1 Tóm tắt lý thuyết

1.a Lý thuyết và ví dụ

Định nghĩa 1 Cho a, b là các số nguyên với $a \neq 0$. Nếu tồn tại số nguyên m sao cho $b = am$ ta nói b chia hết cho a, hay a chia hết b.

Kí hiệu $b \vdots a$ hay $a|b$.

Định nghĩa 2 Nếu b chia hết cho a thì b được gọi là bội của a và a được gọi ước của b.

Tính chất 1 Một số tính chất cơ bản:
a) Nếu $a \neq 0$ thì $a|0$ và $a|a$.
b) Với mọi a thì $1|a$.
c) Nếu $a|b$ và $a|c$ thì với mọi số nguyên x, y ta có $a|(xb + yc)$.
d) Nếu $a|b$ và $b|c$ thì $a|c$.
e) Nếu $b \neq 0$ và $a|b$ thì $|a| \leq |b|$.
f) Với $a, b > 0$. Nếu $a|b$ và $b|a$ thì $a = b$.

Định nghĩa 3 Nếu a hoặc b khác 0, thì tập các ước chung của a và b là khác rỗng và hữu hạn nên có phần tử lớn nhất. Khi đó số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của a, b được gọi là ước chung lớn nhất của a và b. Kí hiệu là $gcd(a, b)$ hay (a, b).

Định nghĩa 4 Nếu ước chung lớn nhất của a và b bằng 1 thì a và b được gọi là nguyên tố cùng nhau.

Tính chất 2 Cho a, b là hai số nguyên.
a) $(a, b) = (a, a - b)$.
b) $d = (a, b)$ thì $(\frac{a}{a}, \frac{b}{d}) = 1$.
c) $(ca, cb) = c \cdot (a, b)$.
d) Nếu $ax + by = m$ thì $(a, b)|m$.

Định nghĩa 5 Cho hai số b, c. Nếu a là bội của b, c thì a được gọi là bội chung của b, c.

Định nghĩa 6 Cho b, c là số nguyên khác 0, khi đó tập các số nguyên dương bội chung của b, c là tập khác rỗng (vì $|bc|$ là bội của b, c) nên có số nhỏ nhất. Khi đó số nguyên dương nhỏ nhất trong các bội chung của b, c được gọi là bội chung nhỏ nhất.
Kí hiệu là $lmc(b, c)$ hay $[b, c]$.

Tính chất 3 Bội chung nhỏ nhất của b, c là ước của mọi bội chung khác.

Định nghĩa 8 Một số nguyên dương được gọi là số nguyên tố nếu nó chỉ có hai ước dương là 1 và chính nó. Số nguyên dương không phải là số nguyên tố được gọi là hợp số.

Định lý 1 Với mỗi số tự nhiên $n \geq 2$ tì hoặc n là số nguyên tố, hoặc n là tích của các số nguyên tố.

Tính chất 4

a) Hai số nguyên tố bất kì phân biệt là số nguyên tố cùng nhau.

b) Cho số nguyên tố p, nếu a là một số nguyên thì hoặc $p|a$ hoặc $(a, p) = 1$.

c) Nếu p là số nguyên tố và $p|ab$, khi đó $p|a$ hoặc $p|b$.

Định nghĩa 9 Cho hai số nguyên a, b và số nguyên dương n. Nếu a, b chia cho n có cùng số dư, ta nói rằng a và b đồng dư khi chia cho n và kí hiệu $a \equiv b(\mod n)$ (đọc là a đồng dư b theo modul n).

Tính chất 5 $a \equiv b(\mod n) \Leftrightarrow (a - b) \vdots n$

Định lý 2 Cho a, b, c là các số nguyên, n là số nguyên dương.

a) Nếu $a \equiv b(\mod n), b \equiv c(\mod n)$ thì $a \equiv c(\mod n)$

b) Nếu $a \ \equiv b(\mod n)$ thì $a \pm c \equiv b \pm c(\mod n)$ với mọi số nguyên c.

c) Nếu $a \equiv b(\mod n), c \equiv d(\mod n)$ thì $a + c \equiv b + d(\mod n)$

d) Nếu $a \equiv b(\mod n)$ thì $c.a \equiv c.b(\mod n)$ với mọi số nguyên c.

e) $a \equiv b(\mod n)$ thì $a^k \equiv b^k(\mod n)$ với mọi số nguyên dương k. Đặc biệt nếu $a \equiv 1(\mod n)$ thì $a^k \equiv 1(\mod n)$

2 Bài tập

2.a Biến đổi đại số

Bài 1. Số nguyên dương n được gọi là số điều hòa nếu như tổng các bình phương của các ước của nó (kể cả 1 và n) đúng bằng $(n + 3)^2$.

a) Chứng minh rằng số 287 là số điều hòa.

b) Chứng minh rằng số $n = p^3$(p nguyên tố) không phải là số điều hòa.

c) Chứng minh rằng nếu số $n = pq$ (p, q là các số nguyên tố khác nhau) là số điều hòa thì $n + 2$ là số chính phương.

Bài 2. Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2 + 2\sqrt{12\mathrm{n}^2 + 1}$ là số nguyên. chứng minh $2 + 2\sqrt{12\mathrm{n}^2 + 1}$ là số chính phương.

Bài 3. Cho S là tập số nguyên dương n có dạng $n = x^2 + 3y^2$, trong đó x, y là các số nguyên. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a, b \in S$ thì $ab \in S$

b) Nếu $N \in S$ và N chẵn thì N chia hết cho 4 và $\dfrac{N}{4} \in S$

Bài 4. Chứng minh rằng nếu $x^2 + 2y$ là một số chính phương với x, y nguyên dương thì $x^2 + y$ là tổng của hai số chính phương.

2.b Chia hết

Bài 5. Cho n là số tự nhiên $n > 3$. Chứng minh rằng $2^n + 1$ không chia hết cho $2^m - 1$ với mọi số tự nhiên m sao cho $2 < m \leq n$.

Bài 6.

a) Cho $P = (a+b)(b+c)(c+a) - abc$, với a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu: $a + b + c$ chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4

b) Cho a, b là các số nguyên và p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng nếu p^4 là ước của $a^2 + b^2$ và $a(a+b)^2$ thì p^4 cũng là ước của $a(a+b)$

Bài 7. Cho ba số nguyên dương a, p, q thỏa mãn các điều kiện:

i. $ap + 1$ chia hết cho q.

ii. $\mathrm{aq} + 1$ chia hết cho F.

Chứng minh rằng $\mathrm{a} > \dfrac{\mathrm{pq}}{2(\mathrm{p}+\mathrm{q})}$

Bài 8. Cho các số a, b nguyên tố cùng nhau thỏa $\dfrac{a+b}{a-b}$ là một số nguyên.

a) Tìm một cặp số a, b thỏa đề bài mà $a - b > 1$.

b) Chứng minh rằng $ab + 1$ hoặc $4ab + 1$ là một số chính phương.

Bài 9. Cho các số nguyên dương a, b thỏa $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$.

a) Chứng minh rằng $a + b$ không thể là số nguyên tố.

b) Chứng minh rằng nếu $c > 1$ thì $a + c$ và $b + c$ không thể đồng thời là số nguyên tố.

Bài 10. (PTNK 2016 - CT) Cho x, y là hai số nguyên dương mà $x^2 + y^2 + 10$ chia hết cho xy.

a) Chứng minh rằng x, y là hai số lẻ và nguyên tố cùng nhau.

b) Chứng minh $k = \dfrac{x^2 + y^2 + 10}{xy}$ chia hết cho 4 và $k \geq 12$.

Bài 11.

a) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của n để bội chung nhỏ nhất của $3n + 1, 2n + 1$ không vượt quá 2020.

b) Cho a, b là các số nguyên dương sao cho tồn tại số nguyên tố p thỏa

$$BCNN(a, a+p) = BCNN(b, b+p)$$

Chứng minh rằng $a = b$.

Bài 12. (PTNK 2018 - CT)
Cho $A_n = 2018^n + 2032^n - 1964^n - 1984^n$ với n là số tự nhiên.

a) Chứng minh với mọi số tự nhiên n thì A_n chia hết cho 51.

b) Tìm tất cả những số tự nhiên n sao cho A_n chia hết cho 45.

2.c Phương trình nghiệm nguyên

3 Lời giải

Bài 1.

a) Số $n=287$ có các ước dương là 1, 7, 41, 287. Ta có $1^2+7^2+41^2+287^2=(287+3)^2$ nên 287 là số điều hòa.

b) Các ước dương của $n=p^3$ là $1,p,p^2,p^3$. Giả sử n là số điều hòa, ta có $(n+3)^2=1^2+p^2+p^4+p^6 \Leftrightarrow p^4+p^2=6p^3+8$. Suy ra $p|8$ mà p nguyên tố nên $p=2$. Thử lại thấy không thỏa, vậy $n=p^3$ không phải là số điều hòa với mọi số nguyên tố p.

c) Các ước dương của $n=pq$ là $1,p,q,pq$. Vì n là số điều hòa nên ta có:
$1+p^2+q^2+p^2q^2=(pq+3)^2 \Leftrightarrow p^2+q^2=6pq+8 \Leftrightarrow (p+q)^2=4(pq+2)$. Do 4 là số chính phương nên $pq+2$ cũng là số chính phương hay $n+2$ là số chính phương.

Bài 2. Do $2+2\sqrt{12\mathrm{n}^2+1}$ là số nguyên, mà $12\mathrm{n}^2+1$ là số lẻ nên tồn tại số tự nhiên k thỏa mãn

$$12n^2+1=(2k+1)^2 \Leftrightarrow 12n^2+1=4k^2+4k+1 \Leftrightarrow k(k+1)=3n^2$$

Vì $(\mathrm{k};\mathrm{k}+1)=1$ nên xảy ra 2 trường hợp:

TH 1. $\begin{cases}\mathrm{k}=\mathrm{a}^2\\ \mathrm{k}+1=3\,\mathrm{b}^2\end{cases}$ $(\mathrm{a},\mathrm{b}\in\mathrm{N}) \Rightarrow \mathrm{a}^2-3\,\mathrm{b}^2=-1\equiv 2(\bmod 3) \Leftrightarrow \mathrm{a}^2\equiv 2(\bmod 3)$ (vô lí)

TH 2. $\begin{cases}\mathrm{k}=3\mathrm{a}^2\\ \mathrm{k}+1=\mathrm{b}^2\end{cases}$ $\Rightarrow \mathrm{b}^2\left(\mathrm{b}^2-1\right)=3\mathrm{n}^2$ Từ đó suy ra

$$2+2\sqrt{12n^2+1}=2+2\sqrt{4b^4-4b^2+1}=2+2\left(2b^2-1\right)=4b^2=(2b)^2$$

Do đó $2+2\sqrt{12n^2+1}$ là số chính phương.

Bài 3.

a) Giả sử: $a=m^2+3n^2$, $b=p^2+3q^2$, khi đó a,b thuộc S và: $ab=\left(m^2+3n^2\right)\left(p^2+3q^2\right)=(mp-3nq)^2+3(mq+np)^2\in S$, vậy ab thuộc S.

b) Giả sử: $N=x^2+3y^2\in S$ và $N\,\vdots\,2$. Ta có các trường hợp sau:
Trường hợp 1: x chẵn, y chẵn. Đặt $x=2x_1$, $y=2y_1$. Ta có: $\dfrac{N}{4}=x_1^2+3y_1^2\in S$
Trường hợp 2: x và y cùng lẻ. Ta cần tìm hai số u và v sao cho: $\dfrac{N}{4}=u^2+3v^2 \Leftrightarrow N=4\left(u^2+3v^2\right)=(u-3v)^2+3(u+v)^2$. Xét các hệ sau:

$$\begin{cases}u-3v=x\\ u+v=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=\dfrac{x+3y}{4}\\ v=\dfrac{y-x}{4}\end{cases},\begin{cases}u-3v=-x\\ u+v=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=\dfrac{3y-x}{4}\\ v=\dfrac{x+y}{4}\end{cases}$$

Nếu $x\equiv y\,(\bmod 4)$ thì: $x+3y\,\vdots\,4$ và $y-x\,\vdots\,4$. Khi đó: $u=\dfrac{x+3y}{4}\in Z$ và $v=\dfrac{y-x}{4}\in Z$. Suy ra: $\dfrac{N}{4}=u^2+3v^2$ thuộc S.

Nếu $x\neq y\,(\bmod 4)$, Do $N=x^2+3y^2\,\vdots\,2$, nên x,y phải cùng tính chẵn lẻ khi chia cho 2, mà số dư khi chia cho 4 chỉ có 4 trường hợp là $0,1,2,3$. Khi đó ta xét các trường hợp đều thu được: $x+y\,\vdots\,4$ và $3x-y\,\vdots\,4$. Khi đó: $u=\dfrac{3y-x}{4}\in Z$ và $v=\dfrac{x+y}{4}\in Z$. Suy ra: $\dfrac{N}{4}=u^2+3v^2$ thuộc S.

Bài 4. Đặt $x^2+2y=k^2$. Suy ra $2y=(k-x)(k+x)$. Suy ra k,x cùng tính chẵn lẻ.

- Nếu $k=2m,x=2n$ thì $y=2(m-n)(m+n)$.
  Khi đó $x^2+y=2n^2+2(m-n)(m+n)=2m^2=m^2+m^2$.
- Nếu $k=2m+1,x=2n+1$ thì $y=2(m-n)(m+n+1)$.
  $x^2+y=(2n+1)^2+2(m-n)(m+n+1)=4n^2+4n+1+2m^2-2n^2+2m-2n=2n^2+2n+2m^2+2m+1=(m+n+1)^2+(m-n)^2$.

Bài 5. Cách 1 Ta có $2^{km}-1\vdots 2^m-1$. Từ $2^{2n}=(2^n+1)(2^n-1)$ chia hết cho 2^m-1.
Đặt $2n=km+q(0\le q<m)$.
Khi đó $2^{2n}-1=2^{km+q}-2^q+2^q-1=2^q(2^{km}-1)+2^q-1$ chia hết cho 2^m-1, suy ra 2^q-1 chia hết cho m mà $0\le 2^q-1<2^m-1$, suy ra $q=0$.
Do đó $2n=km$.
Trường hợp 1: Nếu m lẻ, suy ra k chẵn, $k=2k'$, suy ra $n=k'm$, $2^n+1=2^{k'm}+1=2^{k'm}-1+2$ chia hết cho 2^m-1, suy ra 2 chia hết cho 2^m-1 vô lý.
Trường hợp 2: Nếu m chẵn $m=2m'$ thì $n=km'$, suy ra $2^{km'}+1$ chia hết cho 2^m-1, mà 2^m-1 chia hết cho $2^{m'}-1$ nên $2^{km'}+1$ chia hết cho $2^{m'}-1$, suy ra 2 chia hết cho $2^{m'}-1$ vô lý vì $m'>1$.

Cách 2 Ta có $2^{n-m}(2^m-1)\vdots 2^m-1$, suy ra $2^n-2^{n-m}\vdots 2^m-1$, mà $2^n+1\vdots 2^m-1$ suy ra $2^{n-m}+1$ chia hết cho 2^m-1.
Lý luận tương tự ta có $2^{n-km}+1$ chia hết cho 2^m-1. Giả sử $n=km+q, 0\le q<m$. Chọn k như trên ta có 2^q+1 chia hết cho 2^m-1. Mà $q<m$ nên $2^q+1=2^m-1$,giải ra $q=1, m=2$ (vô lý).

Bài 6.

a) Đặt: $S=a+b+c$, ta có: $P=(S-c)(S-a)(S-b)-abc=S(ab+bc+ca)-2abc$. Nếu $S=a+b+c$ $\vdots$ 4 thì $S(ab+bc+ca)\vdots 4$. Ta cần chứng minh: $2abc\vdots 4$ hay $abc\vdots 2$. Do $a+b+c\vdots 4$ suy ra trong ba số a,b,c phải có một số chẵn, vì nếu a,b,c đều là số lẻ thì $a+b+c$ là số lẻ nên không chia hết cho 4. Từ đó ta có $abc\vdots 2$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

b) Ta có: $a^2+b^2\vdots p^4$ và $a(a+b)^2\vdots p^4$. Từ đó suy ra: $2b\left(a^2+b^2\right)\vdots p^4$ và $a\left(a^2+2ab+b^2\right)\vdots p^4$. Như vậy: $2b\left(a^2+b^2\right)-a\left(a^2+b^2\right)-2a^2b\vdots p^4$ hay $2b^3-a\left(a^2+b^2\right)\vdots p^4$, vậy $b^3\vdots p^4$, suy ra: $b\vdots p^2$ (vì p là số nguyên tố), như vậy: $b^2\vdots p^4$. Do $a^2+b^2\vdots p^4$ và $b^2\vdots p^4$ nên $a^2\vdots p^4$ hay $a\vdots p^2$. Do đó ta có: $a(a+b)$ $\vdots p^4$.

Bài 7. Từ giả thiết ta được $(ap+1)(aq+1)\vdots pq$ suy ra $\left(a^2pq+ap+aq+1\right)\vdots pq$.

Mà $a^2pq\vdots pq$ nên ta được $(ap+aq+1)\vdots pq$. Do a,p,q là các số nguyên dương nên $ap+aq+1$ và pq là các số nguyên dương. Suy ra $ap+aq+1\ge pq$.
Mà do $a(p+q)>1$ nên ta được $2a(p+q)$ hay $a>\dfrac{pq}{2(p+q)}$. Bài toán được chứng minh xong.

Bài 8.

a) Cho $a=5, b=3$ thỏa đề bài.

b) Ta có $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{2b}{a-b}+1$, suy ra $\dfrac{2b}{a-b}\in\mathbb{Z}$, đặt $k=\dfrac{2b}{a-b}$, ta có $b(2+k)=ak$. Do đó ak chia hết cho b mà a,b nguyên tố cùng nhau nên k chia hết cho b, đặt $k=qb$ ta có $b(2+qb)=abq$, suy ra $2=q(a-b)$. Suy ra $a-b=1$ hoặc $a-b=2$. (giả sử $a>b$).
Nếu $a-b=1$, suy ra $4ab+1=4b(b+1)+1=(2b+1)^2$ là số chính phương.
Nếu $a-b=2$, suy ra $ab+1=b(b+2)+1=(b+1)^2$ là số chính phương.

Bài 9.

a) Từ đề bài ta có $c(a+b)=ab$, suy ra ab chia hết cho $a+b$.
Giả sử $a+b$ nguyên tố. Ta có $a<a+b$, suy ra $a, a+b$ nguyên tố cùng nhau, suy ra b chia hết cho $a+b$ vô lý vì $b<a+b$.

b) Giả sử $a+c, b+c$ đều là các số nguyên tố. Khi đó:
$c(a+b)=ab\Leftrightarrow ca=ab-bc\Leftrightarrow a(b+c)=b(2a-c)$.
Và $b(a+c)=a(2b-c)$.
Dễ thấy $b+c$ nguyên tố và $b+c>b$ nên $b+c$ và b là nguyên tố cùng nhau; tương tự $a+b$ và a nguyên tố cùng nhau.
Mà $a(b+a)$ chia hết cho b, suy ra a chia hết cho b, $b(a+c)$ chia hết cho a, suy ra b chia hết cho a.
Suy ra $a=b=2c$, suy ra $a+c=b+c=3c$ không phải là số nguyên tố do $c>1$.

Vậy khi $c > 1$ thì $a + c, b + c$ không thể đồng thời là số nguyên tố.

Bài 10.

a) Giả sử trong hai số x, y có một số chẵn, vì vai trò x, y như nhau nên có thể giả sử x chẵn. Suy ra $x^2 + y^2 + 10$ chia hết cho 2, suy ra y chẵn. Khi đó $x^2 + y^2 + 10$ chia hết cho 4, suy ra 10 chia hết cho 4 vô lý.
Vậy trong hai số đều là số lẻ.
Đặt $d = (x, y)$, $x = d.x', y = d.y'$ ta có $x^2 + y^2 + 10 = d^2(x'^2 + y'^2) + 10$ chia hết cho $d^2x'y'$. Suy ra 10 chia hết cho d^2. Suy ra $d = 1$. Vậy x, y nguyên tố cùng nhau.

b) Đặt $x = 2m + 1, y = 2n + 1$, suy ra $k = \dfrac{4(m^2 + m + n^2 + n + 3}{(2m + 1)(2n + 1)}$.
Ta có $4, (2m+1).(2n+1)$ nguyên tố cùng nhau. Suy ra $m^2+n^2+m+n+3$ chia hết cho $(2m+1)(2n+1)$.
Từ đó ta có k chia hết cho 4.
Chứng minh $k \geq 12$ bằng hai cách.
Cách 1: Ta có $x^2 + y^2 + 10 = kxy$.
Nếu trong hai số x, y có một số chia hết cho 3, giả sử x chia hết cho 3. Ta có $y^2 + 10$ chia hết cho 3 vô lý vì y^2 chia 3 dư 0 hoặc dư 1.
Vậy x, y không chia hết cho 3, suy ra $x^2 + y^2 + 10$ chia hết cho 3 và $3, xy$ nguyên tố cùng nhau. Do đó k chia hết cho 3.
Do đó k chia hết cho 12, vậy $k \geq 12$.
Cách 2: Xét $k = 4$ ta có $x^2 + y^2 + 10 = 4xy$ $(*) \Leftrightarrow (x - 2y)^2 = 3y^2 - 10$.
Ta có $(x - 2y)^2$ chia 3 dư 0 hoặc 1 mà $3y^2 - 10$ chia 3 dư 2, nên phương trình (*) không có nghiệm nguyên dương. Xét $k = 8$ ta có $x^2 + y^2 + 10 = 8xy(*) \Leftrightarrow (x - 4y)^2 = 15y^2 - 10$.
Ta có $(x-4y)^2$ chia 3 dư 0 hoặc 1 mà $15y^2-10$ chia 3 dư 2 nên (**) không có nghiệm nguyên dương.
Vậy $k \geq 12$.

Bài 11.

a)
- Đặt $d = (3n + 1, 2n + 1) \Rightarrow d|3n + 1, d|2n + 1 \Rightarrow d|n \Rightarrow d|1 \Rightarrow d = 1$.
- Suy ra $BCNN(3n + 1, 2n + 1) = (3n + 1)(2n + 1) = 6n^2 + 5n + 1$.
- $6n^2 + 5n + 1 \leq 2020$ mà n nguyên dương, suy ra $n \in \{1, 2, \cdots, 17\}$.
- Có 17 giá trị n thỏa đề bài.

b) Chú ý nếu $d = (a, a + p) \Rightarrow d = 1$ hoặc $d = p$ và $d = p \Leftrightarrow p|a$.
Kí hiệu $[x, y] = BCNN(x, y)$.
- Nếu a không chia hết cho p suy ra $(a, a+p) = 1$, khi đó $[a, a+p] = a(a+p)$. Và $[b, b+p]$ không chia hết cho p. Suy ra $b, b+p$ không chia hết cho p. Do đó $(b, b+p) = 1$. Suy ra $[b, b+p] = b(b+p)$.
Khi đó $a(a + p) = b(b + p) \Rightarrow a = b$.
- Nếu $p|a \Rightarrow (a, a + p) = p \Rightarrow [a, a + p] = \dfrac{a(a + p)}{p}$.
Hơn nữa $p|[b, b + p] \Rightarrow p|b$ hoặc $p|b + p$. Từ đó suy ra $p|b, p|b + p$.
Đặt $a = pa', b = pb'$. Suy ra $[a, a+p] = [pa', p(a'+1)] = pa'(a'+1)$ và $[b, b+p] = [pb', p(b'+1)] = p'b'(b' + 1)$.
$a'(a' + 1) = b'(b' + 1) \Rightarrow a' = b' \Rightarrow a = b$.

Bài 12.

a) Do $2018 \equiv 1964 \pmod 3 \Rightarrow 2018^n \equiv 1964^n \pmod 3$.
$2032 \equiv 1984 \pmod 3 \Rightarrow 2032^n \equiv 1984^n \pmod 3$.
$\Rightarrow A_n \,\vdots\, 3$.
Ta lại có $2018 \equiv 1984 \pmod{17} \Rightarrow 2018^n \equiv 1984^n \pmod{17}$.
$2032 \equiv 1964 \pmod{17} \Rightarrow 2032^n \equiv 1964^n \pmod{17}$.
$\Rightarrow A_n \,\vdots\, 17$.
Do $(3; 17) = 1$ nên $A_n \,\vdots\, 51 \quad \forall n$

b) $A_n = 2018^n + 2032^n - 1964^n - 1984^n$.

- Ta xét các trường hợp của n để $A_n \vdots 5$.
  Ta có $A_n \equiv (-2)^n + 2^n - 2 \cdot (-1)^n \pmod 5$.
  Do đó nếu n lẻ $\Rightarrow A_n \equiv 2 \pmod 5$ (loại).
  Nếu $n = 4k \Rightarrow A_n \equiv 2 \cdot 2^{4k} - 2 \equiv 2 - 2 \equiv 0 \pmod 5$ (nhận)
  Nếu $n = 4k+2 \Rightarrow A_n \equiv 2 \cdot 2^{4k+2} - 2 \equiv 8 - 2 \equiv 6 \pmod 5$ (loại).

  Vậy $A_n \vdots 5 \Leftrightarrow n \vdots 4$.

- Ta xét các trường hợp của n để $A_n \vdots 9$.
  Ta có

$$\begin{aligned} A_n &\equiv 2^n + (-2)^n - 2^n - 4^n \pmod 9 \\ &\equiv 2^n - 4^n \pmod 9 \quad \text{(Do n chẵn).} \\ &\equiv 2^n(1 - 2^n) \pmod 9 \end{aligned}$$

  Vì $(2;9) = 1 \Rightarrow 2^n - 1 \vdots 9$.
  Xét $n = 3k$ với $k \in \mathbb{N}$. Ta có $A_n \equiv 2^{3k} - 1 \equiv (-1)^k - 1 \pmod 9 \Rightarrow k$ chẵn
  Xét $n = 3k+1$ với $k \in \mathbb{N}$. Ta có $A_n \equiv 2^{3k+1} - 1 \equiv 2 \cdot (-1)^k - 1 \pmod 9$ (loại).
  Xét $n = 3k+2$ với $k \in \mathbb{N}$. Ta có $A_n \equiv 2^{3k+2} - 1 \equiv 4 \cdot (-1)^k - 1 \pmod 9$ (loại).

  Vậy $A_n \vdots 45 \Leftrightarrow n \vdots 12$.