PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU THỨC

I.KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình, (tức là tìm giá trị của ẩn làm tất cả các mẫu thức của phương trình khác 0). Viết tắt: ĐKXĐ.

Bước 2: Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4: (Kết luận). Trong các giá trị tìm được ở bước 3, *các giá trị thỏa mãn điều kiện xác định* chính là nghiệm của phương trình đã cho.

∗ *Chú ý.* Nếu $A(x)=0$ tại $x=x_1$ hoặc $x=x_2$ thì

$A(x)\neq 0$ khi $x\neq x_1$ và $x\neq x_2$

II.BÀI TẬP MINH HỌA

A.DẠNG BÀI CƠ BẢN

Phương Pháp

Vận dụng phương pháp giải phưng trình chứa ẩn ở mẫu, đưa về phương trình bậc nhất đã biết

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{3x-2}{x+7}=\dfrac{6x+1}{2x-3}$;

b. $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{4}{x^2-1}$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{6}{x-5}+\dfrac{2}{x-8}=\dfrac{18}{(x-5)(8-x)}-1$;

b. $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{9}{(x+1)(x-2)}$;

c. $\dfrac{x^2-x}{x+3}-\dfrac{x^2}{x-3}=\dfrac{7x^2-3x}{9-x^2}$.

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{1}{2x-3}-\dfrac{3}{x(2x-3)}=\dfrac{5}{x}$;

b. $\dfrac{3}{(x-1)(x-2)}-\dfrac{2}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$.

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau:

a. $2+\dfrac{1}{x}=\left(\dfrac{1}{x}+2\right)(x^2+1)$;

b. $\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-1-\frac{1}{x}\right)^2$.

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{1}{x-1}-\frac{3x^2}{x^3-1}=\frac{2x}{x^2+x+1}$;

b. $\frac{13}{(x-3)(2x+7)}+\frac{1}{2x+7}=\frac{6}{(x-3)(x+3)}$.

Ví dụ 6. Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có giá trị bằng 2.

a. $A=\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{x-3}{x+3}$;

b. $B=\frac{10}{3}-\frac{3x-1}{4x+12}-\frac{7x+2}{6x+18}$.

LỜI GIẢI DẠNG BÀI CƠ BẢN

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

c. $\frac{3x-2}{x+7}=\frac{6x+1}{2x-3}$;

d. $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{4}{x^2-1}$.

Lời giải

a. $\frac{3x-2}{x+7}=\frac{6x+1}{2x-3}$. (1)

ĐKXĐ của phương trình (1) là $x\neq\frac{3}{2}$ và $x\neq -7$.

Mẫu số chung (MSC) của phương trình là $(x+7)(2x-3)$. Khi đó:

$(1)\Leftrightarrow\frac{(3x-2)(2x-3)}{(x+7)(2x-3)}=\frac{(6x+1)(x+7)}{(x+7)(2x-3)}$

$\Leftrightarrow 6x^2-9x-4x+6=6x^2+42x+x+7$

$\Leftrightarrow 56x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{56}$.

So với ĐKXĐ ta thấy $x=-\frac{1}{56}$ thỏa mãn, vậy $x=-\frac{1}{56}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

b. $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{4}{x^2-1}$. (2)

ĐKXĐ của phương trình (2) là $x\neq\pm 1$.

Mẫu số chung của phương trình là $(x-1)(x+1)$. Khi đó:

$(2)\Leftrightarrow\frac{(x+1)^2-(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{4}{(x+1)(x-1)}$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1-x^2+2x-1=4$

$\Leftrightarrow 4x=4\Leftrightarrow x=1$.

So với ĐKXĐ ta thấy giá trị $x=1$ không thỏa mãn nên bị loại.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{6}{x-5}+\frac{2}{x-8}=\frac{18}{(x-5)(8-x)}-1$;

b. $\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x-2}=\frac{9}{(x+1)(x-2)}$;

c. $\frac{x^2-x}{x+3}-\frac{x^2}{x-3}=\frac{7x^2-3x}{9-x^2}$.

Lời giải

a. ĐKXD của phương trình là $x\neq 5, x\neq 8$.

Mẫu số chung ở hai vế của phương trình là $(x-5)(x-8)$.

Với điều kiện đó phương trình trở thành

$6(x-8)+2(x-5)+18+(x-5)(x-8)=0$.

Phương trình tương đương với $x(x-5)=0$.

Phương trình cuối có hai nghiệm $x=0$ và $x=5$.

So với điều kiện thì giá trị $x=5$ bị loại.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=0$.

b. ĐKXĐ của phương trình là $x\neq -1, x\neq 2$.

Mẫu số chung ở hai vế của phương trình là $(x+1)(x-2)$.

Với điều kiện đó phương trình trở thành $3(x-2)-x-1=9$, hay $2x=16$.

Phương trình này có ngiệm $x=8$, giá trị này thỏa mãn điều kiện nên là nghiệm của phương trình đã cho.

c. ĐKXĐ của phương trình là $x\neq \pm 3$.

Mẫu số chung ở hai vế của phương trình là $(x-3)(x+3)=x^2-9$.

Với điều kiện đó phương trình trở thành

$(x^2-x)(x-3)-x^2(x+3)+7x^2-3x=0$.

Biến đổi phương trình trở thành $0=0$.

Phương trình này nghiệm đúng với mọi giá trị x thỏa mãn điều kiện nên nghiệm của phương trình đã cho là mọi $x\neq \pm 3$.

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{1}{2x-3}-\frac{3}{x(2x-3)}=\frac{5}{x}$;

b. $\frac{3}{(x-1)(x-2)}-\frac{2}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{(x-2)(x-3)}$.

Lời giải

a. ĐKXĐ của phương trình là $x\neq 0, x\neq \frac{3}{2}$.

Mẫu số chung ở hai vế của phương trình là $x(2x-3)$.

Với điều kiện đó phương trình trở thành $x-3-5(2x-3)=0$, hay $9x=12$.

Phương trình có nghiệm $x=\frac{4}{x}$, giá trị này thỏa mãn điều kiện nên là nghiệm của phương trình đã cho.

b. ĐKXĐ của phương trình là $x\neq 1, x\neq 2, x\neq 3$.

Mẫu số chung ở hai vế của phương trình là $(x-1)(x-2)(x-3)$.

Với điều kiện có phương trình trở thành $3(x-3)-2(x-2)=x-1$, hay $0x=4$. Phương trình cuối vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau:

a. $2+\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{x}+2\right)(x^2+1)$;

b. $\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-1-\frac{1}{x}\right)^2$.

Lời giải

a. ĐKXD của phương trình là $x\neq 0$.

Với điều kiện đó phương trình trở thành $x^2\left(\frac{1}{x}+2\right)=0$, hay $x(1+2x)=0$.

Phương trình có nghiệm $x=0$ và $x=-\frac{1}{2}$. Chỉ có giá trị $x=-\frac{1}{2}$ thỏa mãn điều kiện nên nó là nghiệm của phương trình đã cho.

b. ĐKXD của phương trình là $x\neq 0$.

Với điều kiện đó phương trình trở thành $\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-1-\frac{1}{x}\right)^2=0$.

Biến đổi phương trình trở thành $2x\left(2+\frac{2}{x}\right)=0$, hay $x+1=0$.

Phương trình có nghiệm $x=-1$, giá trị đó thỏa mãn điều kiện nên là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{1}{x-1}-\frac{3x^2}{x^3-1}=\frac{2x}{x^2+x+1}$;

b. $\frac{13}{(x-3)(2x+7)}+\frac{1}{2x+7}=\frac{6}{(x-3)(x+3)}$.

Lời giải

a. $\frac{1}{x-1}-\frac{3x^2}{x^3-1}=\frac{2x}{x^2+x+1}$.

Ta có $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1), x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ nên ĐKXD của phương trình là $x\neq 1$.

Với điều kiện đó, MSC là $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. Quy đồng mẫu số, ta có

$$\frac{1}{x-1}-\frac{3x^2}{x^3-1}=\frac{2x}{x^2+x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x+1-3x^2}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{2x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow (4x+1)(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow x=1; x=-\frac{1}{4}.$$

So với ĐKXĐ giá trị $x=1$ bị loại, vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=-\frac{1}{4}$.

b. $$\frac{13}{(x-3)(2x+7)}+\frac{1}{2x+7}=\frac{6}{(x-3)(x+3)}.$$

ĐKXĐ của phương trình là $x\neq \pm 3; x\neq -\frac{2}{7}$. Với điều kiện này, ta có

$$\frac{13}{(x-3)(2x+7)}+\frac{1}{2x+7}=\frac{6}{(x-3)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{13(x+3)+(x+3)(x-3)}{(x-3)(2x+7)(x+3)}=\frac{6(2x+7)}{(x-3)(2x+7)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow 13x+39+x^2-9=12x+42$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-12=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow x=3; x=-4.$$

So với ĐKXĐ giá trị $x=3$ bị loại, vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=-4$.

Ví dụ 6. Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có giá trị bằng 2.

a. $A=\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{x-3}{x+3}$;

b. $B=\frac{10}{3}-\frac{3x-1}{4x+12}-\frac{7x+2}{6x+18}$.

Lời giải

a. Ta thấy ĐKXĐ của biểu thức A là $x\neq -3, x\neq -\frac{1}{3}$.

Với điều kiện đó, ta biến đổi biểu thức A trở thành:

$$A=\frac{(3x-1)(x+3)+(x-3)(3x+1)}{(3x+1)(x+3)}$$

$$=\frac{(3x^2+8x-3)+(3x^2-8x-3)}{(3x-1)(x+3)}$$

$$=\frac{6x^2-6}{(3x-1)(x+3)}.$$

Để biểu thức có giá trị bằng 2, ta có:

$\frac{6x^2-6}{(3x-1)(x+3)}=2$, hay $6x^2-6=2(3x+1)(x+3)$.

Tức là $6x^2-6=6x^2+20x+6$, hay $20x=-12$, nghĩa là $x=-\frac{3}{5}$.

Giá trị này của c thỏa mãn điều kiện đặt ra.

Vậy với $x=-\frac{3}{5}$ thì biểu thức A có giá trị bằng 2.

b. Ta thấy ĐKXĐ của biểu thức B là $x\neq -3$.

Với điều kiện đó, ta biến đổi biểu thức B trở thành:

$$B=\frac{40(x+3)-3(3x-1)-2(7x+2)}{12(x+3)}$$

$$=\frac{40x+1120-9x+3-14x-4}{12(x+3)}=\frac{17(x+7)}{12(x+3)}.$$

Để biểu thức có giá trị bằng 2, ta có:

$\frac{17(x+7)}{12(x+3)}=2$, hay $7x=47$, tức là $x=\frac{47}{7}$.

Giá trị này của x thỏa mãn điều kiện đặt ra.

Vậy với $x=\frac{47}{7}$ thì biểu thức B có giá trị bằng 2.

B.DẠNG NÂNG CAO

Ví dụ1. Cho $A(x)=\frac{(x^2-x-6)(x-5)}{x(x^2+2x+2)}$ và $B(x)=\frac{(x^2-x-6)(x-4)}{3x^3+6x^2+6x}$

a) Tìm x để giá trị của hai biểu thức A(x) và B(x) bằng nhau;

b) Tìm x để $\frac{A(x)}{B(x)}=5$

Ví dụ 2. Cho phương trình ẩn x:

$\frac{x+2m}{x-5}-1=\frac{x+5}{2m-x}+1$ (với m là hằng số).

a) Giải phương trình với m = 5;

b) Tìm m để phương trình có nghiệm $x=10$;

c) Giải phương trình với tham số m.

Ví dụ 3. Giải các phương trình:

a) $(2x^2+9x-4)\left(\frac{3x-2}{8-9x}+1\right)=(x^2+11x+20)\left(\frac{3x-2}{8-9x}+1\right)$

b) $\frac{x}{2x^2-5x+3}-\frac{2x+2}{2x^2-9x+7}=\frac{5}{2x^2-5x+3}-\frac{x+7}{2x^2-9x+7}$

Ví dụ 4. Cho phương trình $x\left(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-a}\right)=\frac{5a(a+3x)}{4\left(x^2-a^2\right)}-\frac{x}{x-a}$ với a là hằng số.

a) Tìm a để phương trình trên có nghiệm là nghiệm của phương trình

$\frac{3}{x-5}-\frac{2}{x+5}=\frac{-29}{25-x^2}$;

b) Giải phương trình với a = 6.

Ví dụ 5. Giải phương trình

a. $x^3+\frac{x^3}{(x-1)^3}+\frac{3x^2}{x-1}-2=0$

b. $\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{1}{x^2-9x+20}+\frac{1}{x^2-11x+30}=\frac{1}{8}$

HƯỚNG DẪN DẠNG BÀI NÂNG CAO

Ví dụ1. Cho $A(x)=\frac{\left(x^2-x-6\right)(x-5)}{x\left(x^2+2x+2\right)}$ và $B(x)=\frac{\left(x^2-x-6\right)(x-4)}{3x^3+6x^2+6x}$

c) Tìm x để giá trị của hai biểu thức A(x) và B(x) bằng nhau;

d) Tìm x để $\frac{A(x)}{B(x)}=5$

Lời giải

a) Để A(x) = B(x) thì $\frac{\left(x^2-x-6\right)(x-5)}{x\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{\left(x^2-x-6\right)(x-4)}{3x\left(x^2+2x+2\right)}$

ĐKXĐ: $x\left(x^2+2x+2\right)\neq 0$ và $3x^3+6x^2+2x\neq 0$ hay $3x\left(x^2+2x+2\right)\neq 0$

Do $x^2+2x+2=(x+1)^2+1\neq 0,\forall x$ nên ĐKXĐ là $x\neq 0$.

Từ phương trình trên suy ra: $3\left(x^2-x-6\right)(x-5)=\left(x^2-x-6\right)(x-4)$

$\Leftrightarrow\left(x^2-x-6\right)(3x-15)-\left(x^2-x-6\right)(x-4)=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-x-6\right)(3x-15-x+4)=0$

$\Leftrightarrow(x-3)(x+2)(2x-11)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-3=0\\x+2=0\\2x-11=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-2\\x=5,5\end{array}\right.$

Cả ba giá trị này đều thỏa mãn ĐKXĐ

Vậy với $x=-2; x=3; x=5,5$ thì A(x) = B(x).

b) $\frac{A(x)}{B(x)}=5$ nghĩa là $\frac{\left(x^2-x-6\right)(x-5)}{x\left(x^2+2x+2\right)}:\frac{\left(x^2-x-6\right)(x-4)}{3x^3+6x^2+6x}=5$

Hay là $\frac{\left(x^2-x-6\right)(x-5)}{x\left(x^2+2x+2\right)}.\frac{3x\left(x^2+2x+2\right)}{\left(x^2-x-6\right)(x-4)}=5 \quad (*)$

Do $x^2+2x+2=(x+1)^2+1\neq 0, \forall x$, nên ta có

$(*)\Leftrightarrow \frac{3x\left(x^2-x-6\right)(x-5)}{x\left(x^2-x-6\right)(x-4)}=5\frac{3x(x+2)(x-3)(x-5)}{x(x+2)(x-3)(x-4)}=5$

ĐKXĐ: $x\neq 0; x\neq -2; x\neq 3; x\neq 4$

Từ ĐKXĐ và phương trình trên suy ra $3(x-5)-5(x-4)=0$

$\Leftrightarrow 3x-15-5x+20=0\Leftrightarrow 2x=5\Leftrightarrow x=2,5$ thỏa mãn ĐKXĐ.

* Nhận xét: Từ $\frac{3x(x+2)(x-3)(x-5)}{x(x+2)(x-3)(x-4)}=5$ suy ra $3(x-5)-5(x-4)=0$

Ta có thể hiểu như sau: Do $x\neq 0; x\neq 2; x\neq 3$; nên $x(x-2)(x-3)\neq 0$. Do đó chia cả tử và mẫu cho số khác 0 ta có $\frac{3(x-5)}{(x-4)}=5$ và với $x\neq 4$ ta được phương trình tương đương

$3(x-5)-5(x-4)=0$

Hoặc có thể hiểu như sau:

Từ $\frac{3x(x+2)(x-3)(x-5)}{x(x+2)(x-3)(x-4)}=5$ với $x\neq 0; x\neq -2; x\neq 3; x\neq 4$ ta có:

$3x(x+2)(x-3)(x-5)=5x(x+2)(x-3)(x-4)$

$\Leftrightarrow x(x+2)(x-3)\left[3(x-5)-5(x-4)\right]=0$

$\Leftrightarrow 3(x-5)-5(x-4)=0$ *do* $x(x+2)(x-3)\neq 0$

Ví dụ 2. Cho phương trình ẩn x:

$\frac{x+2m}{x-5}-1=\frac{x+5}{2m-x}+1$ (với m là hằng số).

d) Giải phương trình với m = 5;

e) Tìm m để phương trình có nghiệm $x=10$;

f) Giải phương trình với tham số m.

Lời giải

$\frac{x+2m}{x-5}-1=\frac{x+5}{2m-x}+1\Leftrightarrow\frac{x+2m}{x-5}+\frac{x+5}{x-2m}=2$

a) ----------Khi m = 5 ta có: $\frac{x+10}{x-5}+\frac{x+5}{x-10}=2\qquad(1)$

Với ĐKXĐ $x\neq5$ và $x\neq10$ thì

từ $(1)\Rightarrow x^2-100+x^2-25=2x^2-30x+100$

$\Leftrightarrow30x=225\Leftrightarrow x=7,5$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

b) Nếu $x=10$ ta có ($\frac{10+2m}{5}+\frac{15}{10-2m}=2\qquad(2)$

Với ĐKXĐ $m\neq5$ $(2)\Rightarrow100\ -4m^2+75=100-20m$

$\Leftrightarrow4m^2-20m-75=0$

$\Leftrightarrow(2m-15)(2m+5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m-15=0\\2m+5=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=7,5\\m=-2,5\end{array}\right.$

c) Điều kiện của nghiệm nếu có là $x\neq5$ và $x\neq2m$

Biến đổi phương trình $\frac{x+2m}{x-5}+\frac{x+5}{x-2m}=2$ thành

$(x+2m)(x-2m)+(x+5)(x-5)=2(x-5)(x-2m)$

$\Leftrightarrow x^2-4m^2+x^2-25=2x^2-4mx-10x+20m$

$\Leftrightarrow4mx+10x=4m^2+20m+25\Leftrightarrow2x(2m+5)=(2m+5)^2\qquad(*)$

Nếu $m\neq-2,5$ thì $x=\frac{2m+5}{2}$. Giá trị này là nghiệm của phương trình nếu

$\frac{2m+5}{2}\neq2m\Rightarrow2m+5\neq4m\Leftrightarrow m\neq2,5$

và $\frac{2m+5}{2}\neq5\Rightarrow2m+5\neq10\Rightarrow m\neq2,5$

+Nếu $m=-2,5$ thì (*) có dạng $0x=0$. Phương trình nghiệm đúng $\forall x\neq\pm5$

Kết luận: Nếu $m\neq\pm2,5$ phương trình có nghiệm duy nhất là $x=\frac{2m+5}{2}$

Nếu $m=2,5$ phương trình vô nghiệm;

Nếu $m=-2,5$ phương trình nghiệm đúng $\forall x\neq\pm5$

Nhận xét: Câu b) có cách giải khác như sau:

$$\frac{10+2m}{5}+\frac{15}{10-2m}=2\Rightarrow 100-4m^2+75=100-20m$$

$$\Leftrightarrow 100=4m^2-20m+25$$

$$\Leftrightarrow 10^2=(2m-5)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m-5=10\\2m-5=-10\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m=15\\2m=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=7,5\\m=-2,5\end{array}\right.$$

Ví dụ 3. Giải các phương trình:

c) $\left(2x^2+9x-4\right)\left(\frac{3x-2}{8-9x}+1\right)=\left(x^2+11x+20\right)\left(\frac{3x-2}{8-9x}+1\right)$

d) $\frac{x}{2x^2-5x+3}-\frac{2x+2}{2x^2-9x+7}=\frac{5}{2x^2-5x+3}-\frac{x+7}{2x^2-9x+7}$

Lời giải

a) Hai vế có nhân tử chung. Ta chuyển vế rồi đưa về dạng $A(x).B(x)=0$

ĐKXĐ: $x\neq\frac{8}{9}$. Biến đổi phương trình thành $\left(x^2-2x-24\right)\left(\frac{3x-2}{8x+9}+1\right)=0$

+Với $x^2-2x-24=0\Leftrightarrow(x+4)(x-6)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=6\end{array}\right.$

+Với $\frac{3x-2}{8-9x}+1=0\Leftrightarrow 3x-2+8-9x=0\Leftrightarrow x=1$

Cả ba giá trị trên x đều thỏa mãn ĐKXĐ nên tập nghiệm của phương trình là $S=\{-4;1;6\}$

b) Các mẫu số khá phức tạp nên không dễ tìm ĐKXĐ. Nếu ta chuyển vế rồi cộng, trừ các phân thúc cùng mẫu ta thấy xuất hiện nhân tử chung là $(x-5)$

Từ đó có cách giải sau: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{x-5}{2x^2-5x+3}-\frac{x-5}{2x^2-9x+7}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-5)\left(\frac{1}{2x^2-5x+3}-\frac{1}{2x^2-9x+7}\right)=0\Leftrightarrow\frac{(x-5)(4-4x)}{\left(2x^2-5x+3\right)\left(2x^2-9x+7\right)}=0$$

Xét tử số $(x-5)(4-4x)=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=5$.

+Với $x=1$ thì $2x^2-9x+7=0\Rightarrow$ phương trình không xác định.

+Với $x=5$ thì $\left(2x^2-5x+3\right)\left(2x^2-9x+7\right)=28.12\neq 0$.

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình là $x=5$.

Ví dụ 4. Cho phương trình $x\left(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-a}\right)=\frac{5a(a+3x)}{4\left(x^2-a^2\right)}-\frac{x}{x-a}$ với a là hằng số.

c) Tìm a để phương trình trên có nghiệm là nghiệm của phương trình $\frac{3}{x-5}-\frac{2}{x+5}=\frac{-29}{25-x^2}$;

d) Giải phương trình với a = 6.

Lời giải

a.ĐKXĐ: $x\neq\pm a$

Với ĐKXĐ trên ta biến đổi phương trình thành:

$\frac{x}{x+a}+\frac{2x}{x-a}=\frac{5a^2+15ax}{4\left(x^2-a^2\right)}$. Quy đồng và khử mẫu được phương trình

$4x(x-a)+8x(x+a)=5a^2-15ax$

$\Leftrightarrow 12x^2-11ax-5a^2=0\Leftrightarrow 12x^2+4ax-15ax-5a^2=0\Leftrightarrow(3x+a)(4x-5a)=0$

Giải phương trình $\frac{3}{x-5}-\frac{2}{x+5}=\frac{-29}{25-x^2}$ với $x\neq\pm5$ ta có nghiệm $x=4$

Với $x=4$ ta có: $(12+a)(16-5a)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1,2\\a=3,2\end{array}\right.$

b.Khi $a=6$ thì $(3x+6)(4x-30)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=7,5\end{array}\right.$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Ví dụ 5. Giải phương trình

a. $x^3+\frac{x^3}{(x-1)^3}+\frac{3x^2}{x-1}-2=0$

b. $\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{1}{x^2-9x+20}+\frac{1}{x^2-11x+30}=\frac{1}{8}$

Lời giải

a.Từ $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)\Rightarrow a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

Áp dụng để giải phương trình. Ta có ĐKXĐ: $x\neq1$

$PT\Leftrightarrow\left(x+\frac{x}{x-1}\right)^3-3x.\frac{x}{x-1}\left(x+\frac{x}{x-1}\right)+\frac{3x^2}{x-1}-2=0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^3 - 3\left(\frac{x^2}{x-1}\right) + 3\left(\frac{x^2}{x-1}\right) - 1 - 1 = 0$. Đặt $y = \frac{x^2}{x-1}$ ta có

$y^3 - 3y^2 + 3y - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^3 = 1 \Leftrightarrow y = 2$

Hay là $\frac{x^2}{x-1} = 2 \Rightarrow x^2 = 2x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$

Phương trình đã cho vô nghiệm vì $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0 \ \forall x$

b.ĐKXĐ: $x \in \{2;3;4;5;6\}$

$PT \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} + \frac{1}{(x-4)(x-5)} + \frac{1}{(x-5)(x-6)} = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-5} = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{8} \Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-10) = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 10$. Tập nghiệm $S = \{-2;10\}$

Ví dụ 7. Giải phương trình

a. $\frac{x(x^2-56)}{4-7x} - \frac{21x+22}{x^3+2} = 4$

b. $\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = 2$

Lời giải

a.ĐKXĐ: $x \neq \frac{4}{7}$ và $x^3 \neq -2$

$\frac{x(x^2-56)}{4-7x} - \frac{21x+22}{x^3+2} = 4 \Leftrightarrow \frac{x(x^2-56)}{4-7x} - 5 + 1 - \frac{21x+22}{x^3+2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^3 - 56x - 20 + 35x}{4-7x} + \frac{x^3 + 2 - 21x - 22}{x^3+2} = 0$

$\Leftrightarrow (x^3 - 21x - 20)\left(\frac{1}{4-7x} + \frac{1}{x^3+2}\right)$

* Xét $x^3 - 21x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-5)(x+4) = 0$ ta tìm được: $x = -4; x = -1; x = 5$ thỏa mãn ĐKXĐ.

* Xét $\frac{1}{4-7x} + \frac{1}{x^3+2} = 0$ biến đổi thành $x^3 - 7x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x+3)=0$ ta tìm được $x=-3; x=1; x=2$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-4;-3;-1;1;2;5\}$

b.

ĐKXĐ: $x\neq 0$ và $x\neq -1$.

$$\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}=2\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}-1=1-\frac{3}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x^2}=\frac{x^2-x}{(x+1)^2}\Leftrightarrow \frac{(1-x)\left[(1+x)^3+x^3\right]}{x^2(x+1)^2}=0$$

Với $x\neq 0$ và $x\neq -1$ thì $(1-x)\left[(1+x)^3+x^3\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-x=0\\(1+x)^3+x^3=0\end{array}\right.$

$*$ Với $x-1=0\Leftrightarrow x=1$ thỏa mãn ĐKXĐ.

$*$ Với $\left(1+x^3\right)+x^3=0\Leftrightarrow (1+x)^3=-x^3\Leftrightarrow 1+x=-x\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Tập nghiệm là $S=\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$

C.PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

1. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{3}{1-4x}=\frac{2}{4x+1}-\frac{8+6x}{16x^2-1}$;

b. $\frac{3}{5x-1}+\frac{2}{3-5x}=\frac{4}{(1-5x)(5x-3)}$.

2. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{x+2}{x+1}+\frac{3}{x-2}=\frac{3}{x^2-x-2}+1$;

b. $\frac{5-x}{4x^2-8x}+\frac{7}{8}=\frac{x-1}{2x(x-2)}+\frac{1}{8x-16}$.

3. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{x+6}{x-5}+\frac{x-5}{x+6}=\frac{2x^2+23x+61}{x^2+x-30}$;

b. $\frac{x^2-x}{x+3}-\frac{x^2}{x-3}=\frac{7x^2-3x}{9-x^2}$.

4. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{x+2}{x+1}+\frac{3}{x-2}=\frac{3}{x^2-x-2}+1$;

b. $\dfrac{x+6}{x-5}+\dfrac{x-5}{x+6}=\dfrac{2x^2+23x+61}{x^2+x-30}$.

5. Giải các phương trình sau:

a. $1+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{12}{8+x^3}$;

b. $\left(2x+3\right)\left(\dfrac{3x+8}{2-7x}+1\right)=\left(x-5\right)\left(\dfrac{3x+8}{2-7x}+1\right)$.

6. Giải các phương trình sau với a là tham số:

a. $\dfrac{1+a}{1-x}=1-a$;

b. $\dfrac{x}{2a+x}+\dfrac{2a+x}{2a-x}=\dfrac{8a^2}{x^2-4a^2}$.

HƯỚNG DẪN LỜI GIẢI PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

1.

a. xét phương trình: $\dfrac{3}{1-4x}=\dfrac{2}{4x+1}-\dfrac{8+6x}{16x^2-1}$.

Điều kiện: $x\neq\pm\dfrac{1}{4}$.

Với điều kiện đó phương trình tương đương với:

$3\left(4x+1\right)=2\left(1-4x\right)+\left(8+6x\right)$, hay $14x=7$, tức là $x=\dfrac{1}{2}$.

Ta thấy giá trị $x=\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn điều kiện $x\neq\pm\dfrac{1}{4}$ nên là nghiệm của phương trình đã cho.

b.Xét phương trình: $\dfrac{3}{5x-1}+\dfrac{2}{3-5x}=\dfrac{4}{\left(1-5x\right)\left(5x-3\right)}$.

Điều kiện: $x\neq\dfrac{1}{5},x\neq\dfrac{3}{5}$.

Với điều kiện đó phương trình tương đương với:

$3\left(3-5x\right)+2\left(5x-1\right)=4$, hay $5x=3$, tức là $x=\dfrac{3}{5}$.

Ta thấy giá trị $x=\dfrac{3}{5}$ không thỏa mãn điều kiện $x\neq\dfrac{3}{5}$ nên bị loại.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

2.

a. xét phương trình: $\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{3}{x^2-x-2}+1$.

Điều kiện: $x\neq 2,x\neq -1$.

Với điều kiện đó phương trình tương đương với:

$\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{3}{\left(x-2\right)\left(x+1\right)}+1$

Tức là phương trình $\left(x+2\right)\left(x-2\right)+3\left(x+1\right)=3+\left(x-2\right)\left(x+1\right)$, hay $4x=2$, nghĩa là $x=\dfrac{1}{2}$.

Ta thấy giá trị $x=\frac{1}{2}$ thỏa mãn điều kiện $x\neq 2, x\neq -1$ nên là nghiệm của phương trình đã cho.

b.Xét phương trình: $\frac{5-x}{4x^2-8x}+\frac{7}{8}=\frac{x-1}{2x\left(x-2\right)}+\frac{1}{8x-16}$.

Điều kiện: $x\neq 2, x\neq 0$.

Với điều kiện đó phương trình tương đương với:

$\frac{5-x}{4x\left(x-2\right)}+\frac{7}{8}=\frac{x-1}{2x\left(x-2\right)}+\frac{1}{4\left(x-2\right)}$, tức là phương trình

$2\left(5-x\right)+7x\left(x-2\right)=4\left(x-1\right)+x$, hay $7\left(x^2-3x+2\right)=0$, nghĩa là $x=1, x=2$.

So với điều kiện, ta thấy giá trị $x=2$ không thỏa mãn nên bị loại.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=1$.

3.

a. xét phương trình: $\frac{x+6}{x-5}+\frac{x-5}{x+6}=\frac{2x^2+23x+61}{x^2+x-30}$.

Điều kiện: $x\neq 5, x\neq -6$.

Với điều kiện đó phương trình tương đương với:

$\frac{x+6}{x-5}+\frac{x-5}{x+6}=\frac{2x^2+23x+61}{\left(x-5\right)\left(x+6\right)}$, tức là phương trình $\left(x+6\right)^2+\left(x-5\right)^2=2x^2+23x+61$, hay

$21x=0$, nghĩa là $x=0$.

Ta thấy giá trị $x=0$ thỏa mãn điều kiện $x\neq 5, x\neq -6$ nên là nghiệm của phương trình đã cho.

b.xét phương trình: $\frac{x^2-x}{x+3}-\frac{x^2}{x-3}=\frac{7x^2-3x}{9-x^2}$.

Điều kiện: $x\neq \pm 3$.

Với điều kiện đó phương trình tương đương với:

$\frac{x^2-x}{x+3}+\frac{x^2}{3-x}=\frac{7x^2-3x}{\left(3-x\right)\left(x+3\right)}$.

Hay $\left(x^2-x\right)\left(3-x\right)+x^2\left(x+3\right)=7x^2-3x$, nghĩa là $0=0$.

Ta thấy mọi giá trị x thỏa mãn điều kiện $x\neq \pm 3$ đều thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy mọi $x\neq \pm 3$ đều là nghiệm của phương trình.

4.

a. ta có $x^2-x-2=\left(x+1\right)\left(x-2\right)$, nên ĐKXĐ của phương trình là $x\neq -1, x\neq 2$.

Với điều kiện đó, phương trình tương đương với:

$\frac{x^2-4+3\left(x+1\right)}{x^2-x-2}=\frac{3+x^2-x-2}{x^2-x-2}$.

Hay $4x=2$, tức là $x=\frac{1}{2}$.

So với điều kiện ta thấy $x=\frac{1}{2}$ thỏa mãn nên là nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{1}{2}$.

b.ta thấy $x^2+x-30=\left(x+6\right)\left(x-5\right)$, nên ĐKXĐ của phương trình là $x\neq -6, x\neq 5$.

Với điều kiện đó, phương trình tương đương với:

$\frac{(x+6)^2+(x-5)^2}{x^2+x-30}=\frac{2x^2+23x+61}{x^2+x-30}$, hay $21x=0$, tức là $x=0$.

So cới điều kiện ta thấy $x=0$ thỏa mãn nên là nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy phương trình có nghiệm $x=0$.

5.

a. Ta có $8+x^3=(x+2)(x^2-2x+4)$, nên ĐKXĐ của phương trình là $x\neq -2$.

Với điều kiện đó, phương trình tương đương với:

$8+x^3+x^2-2x+4=12\Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0$

$\Leftrightarrow x(x^2+x-2)=0\Leftrightarrow x(x-1)(x+2)=0$.

Phương trình cuối có nghiệm $x=0, x=1, x=-2$.

Chỉ có các giá trị $x=0, x=1$ thỏa mãn điều kiện đặt ra nên là nghiệm của phương trình đã cho.

b. Ta có ĐKXĐ của phương trình là $x\neq \frac{2}{7}$.

Với điều kiện đó, phương trình tương đương với:

$(2x+3)(10-4x)=(x-5)(10-4x)\Leftrightarrow 2(5-2x)(x+8)=0$.

Phương trình cuối có nghiệm $x=\frac{5}{2}, x=-8$, các giá trị này thỏa mãn điều kiện đặt ra nên là nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\frac{5}{2}, x=-8$.

6.

a. Ta có ĐKXĐ của phương trình là $x\neq 1$.

Với điều kiện đó, phương trình tương đương với:

$1+a=(1-a)(1-x)$, hay $x(a-1)=2a$.

Nếu $a=1$ phương trình có dạng $0x=2$, trường hợp này phương trình vô nghiệm.

Nếu $a\neq 1$ phương trình đã cho có nghiệm $x=\frac{2a}{a-1}$.

b.ta có ĐKXĐ của phương trình là $x\neq \pm 2a$.

Với điều kiện đó, phương trình tương đương với:

$\frac{x}{x+2a}-\frac{2a+x}{x-2a}=\frac{8a^2}{(x+2a)(x-2a)}$

$\Leftrightarrow x(x-2a)-(2a+x)^2=8a^2\Rightarrow 6ax=-12a^2$.

Nếu $a=0$ phương trình có dạng $0x=0$, trường hợp này phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị $x\neq 0$.

Vậy $a=0$ phương trình đã cho có nghiệm là mọi $x\neq 0$.

Nếu $a\neq 0$ phương trình có nghiệm là $x=-2$, giá trị này thỏa mãn điều kiện $x\neq \pm 2a$ với $a\neq \pm 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=-2$ với $a\neq \pm 1$.