x-\frac{2}{\sqrt{x}}$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)+2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-1=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+1=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)^2=0 \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}>0\\ \sqrt{x}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<0\end{array}\right.$

$\Rightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (TMĐK)

Bài 3: *(3,5 điểm)*

a) (d) cắt (d’) $\Leftrightarrow 1\neq -m \Leftrightarrow m\neq -1$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (d’) là:

$$x-2=3-mx \Leftrightarrow (m+1)x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{m+1} \text{ (do } m\neq -1)$$

Khi đó $y=\frac{5}{m+1}-2=\frac{3-2m}{m+1}$

Tọa độ giao điểm của (d) và (d’) dương $\Rightarrow \begin{cases}\frac{5}{m+1}>0\\ \frac{3-2m}{m+1}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m+1>0\\ 3-2m>0\end{cases} \Leftrightarrow -1<m<\frac{3}{2}$ (TMĐK)

b) Với a, b, x, y là các số dương ta chứng minh minh $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$ (1)

$(1)\Leftrightarrow (a^2y+b^2x)(x+y)\geq xy(a+b)^2 \quad \Leftrightarrow a^2xy+a^2y^2+b^2x^2+b^2xy-a^2xy-b^2xy-2abxy\geq 0$

$\Leftrightarrow a^2y^2+b^2x^2-2abxy\geq 0 \quad \Leftrightarrow (ay-bx)^2\geq 0 \quad (Luon\ dung\ voi\ moi\ a,b,x,y)$

Dấu “=” xảy ra khi $ay-bx=0\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

Dựa vào (1) ta chứng minh $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ (2) với a, b, c, x, y, z các số dương.

Thật vậy $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$. Dấu “=” xảy ra khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

Áp dụng (2), ta có: $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\geq\frac{(1+2+3)^2}{a+b+c}=\frac{36}{a+b+c}\geq\frac{36}{12}=3$ (vì $0<a+b+c\leq 12$)

Dấu ”=” xảy ra $\begin{cases}\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}\\ a+b+c=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=4\\ c=6\end{cases}$

Bài 4: *(4,5 điểm)*

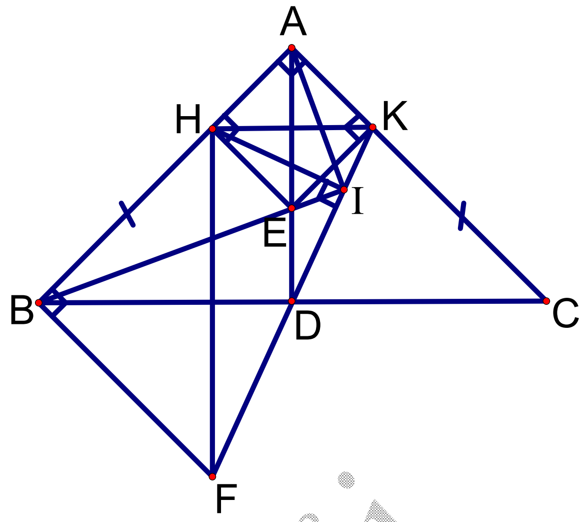
a) Chứng minh rằng năm điểm A, H, E, I, K cùng thuộc một đường tròn.

Dễ dàng chứng minh tứ giác AHEK là hình vuông

$\Rightarrow$ A, H, E, K thuộc đường tròn đường kính HK

Lại có $\widehat{HIK}=90^0 \Rightarrow$ I thuộc đường tròn đường kính HK

Vậy A, H, E, K, I thuộc đường tròn đường kính HK



b) Tính số đo góc HIB.

$\Delta BDF = \Delta CDK\,(g.c.g) \Rightarrow BF = CK$, lại có $BH = AB - AH = AC - AK = CK \Rightarrow BF = BH$

mà $\widehat{HBF} = 90^0\,(BF \perp AB)$ nên ΔBHF vuông cân tại B $\Rightarrow \widehat{HFB} = 45^0$

Tứ giác BHIF có $\widehat{HIF} = \widehat{HBF} = 90^0\,(gt) \Rightarrow$ tứ giác BHIF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HIB} = \widehat{HFB} = 45^0$

c) Chứng minh rằng ba điểm B, E, I thẳng hàng.

Ta có $\widehat{HAE} = 45^0$ (do tứ giác AHEK là hình vuông)

Vì A, H, E, K, I thuộc đường tròn đường kính HK (câu a)

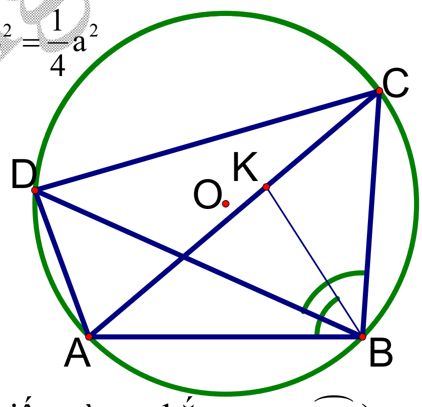
$\Rightarrow \widehat{HIE} = \widehat{HAE} = 45^0$, mặt khác $\widehat{HIB} = 45^0$ (cmt) $\Rightarrow$ B, E, I thẳng hàng

d) Tìm vị trí của E trên AD để diện tích tam giác ABI lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo a.

ΔABI vuông tại I (gt), nên $S_{ABI} = \frac{1}{2}AI \cdot BI \le \frac{1}{2} \cdot \frac{AI^2 + BI^2}{2} = \frac{1}{4}AB^2 = \frac{1}{4}a^2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AI = BI \Leftrightarrow I \equiv D \Leftrightarrow E \equiv D$

Vậy $\max S_{ABI} = \frac{1}{4}a^2 \Leftrightarrow E \equiv D$



__Bài 5__: *(4,0 điểm)*

a) Chứng minh AB.DC + AD.BC = BD.AC

Trên đoạn thẳng AC lấy điểm K sao cho $\widehat{ABK} = \widehat{CBD}$

Ta có: $\widehat{ABK} = \widehat{CBD} \Rightarrow \widehat{ABD} + \widehat{DBK} = \widehat{KBC} + \widehat{DBK} \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{KBC}$

Xét ΔABD và ΔKBC: $\widehat{ABD} = \widehat{KBC}$ (cmt), $\widehat{ADB} = \widehat{KCB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$)

Vậy $\Delta ABD \backsim \Delta KBC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{KC}{BC} \Rightarrow AD \cdot BC = KC.BD\,(a)$

Xét ΔABK và ΔDBC: $\widehat{ABK} = \widehat{DBC}$ (gt), $\widehat{BAK} = \widehat{BDC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BC}$)

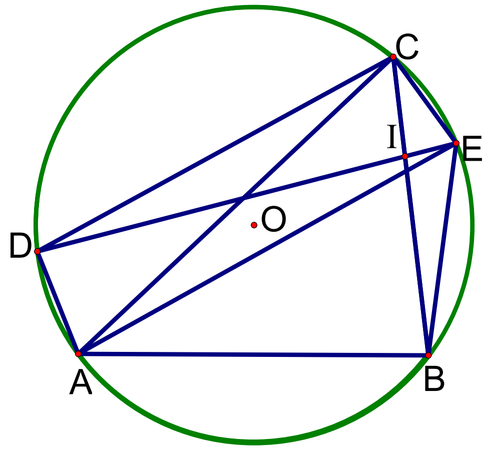
Vậy $\Delta ABK \backsim \Delta DBC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AK} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow AB \cdot DC = AK.BD\,(b)$

Từ a) và b) $\Rightarrow AB \cdot DC + AD \cdot BC = AK.BD + KC \cdot BD = BD \cdot (AK + KC) = BD \cdot AC$

b) Chứng minh $AB + 2AE = \frac{AE.BC}{CE}$

Cần xem lại đề !!!!!! (Kiểm nghiệm trên sketpad dưới đây)

Trường hợp này đúng



$m\,\overline{CI} = 1{,}81$ cm

$m\,\overline{BI} = 3{,}62$ cm

$m\,\overline{BI} - 2 \cdot m\,\overline{CI} = 0{,}00$ cm

$m\,\overline{BA} = 6{,}34$ cm

$m\,\overline{AE} = 7{,}82$ cm

$m\,\overline{CB} = 5{,}43$ cm

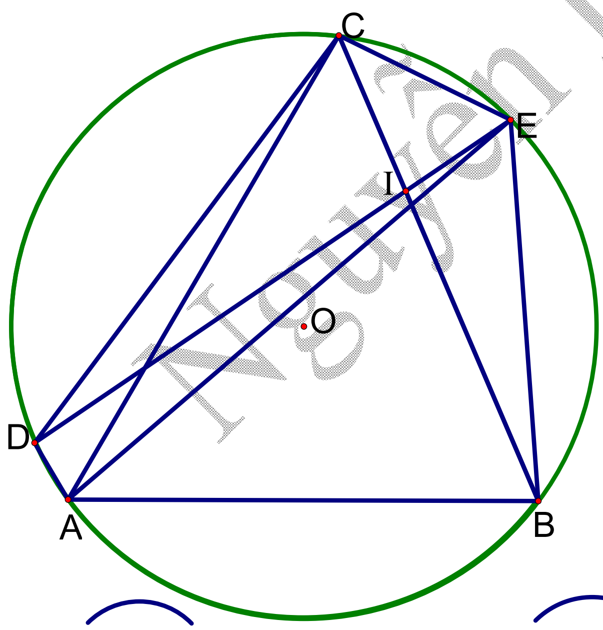
$m\,\overline{CE} = 1{,}93$ cm

$m\,\overline{AC} = 7{,}82$ cm

$m\,\overset{\frown}{BAD} = 136{,}46°$ $m\,\overset{\frown}{CGD} = 136{,}46°$

$$(m\,\overline{BA} + 2 \cdot m\,\overline{AE}) - \frac{m\,\overline{AE} \cdot m\,\overline{CB}}{m\,\overline{CE}} = 0{,}00 \text{ cm}$$

Trường hợp này sai



$m\,\overline{CI} = 3{,}07$ cm

$m\,\overline{BI} = 6{,}14$ cm

$m\,\overline{BI} - 2 \cdot m\,\overline{CI} = 0{,}00$ cm

$m\,\overline{BA} = 8{,}56$ cm

$m\,\overline{AE} = 10{,}61$ cm

$m\,\overline{CB} = 9{,}20$ cm

$m\,\overline{CE} = 3{,}48$ cm

$m\,\overline{AC} = 9{,}75$ cm

$m\,\overset{\frown}{BAD} = 120{,}08°$ $m\,\overset{\frown}{CGD} = 120{,}08°$

$$(m\,\overline{BA} + 2 \cdot m\,\overline{AE}) - \frac{m\,\overline{AE} \cdot m\,\overline{CB}}{m\,\overline{CE}} = 1{,}70 \text{ cm}$$

Bàn luận: Đẳng thức cần chứng minh $\Leftrightarrow AB \cdot CE + 2AE \cdot CE = AE \cdot BC\ (*)$

Áp dụng kết quả câu a) tứ giác ABEC nội tiếp đường tròn (O) nên ta có:
$AB \cdot CE + BE \cdot AC = AE.BC$, do đó để chứng minh $(*)$ ta cần chứng minh

$2AE \cdot CE = BE \cdot AC \Leftrightarrow \frac{CE}{BE} = \frac{AC}{2AE}(**)$

Lại có $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BAD} \Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{BED} \Rightarrow$ EI là phân giác của $\Delta BCE \Rightarrow \frac{CE}{BE} = \frac{IC}{IB} = \frac{1}{2}(IB = 2IC)$

Nên để chứng minh $(**)$ ta chứng minh $\frac{AC}{2AE} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow AC = AE$!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Cần thêm điều kiện gì thì mới có AC = AE đây ! (Mời các bạn suy nghĩ nhé, tui đau đầu rồi)

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP BUÔN MA THUỘT

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS
CẤP THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2018-2019
MÔN: TOÁN
Thời gian: 150 phút *(không tính giao đề)*
Ngày thi: 25/01/2019

Bài 1: *(4,0 điểm)*

a) Cho biểu thức $K=\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x}+1}+\dfrac{\sqrt{2x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}-1}-1\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x}+1}-\dfrac{\sqrt{2x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}-1}+1\right)$.

Tìm điều kiện để K có nghĩa và rút gọn K.

b) Cho $A=\dfrac{xy\sqrt{z-1}+yz\sqrt{x-2}+zx\sqrt{y-3}}{xyz}$. Tìm giá trị lớn nhất của *A*.

Bài 2: *(5,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n chẵn, $n\geq 4$ ta luôn có: $n^4-4n^3-4n^2+16n \,\vdots\, 384$.

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $3x+7y=55$.

c) Giải phương trình: $x+\sqrt{25-x^2}+x\sqrt{25-x^2}=5$.

d) Cho $a>0, b>0, c>0$ và $a+b+c=1$.

Chứng minh $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\leq\sqrt{6}$. Dấu "=" xảy ra khi nào ?

Bài 3: *(3,0 điểm)*

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y=(k-1)x+n \quad (k\neq 1)$ và hai điểm $A(0;2), B(-1;0)$ (với k, n là các tham số).

1) Tìm giá trị của k và n để:

a) Đường thẳng (d) đi qua hai điểm A và B.

b) Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(\Delta): y=x+2-k$.

2) Cho $n=2$. Tìm k để đường thẳng (d) cắt trục Ox tại điểm C sao cho diện tích tam giác OAC gấp hai lần diện tích tam giác OAB.

Bài 4: *(2,0 điểm)*

Cho góc xOy. Hai điểm A, B thuộc Ox. Hai điểm C, D thuộc Oy. Tìm tập hợp những điểm M nằm trong góc xOy sao cho hai tam giác MAB và MCD có cùng diện tích.

Bài 5: *(6,0 điểm)*

Cho đường tròn (O) đường kính BC, dây AD vuông góc BC tại H. Gọi E, F theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC. Gọi (I), (K) theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp tam giác HBE, tam giác HCF.

a) Xác định vị trí tương đối của các đường tròn: (I) và (O); (K) và (O); (I) và (K).

b) Tứ giác AEHF hình gì ? Vì sao ?

c) Chứng minh: $AE\cdot AB=AF\cdot AC$

d) Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của (I) và (K)

e) Xác định vị trí điểm H để EF có độ dài lớn nhất.

---------------- Hết ----------------

BÀI GIẢI SƠ LƯỢC

Bài 1: *(4,0 điểm)*

a) K có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{2x}+1 \ne 0 \\ \sqrt{2x}-1 \ne 0 \\ \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x}+1} - \dfrac{\sqrt{2x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}-1} + 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2\left(\sqrt{x}+1\right)}{1-2x} \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Ta có: $K = \left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x}+1} + \dfrac{\sqrt{2x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}-1} - 1 \right) : \left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x}+1} - \dfrac{\sqrt{2x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}-1} + 1 \right)$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{2x}-1\right)+\left(\sqrt{2x}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2x}+1\right)-\left(2x-1\right)}{\left(\sqrt{2x}+1\right)\left(\sqrt{2x}-1\right)} : \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{2x}-1\right)-\left(\sqrt{2x}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2x}+1\right)+\left(2x-1\right)}{\left(\sqrt{2x}+1\right)\left(\sqrt{2x}-1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}x-\sqrt{x}+\sqrt{2x}-1+2x+\sqrt{2x}+\sqrt{2}x+\sqrt{x}-2x+1}{\sqrt{2}x-\sqrt{x}+\sqrt{2x}-1-2x-\sqrt{2x}-\sqrt{2}x-\sqrt{x}+2x-1} = \frac{2\sqrt{2x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{-2\left(\sqrt{x}+1\right)} = -\sqrt{2x}$$

b) (ĐK: $x \ge 2; y \ge 3; z \ge 1$)

$$A = \frac{xy\sqrt{z-1}+yz\sqrt{x-2}+zx\sqrt{y-3}}{xyz} = \frac{\sqrt{z-1}}{z} + \frac{\sqrt{x-2}}{x} + \frac{\sqrt{y-3}}{y} = \frac{\sqrt{z-1}}{z} + \frac{\sqrt{2(x-2)}}{\sqrt{2}x} + \frac{\sqrt{3(y-3)}}{\sqrt{3}y}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2} \quad (a \ge 0; b \ge 0)$. Do $z-1 \ge 0; x-2 \ge 0; y-3 \ge 0$ nên ta có:

$$\sqrt{z-1} \le \frac{1+(z-1)}{2} = \frac{z}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{z-1}}{z} \le \frac{1}{2}; \quad \sqrt{2(x-2)} \le \frac{2+(x-2)}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2(x-2)}}{\sqrt{2}x} \le \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{3(y-3)} \le \frac{3+(y-3)}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3(y-3)}}{\sqrt{3}y} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow A \le \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{12}$. Dấu "=" xảy ra $\begin{cases} z-1=1 \\ x-2=2 \\ y-3=3 \\ x \ge 2; y \ge 3; z \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=6 \\ z=2 \end{cases}$

Vậy $Max(A) = \dfrac{6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{12} \quad khi\ x=4; y=6; z=2$

Bài 2: *(5,0 điểm)*

a) Vì n chẵn $\Rightarrow n = 2k \left(k \in N, k \ge 2\right)$.

Do đó: $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n = (2k)^4 - 4(2k)^3 - 4(2k)^2 + 16(2k) = 16k^4 - 32k^3 - 16k^2 + 32k$

$= 16k\left(k^3 - 2k^2 - k + 2\right) = 16(k-2)(k-1)k(k+1)$

Vì $k-2, k-1, k, k+1$ là bốn số tự nhiên liên tiếp $\Rightarrow (k-2)(k-1)k(k+1) \vdots 3$ và $(k-2)(k-1)k(k+1) \vdots 8 \Rightarrow (k-2)(k-1)k(k+1) \vdots 24 \Rightarrow 16(k-2)(k-1)k(k+1) \vdots 16 \cdot 24 = 384$

Vậy $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n \vdots 384$ với mọi số tự nhiên n chẵn, $n \ge 4$

b) Ta có: $3x + 7y = 55 \Leftrightarrow x = \dfrac{55-7y}{3} = 18 - 2y + \dfrac{1-y}{3} \left(0 < y < 8\right)$

Đặt $t=\dfrac{1-y}{3}\Rightarrow y=1-3t\left(t\in Z\right);\ x=18-2\left(1-3t\right)+t=16+7t$

Vì $0<y<8\Rightarrow 0<1-3t<8\Rightarrow -2\le t\le 0\Rightarrow t\in\{-2;-1;0\}$

+) Nếu $t=-2$ thì $x=16+7\cdot(-2)=2;\ y=1-3\cdot(-2)=7$

+) Nếu $t=-1$ thì $x=16+7\cdot(-1)=9;\ y=1-3\cdot(-1)=4$

+) Nếu $t=0$ thì $x=16+7\cdot 0=16;\ y=1-3\cdot 0=1$

Vậy các nghiệm nguyên dương của phương trình là $(2;7),(9;4),(16;1)$

c) (ĐK: $-5\le x\le 5$). Vì $-5\le x\le 5\Rightarrow 5+x\ge 0; 5-x\ge 0$. Do đó

$$x+\sqrt{25-x^2}+x\sqrt{25-x^2}=5\Leftrightarrow \sqrt{25-x^2}+x\sqrt{25-x^2}-(5-x)=0\Leftrightarrow \sqrt{5-x}\left(\sqrt{5+x}+x\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{5-x}=0\\ \sqrt{5+x}+x\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\,(TMDK)\\ \sqrt{5+x}+x\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}=0\quad (*)\end{array}\right.$$

+) Nếu $x=0$ thì $\sqrt{5}+0\sqrt{5}-\sqrt{5}=0$. Vậy $x=0$ là nghiệm của $(*)$

+) Nếu $0<x\le 5\Rightarrow 5+x>5-x\Rightarrow\sqrt{5+x}>\sqrt{5-x}\Rightarrow\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}>0$ và $x\sqrt{5+x}>0$ nên $(*)$ vô nghiệm.

+) Nếu $-5\le x<0\Rightarrow 5+x<5-x\Rightarrow\sqrt{5+x}<\sqrt{5-x}\Rightarrow\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}<0$ và $x\sqrt{5+x}<0$ nên $(*)$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=0$ và $x=5$

d) Áp dụng bất đẳng thức $(ax+by+cz)^2\le\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)$. Ta có:

$$\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)^2\le\left(1^2+1^2+1^2\right)(a+b+b+c+c+a)=3\cdot 2(a+b+c)=6\quad (do\ a+b+c=1)$$

$\Rightarrow\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\le\sqrt{6}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a+b}=\sqrt{b+c}=\sqrt{c+a}\\ a+b+c=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$

Bài 3: *(3,0 điểm)*

1) Tìm giá trị của k và n

a) (d) đi qua hai điểm A và B, nên có: $\begin{cases}2=(k-1)\cdot 0+n\\ 0=(k-1)\cdot(-1)+n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=2\\ k=3\end{cases}$

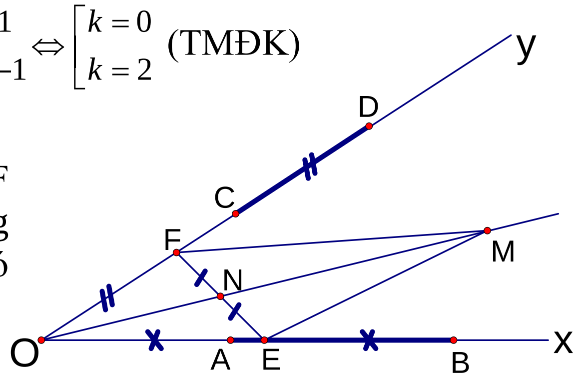
b) (d) song song với đường thẳng $(\Delta): y=x+2-k\Leftrightarrow\begin{cases}k-1=1\\ n\ne 2-k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=2\\ n\ne 0\end{cases}$

2) Khi $n=2$, đường thẳng $(d): y=(k-1)x+2\quad (k\ne 1)$, cắt Ox tại điểm $C\left(\dfrac{2}{1-k};0\right)$

$$\Rightarrow S_{OAC}=\frac{1}{2}OA\cdot OC=\frac{1}{2}\cdot|2|\cdot\left|\frac{2}{1-k}\right|=\frac{2}{|1-k|};\ S_{OAB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\cdot|2|\cdot|-1|=1$$

Khi đó $S_{OAC}=2S_{OAB}\Leftrightarrow\dfrac{2}{|1-k|}=2\Leftrightarrow|1-k|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-k=1\\ 1-k=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\ k=2\end{array}\right.$ (TMĐK)

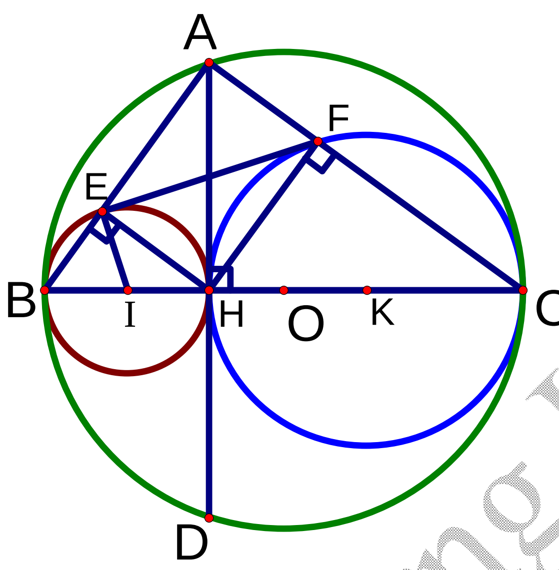
Bài 4: *(2,0 điểm)*



Lấy điểm E thuộc Ox sao cho OE = AB; điểm F thuộc tia Oy sao cho OF = CD. Gọi N là trung điểm EF. Lấy điểm M bất kì thuộc tia ON, ta có $S_{MOE}=S_{MOF}$

mà $S_{MOE} = S_{MAB}; S_{MOF} = S_{MCD} \Rightarrow S_{MAB} = S_{MCD}$.
Vì AB, CD không đổi, nên E, F cố định $\Rightarrow$ N cố định $\Rightarrow$ tia ON cố định. Vậy M thuộc tia ON thì $S_{MAB} = S_{MCD}$.

<u>Bài 5</u>: *(6,0 điểm)*



a) $\Delta BEH, \widehat{BEH} = 90^0 \Rightarrow \Delta BEH$ nội tiếp đường tròn đường kính BH $\Rightarrow$ I là trung điểm BH, do đó $OI = OB - IB$ nên (I) và (O) tiếp xúc trong.
$\Delta CFH, \widehat{CFH} = 90^0 \Rightarrow \Delta CFH$ nội tiếp đường tròn đường kính CH $\Rightarrow$ K là trung điểm CH, do đó $OK = OC - KC$ nên (K) và (O) tiếp xúc trong.
Lại có: $IK = IH + KH$ nên (I) và (K) tiếp xúc ngoài.
b) Tứ giác AEHF: $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^0 (gt); \widehat{EAF} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))
Vậy tứ giác AEHF là hình chữ nhật.
c) $\Delta AHB, \widehat{AHB} = 90^0, HE \perp AB \Rightarrow AH^2 = AE \cdot AB^{(a)}; \Delta AHC, \widehat{AHC} = 90^0, HF \perp AC \Rightarrow AH^2 = AF \cdot AC^{(b)}$
Từ (a) và (b) suy ra $AE \cdot AB = AF \cdot AC$ (đpcm)
d) Ta có $\widehat{FEH} = \widehat{AHE}$ (vì tứ giác AEHF là hình chữ nhật)
$\widehat{IEH} = \widehat{IHE}$ (vì ΔIHE cân tại I)
$\Rightarrow \widehat{FEI} = \widehat{FEH} + \widehat{IEH} = \widehat{AHE} + \widehat{IHE} = \widehat{AHB} = 90^0$ (AD $\perp$ BC) $\Rightarrow$ EF là tiếp tuyến của (I) tại E
Chứng minh tương tự có EF là tiếp tuyến của (K) tại F. Vậy EF là tiếp tuyến chung của (I) và (K) (đpcm)
e) Vì EF = AH (do AEHF là hình chữ nhật) nên EF lớn nhất $\Leftrightarrow$ AH lớn nhất. Mà $AH = \frac{1}{2}AD\,(do\ BC \perp AD)$ nên AH lớn nhất $\Leftrightarrow$ AD lớn nhất $\Leftrightarrow$ AD là đường kính của (O) $\Leftrightarrow$ H ≡ O. Vậy khi H ≡ O thì EF lớn nhất bằng bán kính của (O).