

Dạng 1: Rút gọn biểu thức

Bài 1. Cho biểu thức $A = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{x^2+x-6} + \frac{1}{2-x}$

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm x để $A > 0$
- Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để A nguyên dương.

Bài 2. Cho các biểu thức $A = \frac{2x^2+2x}{1-x^2}$ và $B = \frac{1-2x}{x^2-3x+2} + \frac{x+1}{x-2}$

- Rút gọn biểu thức A, B;
- Tính giá trị của A khi $|x-2|=3$;
- Tính $C = A - B$;
- Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $C \in \mathbb{Z}$.

Bài 3. Cho biểu thức $A = \frac{2x}{x+3} + \frac{x+1}{x-3} + \frac{3-11x}{9-x^2}$ và $B = \frac{x-3}{x+1}$ với $0 \leq x \neq 9$.

- Rút gọn A;
- Với $P = A.B$, tìm x để $P = \frac{9}{2}$.
- Tìm x để $B < 1$
- Tìm số nguyên x để $P = A.B$ là số nguyên.

Bài 4. Cho biểu thức $A = \frac{1}{x-1} - \frac{x^2-x+3}{x^3-1}$ và $B = \frac{x^2+2}{x^2+x+1}$ với $0 \leq x \neq 9$.

- Rút gọn A;
- Biết $P = A : (1 - B)$. Tìm x để $P \leq 1$.

Bài 5. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-1}{x+1} - \frac{x}{x-1} - \frac{3x+1}{1-x^2} \right) : \frac{2x+1}{x^2-1}$

- Rút gọn P;
- Tìm các giá trị của x để $P = \frac{3}{x-1}$.
- Tìm các giá trị nguyên của x để $A > 1$

Bài 6. Cho biểu thức $P = \frac{x^2+2x}{2x+10} + \frac{x-5}{x} + \frac{50-5x}{2x(x+5)}$

- Tìm điều kiện xác định của P;
- Rút gọn biểu thức P.
- Tìm các giá trị của x để $P = 0; P = \frac{1}{4}$.
- Tìm các giá trị của x để $P > 0; P < 0$.

Bài 7. Cho biểu thức $P = \left(\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} - \frac{5}{2x - 3} \right) : \left(3 + \frac{2}{1 - x} \right)$

- Rút gọn P.
- Tính giá trị của P khi x thỏa mãn $|2x - 1| = 3$
- Tìm x để $P > 1$
- Tìm x nguyên để P nguyên.

Bài 8. Cho biểu thức $A = \left(1 + \frac{x^2}{x^2 + 1} \right) : \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{2x}{x^3 + x - x^2 - 1} \right)$

- Rút gọn A.
- Tính giá trị của A tại $x = -\frac{1}{2}$.
- Tìm x để $A < 1$
- Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Dạng 2: Phương trình và bất phương trình

Bài 1. Giải các phương trình sau:

- | | |
|---|---|
| a) $5 - (x - 6) = 4(3 - 2x)$ | d) $\frac{3x + 2}{2} - \frac{3x + 1}{6} = 2x + \frac{5}{3}$ |
| b) $3 - 4x(25 - 2x) = 8x^2 + x - 300$ | e) $x - \frac{2x - 2}{5} + \frac{x + 8}{6} = 7 + \frac{x - 1}{3}$ |
| c) $\frac{5x + 2}{6} - \frac{8x - 1}{3} = \frac{4x + 2}{5} - 5$ | f) $\frac{2(x - 3)}{7} - x + 2 = \frac{13x + 4}{21}$ |

Bài 2. Giải các phương trình sau:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| a) $2x(x - 3) + 5(x - 3) = 0$ | d) $x^2 - 5x + 6 = 0$ |
| b) $(x^2 - 4) - (x - 2)(3 - 2x) = 0$ | e) $2x^3 + 6x^2 = x^2 + 3x$ |
| c) $(2x + 5)^2 = (x + 2)^2$ | f) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 8 = 0.$ |

Bài 3. Giải các phương trình sau:

- | | |
|---|---|
| a) $\frac{1}{x + 1} - \frac{5}{x - 2} = \frac{15}{(x + 1)(2 - x)}$ | d) $\frac{1}{x - 1} - \frac{3x^2}{x^3 - 1} = \frac{2x}{x^2 + x + 1}$ |
| b) $\frac{x - 1}{x + 2} - \frac{x}{x - 2} = \frac{5x - 2}{4 - x^2}$ | e) $\frac{7}{8x} + \frac{5 - x}{4x^2 - 8x} = \frac{x - 1}{2x(x - 2)} + \frac{1}{8x - 16}$ |
| c) $\frac{x + 5}{x^2 - 5x} - \frac{x - 5}{2x^2 + 10x} = \frac{x + 25}{2x^2 - 50}$ | f) $\frac{2}{x^2 + 3x + 2} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$ |

Bài 4. Giải các phương trình sau:

- | | |
|----------------------|------------------------------|
| a) $ x - 5 = 3$ | c) $ 2x + 1 = x - 1 $ |
| b) $ -5x = 3x - 16$ | d) $ 2x + 1 - 5x - 2 = 3$ |

Bài 5. Giải các bất phương trình sau rồi biểu diễn tập nghiệm trên trục số:

a) $(x-3)^2 < x^2 - 5x + 4$

f) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

b) $(x-3)(x+3) < (x+2)^2 + 3$

g) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 < 0$

c) $\frac{4x-5}{3} > \frac{7-x}{5}$

h) $\frac{x+2}{5} \geq 0$

d) $\frac{2x+1}{2} + 3 \geq \frac{3-5x}{3} - \frac{4x+1}{4}$

i) $\frac{x+2}{x-3} < 0$

e) $\frac{5x-3}{5} + \frac{2x+1}{4} \leq \frac{2-3x}{2} - 5$

k) $\frac{x-1}{x-3} > 1$

Dạng 3: Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Bài 1. Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc trung bình 40km/h. Khi quay trở về A người đó tăng vận tốc thêm 5km/h nên thời gian về hết ít hơn thời gian đi 40 phút. Tính quãng đường AB?

Bài 2. Lúc 6 giờ, một ô tô xuất phát từ A đến B với vận tốc trung bình 40km/h. Khi đến B, người lái xe làm nhiệm vụ giao nhận hàng trong 30 phút rồi cho xe quay trở về A với vận tốc trung bình 30km/h. Tính quãng đường AB, biết rằng ô tô về đến A lúc 10 giờ cùng ngày.

Bài 3. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24km. Một giờ sau, một người đi xe máy từ A và đến B trước người đi xe đạp 20 phút. Tính vận tốc của mỗi xe, biết vận tốc của xe máy gấp 3 lần vận tốc xe đạp.

Bài 4. Một ô tô đi từ A đến B cách nhau 90 km trong một thời gian nhất định. Khi đi được 1 giờ người đó dừng lại nghỉ 15 phút. Trên quãng đường còn lại người đó phải tăng vận tốc thêm 10 km/h để đến B đúng dự định. Tính vận tốc ban đầu của ô tô?

Bài 5. Một người đi từ A đến B với vận tốc 9km/h. Khi đi từ B trở về A người đó chọn đường khác dài hơn đường cũ 6km, và đi với vận tốc lớn hơn lúc đi là 3km/h nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính chiều dài quãng đường AB.

Bài 6. Lúc 8h30' một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc 40km/h, đến 10h cùng ngày một người khác đi xe máy từ B đến A với vận tốc 60km/h. Hỏi hai người gặp nhau lúc mấy giờ, biết rằng họ gặp nhau tại chính giữa quãng đường.

Bài 7. Hai ca nô khởi hành cùng một lúc chạy từ A đến B. Ca nô thứ nhất chạy với vận tốc 20km/h, ca nô thứ hai chạy với vận tốc 24km/h. Trên đường đi, ca nô thứ hai dừng lại 40 phút để sửa xong vẫn đến B cùng một lúc với ca nô thứ nhất. Tính chiều dài quãng sông AB.

Bài 8. Một ca nô xuôi dòng từ bến A đến bến B hết 1 giờ 10 phút và đi ngược dòng từ B về A hết 1 giờ 30 phút. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B, biết vận tốc của dòng nước là 2km/h.

Bài 9. Một tổ may áo theo kế hoạch mỗi ngày phải may 30 áo. Tổ đã may mỗi ngày 40 áo nên đã hoàn thành trước thời hạn 3 ngày, ngoài ra còn may thêm được 20 chiếc áo nữa. Tính số áo mà tổ đó phải may theo kế hoạch.

Bài 10. Một đội đánh cá dự định mỗi tuần đánh bắt 20 tấn cá, nhưng mỗi tuần đã vượt mức 6 tấn nên chẳng những hoàn thành kế hoạch sớm một tuần mà còn vượt mức đánh bắt 10 tấn. Tính mức cá đánh bắt theo kế hoạch?

Bài 11. Hai tổ sản xuất phải dệt 140 áo len. Trong thực tế tổ 1 đã vượt mức 10% kế hoạch của mình, tổ 2 vượt mức 5% kế hoạch của mình nên cả hai tổ đã dệt được 150 áo len. Hỏi theo kế hoạch mỗi tổ phải dệt được bao nhiêu áo len?

Bài 12. Hai công nhân cùng làm chung một công việc dự định trong 12 giờ sẽ hoàn thành xong công việc. Họ làm chung với nhau trong 4 giờ thì người thứ nhất chuyển đi làm việc khác, người thứ hai phải làm nốt công việc trong 10 giờ. Hỏi nếu người thứ hai làm một mình thì bao lâu sẽ hoàn thành xong công việc.

Bài 13. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì đầy trong 3 giờ 20 phút. Người ta cho vòi thứ nhất chảy 3 giờ và vòi thứ hai chảy 2 giờ thì được $\frac{4}{5}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu mới đầy bể?

Bài 14. Hai giá sách có 450 cuốn. Nếu chuyển 50 cuốn từ giá thứ nhất sang giá thứ hai thì số sách ở giá thứ nhất bằng $\frac{5}{4}$ số sách ở giá thứ hai. Tính số sách ban đầu của mỗi giá.

Dạng 4: Bài tập hình học.

Bài 1. Cho góc xAy. Trên tia Ax lấy 2 điểm B và C sao cho $AB = 8\text{cm}$, $AC = 15\text{cm}$. Trên tia Ay lấy 2 điểm D và E sao cho $AD = 10\text{cm}$, $AE = 12\text{cm}$.

- CMR: $\triangle ABE$ và $\triangle ADC$ đồng dạng;
- CMR: $AB \cdot DC = AD \cdot BE$;
- Tính DC, biết $BE = 10\text{cm}$;
- Gọi I là giao điểm của BE và CD. CMR: $IB \cdot IE = ID \cdot IC$.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ nhọn có hai đường cao BF, CE cắt nhau tại H. Tia AH cắt BC tại D.

- Chứng minh: $\triangle AEC$ và $\triangle AFB$ đồng dạng;
- Chứng minh $AE \cdot AB = AF \cdot AC$ rồi từ đó suy ra $\triangle AEF$ đồng dạng với $\triangle ACB$.
- Chứng minh: $\triangle BDH$ đồng dạng $\triangle BFC$ và $BH \cdot BF + CH \cdot CE = BC^2$.
- Vẽ $DM \perp AB$ tại M, $DN \perp AC$ tại N. Chứng minh $MN \parallel EF$.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại B, đường cao BH. Cho $AB = 15\text{cm}$, $BC = 20\text{cm}$.

- Chứng minh: $\triangle CHB \sim \triangle CBA$
- Chứng minh: $AB^2 = AH \cdot AC$
- Tính độ dài AC, BH.
- Kẻ $HK \perp AB$ tại K, $HI \perp BC$ tại I. Chứng minh $\triangle BKI \sim \triangle BCA$
- Kẻ trung tuyến BM của $\triangle ABC$ cắt KI tại N. Tính diện tích $\triangle BKN$.

Bài 4. Cho hình bình hành ABCD, AC là đường chéo lớn. kẻ CE vuông góc với AB tại E, CF vuông góc với AD tại F, BI vuông góc với AC tại I.

- Chứng minh tam giác AIB đồng dạng với tam giác AEC.
- Chứng minh tam giác AIE đồng dạng với tam giác ABC.
- Chứng minh $AB.AE + AF.CB = AC^2$.
- Tia BI cắt đường thẳng CD tại Q và cắt cạnh AD tại K. Chứng minh $BI^2 = IK.IQ$

Bài 5. Cho hình chữ nhật ABCD có các cạnh $AB = 4\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$. Qua B vẽ đường thẳng vuông góc với BD cắt DC tại E.

- Chứng minh tam giác BDC đồng dạng với tam giác EDB, từ đó suy ra $DB^2 = DC.DE$;
- Tính DB, CE;
- Vẽ CF vuông góc với BE tại F. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Nối OE cắt CF tại I và cắt BC tại K. Chứng minh I là trung điểm của đoạn CF.
- Chứng minh rằng: ba điểm D,K,F thẳng hàng.

Bài 6: Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Đường vuông góc AB tại B và đường vuông góc với AC tại C cắt nhau tại K. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh:

- Chứng minh $\triangle ADB \sim \triangle AEC$ và $\triangle AED \sim \triangle ACB$;
- Chứng minh: $HE.HC = HD.HB$;
- Chứng minh H, M, K thẳng hàng và góc AED bằng góc ACB.
- AH cắt BC tại O. Chứng minh: $BE.BA + CD.CA = BC^2$.
- Chứng minh $\frac{HO}{AO} + \frac{HD}{BD} + \frac{HE}{CE} = 1$;
- Chứng minh H là giao điểm các đường phân giác của tam giác ODE.
- Cho góc $ACB = 45^\circ$, gọi P là trung điểm của DC. Từ D kẻ đường thẳng vuông góc với BP tại I và cắt CK tại N. Tìm tỉ số diện tích của tứ giác CPIN và diện tích tam giác DCN.
- Tam giác ABC có điều kiện gì thì tứ giác BHCK là hình thoi? Hình chữ nhật?

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH và trung tuyến AM. Kẻ MF vuông góc với AC tại F, FD vuông góc MC tại D. Phân giác góc C cắt FD, MF lần lượt tại I và K. Kẻ ME vuông góc với AB tại E.

- Chứng minh $\frac{CD}{CF} = \frac{CI}{CK} = \frac{DI}{FI}$ và $IF = KF$;
- Tứ giác AEMF là hình gì?
- Chứng minh $\triangle AHC \sim \triangle MFC$ và $AH.EB = HB.ME$;
- Chứng minh $MF.AB = MF.AC$;
- Chứng minh $BH.BC = 4AE^2$.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại C ($CA < CB$). Lấy điểm I bất kì trên cạnh AB. Trên nửa mặt phẳng AB chứa C, kẻ tia Ax, By cùng vuông góc với AB. Đường vuông góc với IC cắt Ax, By lần lượt tại M và N.

- Chứng minh tam giác CAI đồng dạng với tam giác CBN.
- Chứng minh $AB \cdot NC = IN \cdot CB$.
- Chứng minh góc MIN là góc vuông.
- Tìm vị trí của điểm I để diện tích tam giác IMN gấp hai lần diện tích tam giác ABC.

Bài 9. Cho hình thang cân MNPQ ($MN // PQ$, $MN < PQ$), $NP = 15\text{cm}$, đường cao $NI = 12\text{cm}$, $QI = 16\text{cm}$.

- Tính IP;
- Chứng minh $QN \perp NP$;
- Tính diện tích hình thang MNPQ;
- Gọi E là trung điểm của PQ. Đường thẳng vuông góc EN tại N cắt đường thẳng PQ tại K. Chứng minh rằng: $KN^2 = KP \cdot KQ$

Bài 10. Cho tam giác nhọn ABC, H là trực tâm, G là trọng tâm, O là giao điểm các đường trung trực của tam giác. Chứng minh rằng: H, G, O thẳng hàng và $HG = 2GO$.

Bài 11. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.EFGH với $AB = 12\text{cm}$, $BC = 9\text{cm}$, $AE = 10\text{cm}$.

- Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật ABCD.EFGH.
- Gọi I và O lần lượt là tâm đối xứng của hình chữ nhật EFGH và ABCD. Đường thẳng OI song song với những mặt phẳng nào?
- Chứng tỏ rằng hình chóp I.ABCD có các cạnh bên bằng nhau nhưng không phải hình chóp
- Tính diện tích xung quanh của hình chóp I.ABCD.

Dạng 5: Một số bài tập nâng cao.

Bài 1. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

- $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$
- $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$
- $(a + b + c)^2 \geq 4a(b - c)$
- a) $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x + y)^2}{a + b}$ ($a > 0; b > 0$)
- b) $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x + y + z)^2}{a + b + c}$ ($a > 0; b > 0; c > 0$)
- c) $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$

- Với a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c + ab + bc + ca = 6$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$.

Bài 2. Cho $A = \frac{2a-b}{3a-b} + \frac{5b-a}{3a+b}$. Tính giá trị của biểu thức A, biết $b > a > 0$ và $10a^2 - 3b^2 + ab = 0$.

Bài 3. Cho x, y thỏa mãn $(x+y)^2 = (x-2)(y+2)$. Tính giá trị biểu thức $A = x^2 + y^2$.

Bài 4. Tìm GTLN, GTNN (nếu có) của các biểu thức sau:

1) $A = \frac{6}{4x^2 + 4x + 3}$

2) $B = \frac{-4}{6 + 4x + x^2}$

3) $C = \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 2x + 1}$ (cho $x \neq 1$)

4) $D = x + \frac{1}{x} (x \geq 4)$

5) $Q = \frac{12x + 34}{x^2 + 2}$

6) $E = |x-1| + 2|x-2| + |x-3| + 4$

Bài 5. 1) Cho $a > 0; b > 0; c > 0$ và $a + b + c = 6$. Tìm GTNN của $Q = \frac{a^3 + b^3}{ab} + \frac{b^3 + c^3}{bc} + \frac{c^3 + a^3}{ca}$

2) Tìm GTNN của $A = x^2 + y^2 - xy - x + 4y + 600$

Bài 6. Tìm m để hai bất phương trình sau tương đương:

$$\frac{mx+5}{12} + \frac{x-1}{2} > 2 \quad (1);$$

$$(x^2+1)(x+22) < 0 \quad (2)$$

Hướng dẫn giải:**Dạng 1:**

Bài 1. $A = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{x^2+x-6} + \frac{1}{2-x}$

Ta có: $x^2+x-6 = x^2+3x-2x-6 = x(x+3) - 2(x+3) = (x-2)(x+3)$

Điều kiện xác định: $x \neq 2; x \neq -3$

a) Rút gọn biểu thức A

$$\begin{aligned} \text{Có } A &= \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{(x-2)(x+3)} - \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{(x+2)(x-2) - 5 - (x+3)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x^2 - 4 - 5 - x - 3}{(x+3)(x-2)} = \frac{x^2 - x - 12}{(x+3)(x-2)} \\ &= \frac{x^2 - 4x + 3x - 12}{(x+3)(x-2)} = \frac{(x+3)(x-4)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x-4}{x-2} \end{aligned}$$

Vậy với $x \neq 2; x \neq -3$ thì $A = \frac{x-4}{x-2}$.

b) Tìm x để $A > 0$

Với $x \neq 2; x \neq -3$ để $A > 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x-2} > 0..$

Kết hợp điều kiện $x \neq 2; x \neq -3 \Rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < 2 \\ x \neq -3 \end{cases}$

Vậy với $\begin{cases} x > 4 \\ x < 2 \\ x \neq -3 \end{cases}$ thì $A > 0$.

c) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}^+$.

Với $x \neq 2; x \neq -3$.

Ta có $A = \frac{x-4}{x-2} = \frac{x-2-2}{x-2} = 1 - \frac{2}{x-2}$.

$$\text{Để } A \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 1 - \frac{2}{x-2} \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{x-2} \in \mathbb{Z} \\ \frac{2}{x-2} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2) \in U(2) \\ \begin{cases} x < 2 \\ x > 4 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2) \in \{\pm 1; \pm 2\} \\ \begin{cases} x < 2 \\ x > 4 \end{cases} \end{cases}$$

Ta có bảng:

$x-2$	-2	-1	1	2
x	0(chọn)	1(chọn)	3(loại)	4(loại)

Vậy với $x \in \{0; 1\}$ thì $A \in \mathbb{Z}^+$.

Bài 2. $A = \frac{2x^2 + 2x}{1 - x^2}$ $B = \frac{1 - 2x}{x^2 - 3x + 2} + \frac{x + 1}{x - 2}$

Ta có: $\begin{cases} 1 - x^2 = (1 - x)(1 + x) \\ x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) \end{cases}$ nên điều kiện xác định của $A; B$ là $x \neq \pm 1; x \neq 2$.

a) Rút gọn biểu thức $A; B$.

Với $x \neq \pm 1; x \neq 2$, ta có:

$$A = \frac{2x^2 + 2x}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{2x(x + 1)}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{2x}{1 - x}$$

$$B = \frac{1 - 2x}{(x - 1)(x - 2)} + \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{1 - 2x + x^2 - 1}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{x}{x - 1}$$

b) Tính giá trị A khi $|x - 2| = 3$.

Với $x \neq \pm 1; x \neq 2$, ta có: $|x - 2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 3 \\ x - 2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5(tm) \\ x = -1(loại) \end{cases}$

Thay $x = 5$ vào biểu thức A ta được $A = \frac{2 \cdot 5}{1 - 5} = \frac{-5}{2}$.

c) Tính $C = A - B$.

Với $x \neq \pm 1; x \neq 2$, ta có $C = A - B = \frac{2x}{1 - x} - \frac{x}{x - 1} = \frac{2x + x}{1 - x} = \frac{3x}{1 - x}$

d) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $C \in \mathbb{Z}$.

Với $x \neq \pm 1; x \neq 2$

Nếu $x = 0 \Rightarrow C = \frac{3 \cdot 0}{1 - 0} = 0$ Vậy $x = 0(tm)$.

Nếu $x \neq 0 \Rightarrow C = \frac{3x}{1 - x} = \frac{-3x}{x - 1} = \frac{-3(x - 1) - 3}{x - 1} = -3 - \frac{3}{x - 1}$

Để $C \in \mathbb{Z} \Rightarrow -3 - \frac{3}{x - 1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{3}{x - 1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x - 1) \in U(3) \Rightarrow (x - 1) \in \{\pm 1; \pm 3\}$

Ta có bảng:

$x - 1$	-3	-1	1	3
x	-2 (chọn)	0 (chọn)	2 (loại)	4 (chọn)

Vậy $x \in \{-2; 0; 4\}$ thì $C \in \mathbb{Z}$

Bài 3.

a) Với $0 \leq x \neq 9$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2x}{x + 3} + \frac{x + 1}{x - 3} + \frac{3 - 11x}{9 - x^2} = \frac{2x}{x + 3} + \frac{x + 1}{x - 3} - \frac{3 - 11x}{x^2 - 9} = \frac{2x(x - 3) + (x + 1)(x + 3) - (3 - 11x)}{(x + 3)(x - 3)} \\ &= \frac{2x^2 - 6x + x^2 + 3x + x - 3 + 11x}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{3x^2 + 9x}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{3x(x + 3)}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{3x}{x - 3} \end{aligned}$$

b) Với $0 \leq x \neq 9$, ta có: $P = A \cdot B = \frac{3x}{x-3} \cdot \frac{x-3}{x+1} = \frac{3x}{x+1}$.

Ta có $P = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{3x}{x+1} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 6x = 9 \cdot (x+1) \Leftrightarrow 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ (thỏa mãn)

c) Với $0 \leq x \neq 9$ thì $B < 1 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} < 1 \Leftrightarrow x-3 < x+1 \Leftrightarrow -3 < 1$ (vô số nghiệm)

d) $P = \frac{3x}{x+1} = \frac{3(x+1)-3}{x+1} = 3 - \frac{3}{x+1}$.

Để P nguyên thì $(x+1) \in U(3) \Leftrightarrow (x+1) \in \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow x \in \{0; -2; 2; -4\}$

Bài 4.

a) Với $x \neq 1$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{x-1} - \frac{x^2-x+3}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{x^2-x+3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2+x+1-(x^2-x+3)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{2x-2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{2(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{2}{x^2+x+1}. \end{aligned}$$

b) Với $x \neq 1$ thì $P = A : (1-B) = \frac{2}{x^2+x+1} : \left(1 - \frac{x^2+2}{x^2+x+1}\right) = \frac{2}{x^2+x+1} : \left(\frac{x^2+x+1-(x^2+2)}{x^2+x+1}\right)$

$$= \frac{2}{x^2+x+1} : \left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right) = \frac{2}{x^2+x+1} \cdot \frac{x^2+x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1}.$$

Để $P \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 3$ (thỏa mãn).

Bài 5. $P = \left(\frac{x-1}{x+1} - \frac{x}{x-1} - \frac{3x+1}{1-x^2}\right) : \frac{2x+1}{x^2-1}$

a) Điều kiện xác định: $x \neq \pm 1, x \neq \frac{-1}{2}$.

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x-1}{x+1} - \frac{x}{x-1} - \frac{3x+1}{1-x^2}\right) : \frac{2x+1}{x^2-1} \\ &= \left[\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} - \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{3x+1}{(x+1)(x-1)}\right] \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{2x+1} \\ &= \frac{x^2-2x+1-x^2-x+3x+1}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{2x+1} \\ &= \frac{2}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{2x+1} = \frac{2}{2x+1} \end{aligned}$$

b) $P = \frac{3}{x-1} \Rightarrow \frac{2}{2x+1} = \frac{3}{x-1} \Rightarrow 2(x-1) = 3(2x+1) \Leftrightarrow 2x-2 = 6x+3 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{4}$ (TM)

$$c) P > 1 \Rightarrow \frac{2}{2x+1} > 1 \Rightarrow 2 > 2x+1 \Leftrightarrow -2x > 1-2 \Leftrightarrow -2x > -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow x < \frac{1}{2}$ và $x \neq -1, x \neq \frac{-1}{2}$.

$$\text{Bài 6. } P = \frac{x^2+2x}{2x+10} + \frac{x-5}{x} + \frac{50-5x}{2x(x+5)}$$

a) ĐKXD: $x \neq 0, x \neq -5$.

$$\begin{aligned} b) P &= \frac{x^2+2x}{2x+10} + \frac{x-5}{x} + \frac{50-5x}{2x(x+5)} = \frac{x(x^2+2x)}{2x(x+5)} + \frac{2(x+5)(x-5)}{2x(x+5)} + \frac{50-5x}{2x(x+5)} \\ &= \frac{x^3+2x^2+2x^2-50+50-5x}{2x(x+5)} = \frac{x^3+4x^2-5x}{2x(x+5)} = \frac{x(x-1)(x+5)}{2x(x+5)} = \frac{x-1}{2} \end{aligned}$$

$$c) P = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{2} = 0 \Rightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1(TM)$$

$$P = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4(x-1)=2 \Leftrightarrow 4x-4=2 \Leftrightarrow 4x=6 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}(TM)$$

$$d) P > 0 \Rightarrow \frac{x-1}{2} > 0 \Rightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1, \text{ kết hợp với ĐK } \Rightarrow x > 1.$$

$$P < 0 \Rightarrow \frac{x-1}{2} < 0 \Rightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1, \text{ kết hợp với ĐK } \Rightarrow x < 1 \text{ và } x \neq 0, x \neq -5.$$

Bài 7.

a) Rút gọn P

$$\begin{aligned} \text{Với } x \neq 1; x \neq \frac{3}{2}, \text{ ta có: } P &= \left(\frac{2x}{2x^2-5x+3} - \frac{5}{2x-3} \right) : \left(3 + \frac{2}{1-x} \right) \\ &= \left(\frac{2x}{(2x-3)(x-1)} - \frac{5(x-1)}{(2x-3)(x-1)} \right) : \left(\frac{3(1-x)}{1-x} + \frac{2}{1-x} \right) \\ &= \frac{2x-(5x-5)}{(2x-3)(x-1)} : \frac{3-3x+2}{1-x} \\ &= \frac{-3x+5}{(2x-3)(x-1)} \cdot \frac{x-1}{3x-5} = \frac{-1}{2x-3} \end{aligned}$$

b) Tính giá trị của P khi x thỏa mãn $|2x-1|=3$

$$|2x-1|=3 \Leftrightarrow 2x-1=3 \text{ hoặc } 2x-1=-3$$

$$\Leftrightarrow 2x=4 \text{ hoặc } 2x=-2$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ hoặc } x=-1$$

$$\text{Với } x=2 \text{ thì } P = \frac{-1}{2 \cdot 2 - 3} = -1$$

$$\text{Với } x=-1 \text{ thì } P = \frac{-1}{2 \cdot (-1) - 3} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$$

c) Tìm x để $P > 1$.

$$P > 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{2x-3} > 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{2x-3} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2-2x}{2x-3} > 0$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2-2x > 0 \Leftrightarrow x < 1 \\ 2x-3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2-2x < 0 \Leftrightarrow x > 1 \\ 2x-3 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{3}{2}$$

Vậy để $P > 1$ thì $1 < x < \frac{3}{2}$

d) Tìm x nguyên để P nguyên

$$\text{Để } \frac{-1}{2x-3} \in \mathbb{Z} \text{ thì: } 2x-3=1 \text{ hoặc } 2x-3=-1 \Leftrightarrow 2x=4 \text{ hoặc } 2x=2$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ (TMĐK) hoặc } x=1 \text{ (KTMĐK)}$$

Vậy để P nguyên thì $x=2$

Bài 8.

a) Rút gọn A

$$\begin{aligned} A &= \left(1 + \frac{x^2}{x^2+1}\right) : \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^3+x-x^2-1}\right) \\ &= \frac{2x^2+1}{x^2+1} : \left[\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{(x^2+1)(x-1)}\right] \\ &= \frac{2x^2+1}{x^2+1} : \left[\frac{x^2+1}{(x^2+1)(x-1)} - \frac{2x}{(x^2+1)(x-1)}\right] \\ &= \frac{2x^2+1}{x^2+1} : \frac{(x-1)^2}{(x^2+1)(x-1)} \\ &= \frac{2x^2+1}{x^2+1} \cdot \frac{(x^2+1)(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2+1}{x-1} \end{aligned}$$

b) Tìm giá trị của A tại $x = \frac{-1}{2}$

$$\text{Khi } x = \frac{-1}{2} \text{ thì } A = \frac{2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 1}{\left(\frac{-1}{2}\right) - 1} = -1$$

c) Tìm x để $A < 1$.

$$\frac{2x^2+1}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2+1}{x-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-x+2}{x-1} < 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

Dạng 2: Phương trình và bất phương trình**Bài 1.**

a) $5 - (x - 6) = 4(3 - 2x)$

$$\Leftrightarrow 5 - x + 6 = 12 - 8x$$

$$\Leftrightarrow -x + 8x = 12 - 5 - 6$$

$$\Leftrightarrow 7x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{1}{7} \right\}$

b) $3 - 4x(25 - 2x) = 8x^2 + x - 300$

$$\Leftrightarrow 3 - 100x + 8x^2 = 8x^2 + x - 300$$

$$\Leftrightarrow -101x = -303 \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{3\}$

c) $\frac{5x+2}{6} - \frac{8x-1}{3} = \frac{4x+2}{5} - 5$

$$\Leftrightarrow 5(5x+2) - 10(8x-1) = 6(4x+2) - 50$$

$$\Leftrightarrow 25x + 10 - 80x + 10 = 24x + 12 - 50$$

$$\Leftrightarrow -79x = 58 \Leftrightarrow x = \frac{-58}{79}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{-58}{79} \right\}$

d) $\frac{3x+2}{2} - \frac{3x+1}{6} = 2x + \frac{5}{3}$

$$\Leftrightarrow 9x + 6 - 3x - 1 = 12x + 10$$

$$\Leftrightarrow -6x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{6}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{-5}{6} \right\}$

e) $x - \frac{2x-5}{5} + \frac{x+8}{6} = 7 + \frac{x-1}{3}$

$$\Leftrightarrow 30x - 6(2x-5) + 5(x+8) = 210 + 10(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 30x - 12x + 30 + 5x + 40 = 210 + 10x - 10$$

$$\Leftrightarrow 13x = 130 \Leftrightarrow x = 10$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{10\}$

f) $\frac{2(x-3)}{7} - x + 2 = \frac{13x+4}{21} \Leftrightarrow 6x - 18 - 21x + 42 = 13x + 4 \Leftrightarrow -28x = -20 \Leftrightarrow x = \frac{5}{7}$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{5}{7} \right\}$

Bài 2.

$$\text{a) } 2x(x-3)+5(x-3)=0 \Leftrightarrow (x-3)(2x+5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ 2x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-\frac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{3; -\frac{5}{2}\right\}$

$$\text{b) } (x^2-4)-(x-2)(3-2x)=0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(x+2)-(x-2)(3-2x)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(3x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{2; \frac{1}{3}\right\}$

$$\text{c) } (2x+5)^2=(x+2)^2 \\ \Leftrightarrow (2x+5)^2-(x+2)^2=0 \\ \Leftrightarrow (x+3)(3x+7)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ 3x+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=-\frac{7}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{-3; -\frac{7}{3}\right\}$

$$\text{d) } x^2-5x+6=0 \\ \Leftrightarrow x^2-2x-3x+6=0 \\ \Leftrightarrow x(x-2)-3(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{2; 3\}$.

$$\text{e) } 2x^3+6x^2=x^2+3x \\ \Leftrightarrow 2x^2(x+3)-x(x+3)=0 \\ \Leftrightarrow x(x+3)(2x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{0; -3; \frac{1}{2}\right\}$

$$f) \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 8 = 0 (x \neq 0)$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = a$$

Khi đó phương trình trở thành: $a^2 + 2a - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4a - 2a - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow a(a+4) - 2(a+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+4)(a-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$+ \text{Với } a = -4 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} + 2(tm) \\ x = -\sqrt{3} + 2(tm) \end{cases}$$

$$+ \text{Với } a = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1(tm)$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-\sqrt{3} + 1; \sqrt{3} + 1; 1\}$

Bài 3. Giải PT

$$a) \frac{1}{x+1} - \frac{5}{x-2} = \frac{15}{(x+1)(2-x)} \quad \text{ĐK: } x \neq -1; x \neq 2$$

$$\Rightarrow x-2-5(x+1) = -15$$

$$\Leftrightarrow x - 2 - 5x - 5 = -15$$

$$\Leftrightarrow -4x = -15 + 5 + 2$$

$$\Leftrightarrow -4x = -8$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (không thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy PT đã cho vô nghiệm.

$$b) \frac{x-1}{x+2} - \frac{x}{x-2} = \frac{5x-2}{4-x^2} \quad \text{ĐK: } x \neq 2; x \neq -2.$$

$$\Rightarrow (x-1) \cdot (x-2) - x(x+2) = 2 - 5x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 - x^2 - 2x = 2 - 5x$$

$$\Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$$

Vậy PT đã cho vô số nghiệm khác 2; -2

$$c) \frac{x+5}{x^2-5x} - \frac{x-5}{2x^2+10x} = \frac{x+25}{2x^2-50} \quad \text{ĐK: } x \neq 0; x \neq -5; x \neq 5$$

$$\Rightarrow \frac{x+5}{x(x-5)} - \frac{x-5}{2x(x+5)} = \frac{x+25}{2(x-5)(x+5)}$$

$$\Leftrightarrow 2(x+5)^2 - (x-5)^2 = x(x+25)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 20x + 50 - x^2 + 10x - 25 = x^2 + 25x$$

$$\Leftrightarrow 5x = -25$$

$$\Leftrightarrow x = -5 \text{ (không thoả mãn ĐK)}$$

Vậy PT đã cho vô nghiệm.

$$\text{d) } \frac{1}{x-1} - \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{2x}{x^2+x+1} \quad \text{ĐK: } x \neq 1$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 1 - 3x^2 = 2x(x-1)$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + x + 1 - 2x^2 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x+1)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \text{ (TMĐK)} \\ x = 1 \text{ (không TMĐK)} \end{cases}$$

Vậy PT đã cho có tập nghiệm $S = \{-\frac{1}{4}\}$

$$\text{e) } \frac{7}{8x} + \frac{5-x}{4x^2-8x} = \frac{x-1}{2x(x-2)} + \frac{1}{8x-16} \quad \text{ĐK: } x \neq 0; x \neq 2$$

$$\Rightarrow 7(x-2) + 2(5-x) = 4(x-1) + x$$

$$\Leftrightarrow 7x - 14 + 10 - 2x = 4x - 4 + x$$

$$\Leftrightarrow 0.x = 0$$

Vậy PT đã cho vô số nghiệm khác 0; 2

$$\text{f) } \frac{7}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x^2+4x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{(x+1)(x+3)} \quad \text{ĐK: } x \neq -1; x \neq -2; x \neq -3$$

$$\Rightarrow 7(x+3) + x + 1 = x + 2$$

$$\Leftrightarrow 7x + 21 + x + 1 - x = 2$$

$$\Leftrightarrow 7x = 20$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{20}{7} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy PT đã cho có tập nghiệm $S = \{\frac{20}{7}\}$

Bài 4.

$$\text{a) } |x-5| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 = 1 \\ x-5 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy PT đã cho có tập nghiệm $S = \{4; 6\}$

$$b) |-5x| = 3x - 16 \text{ ĐK: } x \geq \frac{16}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x = 3x - 16 \\ 5x = 3x - 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x = -16 \\ 2x = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -8 \end{cases} \text{ (không TMĐK)}$$

Vậy PT đã cho vô nghiệm

$$c) |2x + 1| = |x - 1|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = x - 1 \\ 2x + 1 = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Vậy PT đã cho có tập nghiệm $S = \{-2; 0\}$

$$d) |2x + 1| - |5x - 2| = 3$$

$$\text{Khi } x \leq \frac{-1}{2} \text{ ta có: } -2x - 1 + 5x - 2 = 3$$

$$\Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (không TMĐK)}$$

$$\text{Khi } \frac{-1}{2} < x < \frac{2}{5} \text{ ta có: } 2x + 1 + 5x - 2 = 3$$

$$\Leftrightarrow 7x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{7} \text{ (không TMĐK)}$$

$$\text{Khi } x \geq \frac{2}{5} \text{ ta có: } 2x + 1 - 5x + 2 = 3$$

$$\Leftrightarrow -3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ (không TMĐK)}$$

Vậy PT đã cho vô nghiệm

Bài 5.

$$a) (x-3)^2 < x^2 - 5x + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 < x^2 - 5x + 4$$

$$\Leftrightarrow -6x + 5x < 4 - 9$$

$$\Leftrightarrow -x < -5$$

$$\Leftrightarrow x > 5$$

KL: Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 5$

$$b) (x-3)(x+3) \leq (x+2)^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 \leq x^2 + 4x + 4 + 3$$

$$\Leftrightarrow 4x \geq 7 + 9 \Leftrightarrow x \geq 4$$

KL: Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \geq 4$

$$c) \frac{4x-5}{3} > \frac{7-x}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot (4x-5) > 3 \cdot (7-x)$$

$$\Leftrightarrow 20x - 25 > 21 - 3x$$

$$\Leftrightarrow 23x > 46$$

$$\Leftrightarrow x > 2$$

KL: Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > 2$

$$d) \frac{2x+1}{2} + 3 \geq \frac{3-5x}{3} - \frac{4x+1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot (2x+1) + 3 \cdot 12 \geq 4 \cdot (3-5x) - 3 \cdot (4x+1)$$

$$\Leftrightarrow 12x + 6 + 36 \geq 12 - 20x - 12x - 3$$

$$\Leftrightarrow 12x + 20x + 12x \geq 12 - 3 - 6 - 36$$

$$\Leftrightarrow 44x \geq -33$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{-3}{4}$$

KL: Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq \frac{-3}{4}$

$$e) \frac{5x-3}{5} + \frac{2x+1}{4} \leq \frac{2-3x}{2} - 5$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot (5x-3) + 5 \cdot (2x+1) \leq 10 \cdot (2-3x) - 100$$

$$\Leftrightarrow 20x - 12 + 10x + 5 \leq 20 - 30x - 100$$

$$\Leftrightarrow 20x + 10x + 30x \leq 20 - 100 + 12 - 5$$

$$\Leftrightarrow 60x \leq -73$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{-73}{60}$$

KL: Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq \frac{-73}{60}$

$$f) x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 3x + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (x-1) - 3 \cdot (x-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

KL: Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 3$ hoặc $x \leq 1$

$$g) x^3 - 2x^2 + 3x - 6 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 2x^2) + (3x - 6) < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot (x-2) + 3 \cdot (x-2) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+3) < 0$$

$$\Rightarrow (x-2) \text{ và } (x^2+3) \text{ phải cùng dấu, mà } (x^2+3) > 0 \forall x \Rightarrow x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

KL: Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 2$

$$h) \frac{x+2}{5} \geq 0 \Leftrightarrow x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$$

KL: Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq -2$

$$i) \frac{x+2}{x-3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 > 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow -2 < x < 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 < 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > 3 \end{cases} \text{ (KTM)}$$

KL: Vậy nghiệm của bất phương trình là $-2 < x < 3$

$$k) \frac{x-1}{x-3} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x-3} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-3} - \frac{x-3}{x-3} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1-x+3}{x-3} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x-3} > 0$$

$\Rightarrow 2$ và $x-3$ phải cùng dấu

Mà $2 > 0$ nên $x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$

KL: Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 3$

Dạng 3: Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Bài 1.

Gọi thời gian người đó đi xe máy từ A đến B là x (giờ) ($x > 0$).

+) Thời gian về ít hơn thời gian đi 40 phút ($40 \text{ phút} = \frac{2}{3} \text{ giờ}$) nên thời gian về là: $x - \frac{2}{3}$ (giờ)

+) Lúc đi từ A đến B xe đi với vận tốc trung bình 40 km/h nên quãng đường AB dài là: $40x$ (km)

+) Lúc đi từ B về A, xe tăng vận tốc thêm 5 km/h nên quãng đường AB dài là: $45\left(x - \frac{2}{3}\right)$ (km)

Ta có phương trình: $40x = 45\left(x - \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x = 6$ (TMĐK)

Vậy quãng đường AB dài là $40 \cdot 6 = 240$ (km)

Bài 2. Đồi $30 \text{ phút} = \frac{1}{2} \text{ giờ}$.

Gọi thời gian ô tô đi từ A đến B là x (giờ) ($x > 0$).

+) Thời gian ô tô đi từ A đến B rồi trở về A (không kể thời gian giao hàng) là:

$10 \text{ giờ} - 6 \text{ giờ} - \frac{1}{2} \text{ giờ} = \frac{7}{2} \text{ giờ}$. \Rightarrow Thời gian ô tô đi từ B về A là: $\frac{7}{2} - x$ (giờ)

+) Ô tô đi từ A đến B với vận tốc 40 km/h nên quãng đường AB dài là: $40x$ (km)

+) Ô tô đi từ B về A với vận tốc 30km/h nên quãng đường AB dài là: $30\left(\frac{7}{2} - x\right)(\text{km})$

Ta có phương trình: $40x = 30\left(\frac{7}{2} - x\right) \Leftrightarrow 70x = 105 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (TMĐK)

Vậy quãng đường AB dài là: $40 \cdot \frac{3}{2} = 60(\text{km})$.

Bài 3.

Gọi vận tốc của xe đạp là x (km/h), $x > 0$

Vận tốc của xe máy gấp 3 lần vận tốc của xe đạp

Vận tốc của xe máy là $3x$ (km/h)

Quãng đường AB dài 24 km

Thời gian xe máy đi từ A đến B là $\frac{24}{3x} = \frac{8}{x}$ (km/h)

Thời gian xe đạp đi từ A đến B là $\frac{24}{x}$ (km/h)

Xe máy đi sau xe đạp 1 giờ và đến B trước xe đạp 20 phút = $\frac{1}{3}$ giờ, ta có phương trình

$$\frac{24}{x} - \frac{8}{x} = 1 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{16}{x} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = 12(\text{tm})$$

Vận tốc của xe máy là $12 \cdot 3 = 36$ (km/h)

Vận vận tốc của xe đạp là 12 km/h, vận tốc của xe máy là 36 km/h

Bài 4.

Gọi vận tốc ban đầu của ô tô là x (km/h), $x > 0$

Quãng đường AB dài 90km

Thời gian dự định ô tô đi từ A đến B là $\frac{90}{x}$ (km/h)

Sau 1 giờ, ô tô đi được $1x = x$ (km/h)

Quãng đường còn lại của ô tô sau khi đi được 1 giờ là $90 - x$ (km)

Vận tốc của ô tô tăng thêm 10 km/h

Vận tốc của ô tô đi trên quãng đường còn lại là $x + 10$ (km/h)

Thời gian ô tô đi trên quãng đường còn lại là $\frac{90 - x}{x + 10}$ (giờ)

Ô tô nghỉ 15 phút = $\frac{1}{4}$ giờ và đến B đúng dự định

Ta có phương trình:

$$\frac{90}{x} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{90 - x}{x + 10} \Leftrightarrow \frac{90}{x} = \frac{5}{4} + \frac{90 - x}{x + 10} \Leftrightarrow \frac{90}{x} = \frac{x + 410}{4(x + 10)} \Rightarrow x^2 + 50x - 3600 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -90(\text{ktm}) \\ x = 40(\text{tm}) \end{cases}$$

Vậy vận tốc dự định của ô tô là 40 km/h

Bài 5.

Gọi chiều dài quãng đường AB là: x ($x > 0, km$). Thời gian đi từ A đến B là: $\frac{x}{9}$ (giờ).

Quãng đường người đó đi từ B về A dài là: $x+6$ (km).

Vận tốc người đó đi từ B về A là: $9+3=12$ (km/h). Thời gian đi từ B về A là: $\frac{x+6}{12}$ (giờ).

Vì thời gian về ít hơn thời gian đi 20 phút $\left(= \frac{1}{3}h \right)$ nên ta có phương trình:

$$\frac{x}{9} - \frac{x+6}{12} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 4x - 3x - 18 = 12 \Leftrightarrow x = 30(\text{tmdk})$$

Vậy quãng đường AB dài 30km.

Bài 6.

Từ 8h30' đến 10h là $1h30' = \frac{3}{2}h$.

Quãng đường người đi từ A – B đã đi được trong 1h30' là: $40 \cdot \frac{3}{2} = 60$ (km)

Gọi thời gian xe đi từ B về A đến chỗ gặp là: x ($x > 0$) (giờ)

Quãng đường xe đi từ B về A đến chỗ gặp là: $60x$ (km)

Quãng đường xe đi từ A đến B đến chỗ gặp là: $60+40x$ (km)

Vì hai xe gặp nhau ở chính giữa quãng đường AB nên ta có phương trình:

$$60x = 40x + 60 \Leftrightarrow 20x = 60 \Leftrightarrow x = 3(\text{tmdk})$$

Vậy hai xe gặp nhau lúc: $10h + 3h = 13h$.

Bài 7.

Gọi chiều dài quãng đường AB là x (km, $x > 0$).

Thời gian ca nô thứ nhất đi từ A đến B là: $\frac{x}{20}$ (giờ).

Thời gian ca nô thứ hai đi từ A đến B là: $\frac{x}{24}$ (giờ).

Do ca nô thứ hai nghỉ 40 phút = $\frac{2}{3}$ giờ nên ta có phương trình: $\frac{x}{24} + \frac{2}{3} = \frac{x}{20} \Leftrightarrow x = 40$ (thỏa)

Vậy quãng đường AB dài 40 km.

Bài 8.

Gọi vận tốc riêng của ca nô là: x (km/giờ, $x > 0$).

Vận tốc của ca nô khi đi xuôi dòng là: $x+2$ (km/giờ).

Vận tốc của ca nô khi đi ngược dòng là: $x-2$ (km/giờ).

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 1h10' = \frac{7}{6}h \\ 1h30' = \frac{3}{2}h \end{cases}$$

Theo đề bài ta có phương trình: $(x+2) \cdot \frac{7}{6} = (x-2) \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow x=16$ (thỏa mãn ĐK)

Do đó quãng đường AB bằng: $(x+2) \cdot \frac{7}{6} = (16+2) \cdot \frac{7}{6} = 21$ (km)

Vậy quãng đường AB dài 21 km.

Bài 9.

Gọi số áo mà tổ đó phải may theo kế hoạch là x (áo) ($x \in \mathbb{N}^*$)

Số áo mà tổ đó đã may trên thực tế là: $x+20$ (áo)

Thời gian tổ đó phải may theo kế hoạch là: $\frac{x}{30}$ (ngày)

Thời gian thực tế tổ đó đã may là: $\frac{x+20}{40}$ (ngày)

Theo bài ra, ta có phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{x}{30} - \frac{x+20}{40} &= 3 \\ \Leftrightarrow \frac{4x}{120} - \frac{3(x+20)}{120} &= \frac{360}{120} \\ \Leftrightarrow 4x - 3(x+20) &= 360 \\ \Leftrightarrow 4x - 3x - 60 &= 360 \\ \Leftrightarrow x &= 420 \text{ (thỏa mãn)} \end{aligned}$$

Vậy số áo mà tổ đó phải may theo kế hoạch là 420 áo.

Bài 10.

Gọi số cá đội đánh cá phải đánh bắt theo kế hoạch là x (tấn) ($x > 0$)

Số cá đội đánh cá đã đánh bắt trên thực tế là $x+10$ (tấn)

Thời gian đội đánh cá phải đánh bắt theo kế hoạch là: $\frac{x}{20}$ (tuần)

Thời gian thực tế đội đánh cá đã đánh bắt là: $\frac{x+10}{20+6} = \frac{x+10}{26}$ (tuần)

Theo bài ra, ta có phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{x}{20} - \frac{x+10}{26} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{13x}{260} - \frac{10(x+10)}{260} &= \frac{260}{260} \\ \Leftrightarrow 13x - 10(x+10) &= 260 \\ \Leftrightarrow 13x - 10x - 100 &= 260 \\ \Leftrightarrow 3x &= 360 \\ \Leftrightarrow x &= 120 \text{ (thỏa mãn)} \end{aligned}$$

Vậy số cá đội đánh cá phải đánh bắt theo kế hoạch là 120 (tấn)

Bài 11.

Gọi số áo len tổ 1 phải dệt theo kế hoạch là x (áo) ($x \in N^*$)

Số áo len tổ 2 phải dệt theo kế hoạch là $140 - x$ (áo)

Thực tế, tổ 1 đã dệt được $x + 10\%x = x + \frac{10}{100}x = \frac{110}{100}x$ (áo)

Thực tế, tổ 2 đã dệt được $(140 - x) + \frac{5}{100}(140 - x) = \frac{105}{100}(140 - x)$ (áo)

Theo bài ra, ta có phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{110}{100}x + \frac{105}{100}(140 - x) &= 150 \\ \Leftrightarrow 110x + 105(140 - x) &= 15000 \\ \Leftrightarrow 110x + 14700 - 105x &= 15000 \\ \Leftrightarrow 5x &= 300 \\ \Leftrightarrow x &= 60 \text{ (thỏa mãn)} \end{aligned}$$

Vậy theo kế hoạch số áo len tổ 1 phải dệt là 60 (áo)

Theo kế hoạch số áo len tổ 2 phải dệt là $140 - 60 = 80$ (áo)

Bài 12.

Gọi thời gian người thứ hai làm một mình hoàn thành xong công việc là x (giờ) ($x > 12$)

1 giờ, người thứ hai làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Vì hai công nhân cùng làm chung một công việc dự định trong 12 giờ sẽ hoàn thành xong công việc nên 1 giờ hai người làm chung được $\frac{1}{12}$ (công việc)

4 giờ đầu hai người làm chung được $4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$ (công việc)

10 giờ sau người thứ hai làm được $10 \cdot \frac{1}{x} = \frac{10}{x}$ (công việc)

Theo bài ra, ta có phương trình: $\frac{1}{3} + \frac{10}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{10}{x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{10 \cdot 3}{2} = 15$ (thỏa mãn)

Vậy nếu người thứ hai làm một mình thì 15 giờ sẽ hoàn thành xong công việc.

Bài 13. Ta có: 3 giờ 20 phút = $\frac{10}{3}$ giờ

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là x (giờ) ($x > 0$).

Trong một giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ (bê).

Trong một giờ cả hai vòi chảy được $1: \frac{10}{3} = \frac{3}{10}$ (bê), vậy trong một giờ vòi hai chảy một

mình được: $\frac{3}{10} - \frac{1}{x}$ (bê).

Khi vòi thứ nhất chảy 3 giờ và vòi thứ hai chảy 2 giờ thì được $\frac{4}{5}$ bể, ta có phương trình

$$\text{sau: } 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{x} \right) = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow x = 5 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy vòi một chảy một mình trong 5(giờ) thì đầy bể.

Trong một giờ vòi hai chảy một mình được: $\frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$ (bể).

Vậy vòi hai chảy một mình trong 10 giờ thì đầy bể.

Bài 14.

Gọi số cuốn sách ban đầu ở giá thứ nhất là x (cuốn) ($x \in \mathbb{N}^*$) thì số cuốn sách ở giá thứ hai ban đầu là $450 - x$ (cuốn).

Số cuốn sách lúc sau ở giá thứ nhất là $x - 50$ (cuốn).

Số cuốn sách lúc sau ở giá thứ hai là $450 - x + 50 = 500 - x$ (cuốn).

Vì nếu chuyển 50 cuốn từ giá thứ nhất sang giá thứ hai thì số sách ở giá thứ nhất bằng $\frac{5}{4}$

số sách ở giá thứ hai nên ta có phương trình: $x - 50 = \frac{5}{4}(500 - x) \Leftrightarrow x - 50 = 625 - \frac{5}{4}x$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}x = 675 \Leftrightarrow x = 300 \text{ (TMĐK).}$$

Vậy số sách ở giá thứ nhất ban đầu là 300 cuốn. Số sách ở giá thứ hai ban đầu là 150 cuốn.

Dạng 4: Các bài tập hình học.

Bài 1.

a) CMR $\triangle ABE \sim \triangle ADC$

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ADC$ có:

A chung

$$\begin{cases} \frac{AB}{AE} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ \frac{AD}{AC} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}$$

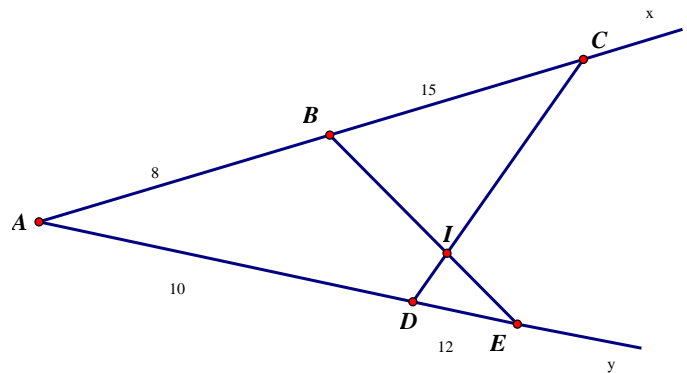
Vậy $\triangle ABE \sim \triangle ADC$ (c-g-c)

b) CMR $AB \cdot DC = AD \cdot BE$

Vì $\triangle ABE \sim \triangle ADC$ (theo câu a) $\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DC} \Rightarrow AB \cdot DC = AD \cdot BE$ (đpcm).

c) Tính DC biết $BE = 10\text{cm}$.

$$\text{Ta có } \frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DC} \Rightarrow \frac{8}{10} = \frac{10}{DC} \Rightarrow DC = 12,5(\text{cm})$$



d) CMR $IB.IE = ID.IC$

Xét $\triangle IBC$ và $\triangle IDE$

Ta có $BIC = DIE$ (đối đỉnh)

$BCI = IED$ (vì $\triangle ABE \sim \triangle ADC$)

Suy ra $\triangle IBC \sim \triangle IDE$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{IC}{IE} \Rightarrow IB.IE = ID.IC$$

Vậy $IB.IE = ID.IC$ (đpcm).

Bài 2.

a) Chứng minh: $\triangle AEC \sim \triangle AFB$

- Xét $\triangle AEC$ và $\triangle AFB$:

+ A chung

$$\left. \begin{array}{l} + CE \perp AB(gt) \Rightarrow \angle CEA = 90^\circ \\ + BF \perp AC(gt) \Rightarrow \angle BFA = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle CEA = \angle BFA = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle AEC \sim \triangle AFB$ (gg)

b) Chứng minh: $AE.AB = AF.AC$ rồi từ đó suy ra $\triangle AEF \sim \triangle ACB$

$$\text{- Ta có } \triangle AEC \sim \triangle AFB \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AB} \text{ (cạnh tương ứng tỉ lệ)} \Rightarrow AE.AB = AF.AC$$

- Xét $\triangle AEF$ và $\triangle ACB$:

+ A chung

$$+ AE.AB = AF.AC \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}$$

$\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ACB$ (c.g.c)

c) Chứng minh: $\triangle BDH \sim \triangle BFC$ và $BH.BF + CH.CE = BC^2$

- Xét $\triangle ABC$

+ BF và CE là đường cao (gt)

+ BF và CE cắt nhau tại H

$\Rightarrow H$ là trực tâm của $\triangle ABC$ (đ/l 3 đường cao trong tam giác)

$\Rightarrow AH$ là đường cao $\Rightarrow AD$ là đường cao $\Rightarrow AD \perp BC$

- Xét $\triangle BDH$ và $\triangle BFC$

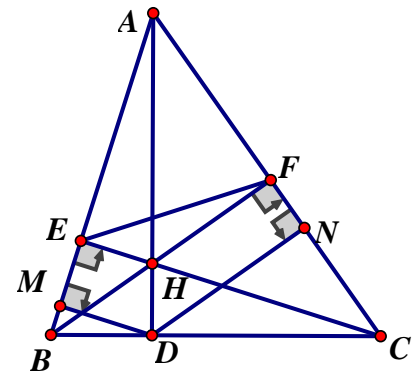
+ $\angle BDH = 90^\circ = \angle BFC$ ($BF \perp AC; AD \perp BC$)

+ B chung

$$\Rightarrow \triangle BDH \sim \triangle BFC \text{ (gg)} \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BD}{BF} \text{ (cạnh tương ứng tỉ lệ)}$$

$$\Rightarrow BH.BF = BD.BC$$

(1)



- Xét $\triangle CHD$ và $\triangle CBE$

+ $\angle CEB = \angle DHC = 90^\circ$ ($CE \perp AB; AD \perp BC$)

+ B chung

$\Rightarrow \triangle CHD \sim \triangle CBE$ (gg)

$\Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CD}{CE}$ (cạnh tương ứng)

$\Rightarrow CH \cdot CE = CD \cdot CB$ (2)

- Từ (1) và (2) ta có: $BH \cdot BF + CH \cdot CE = BD \cdot BC + CD \cdot BC = BC(BD + CD) = BC \cdot BC = BC^2$

Vậy $BH \cdot BF + CH \cdot CE = BC^2$.

d) Vẽ $DM \perp AB$ tại M , $DN \perp AC$ tại N . Chứng minh $MN \parallel EF$

- Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} +) CE \perp AB(gt) \\ MD \perp AB(gt) \end{array} \right\} \Rightarrow CE \parallel MD \Rightarrow HE \parallel MD \text{ (định lí từ vuông góc đến song song)}$$

$$\left. \begin{array}{l} +) BF \perp AC(gt) \\ ND \perp AC(gt) \end{array} \right\} \Rightarrow BF \parallel DN \Rightarrow HF \parallel DN$$

- Xét $\triangle AEH$ và $\triangle AMD$: $HE \parallel MD$ (cmt) $\Rightarrow \triangle AEH \sim \triangle AMD$ (định lí Talet)

$$\Rightarrow \frac{AE}{AM} = \frac{AH}{AD} \text{ (cạnh tương ứng tỉ lệ)}$$

- Xét $\triangle AFH$ và $\triangle AND$: $HF \parallel DN$ (cmt) $\Rightarrow \triangle AFH \sim \triangle AND$ (định lí Talet)

$$\Rightarrow \frac{AF}{AN} = \frac{AH}{AD} \text{ (cạnh tương ứng tỉ lệ)}$$

- Vậy $\frac{AF}{AN} = \frac{AH}{AD}; \frac{AE}{AM} = \frac{AH}{AD}$ thì $\frac{AF}{AN} = \frac{AE}{AM} \Rightarrow EF \parallel MN$ (định lí Talet đảo)

Bài 3.

a) Chứng minh $\triangle CHB \sim \triangle CBA$.

+ Ta có $BH \perp AC$ (gt) nên $\triangle BHC$ vuông tại H.

+ Xét $\triangle CHB$ và $\triangle CBA$ ta có:

$$\angle CHB = \angle CBA = 90^\circ$$

Chung C

$\Rightarrow \triangle CHB \sim \triangle CBA$ (g-g).

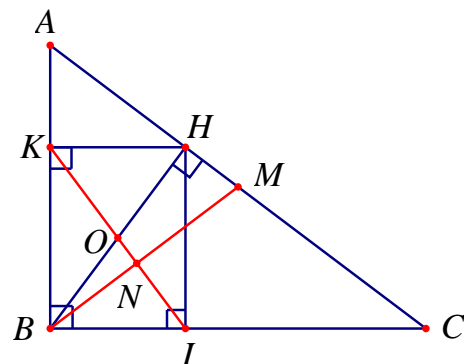
b) Chứng minh $AB^2 = AH \cdot AC$.

Xét $\triangle BHA$ và $\triangle CBA$ ta có:

$$\angle AHB = \angle ABC = 90^\circ$$

A chung

$\Rightarrow \triangle BHA \sim \triangle CBA$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB}$ (cặp cạnh tương ứng) $\Rightarrow AB^2 = AH \cdot AC$ (đpcm).



c) Tính độ dài AC, BH.

- Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle ABC$ vuông tại B ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 15^2 + 20^2 = 625$$

$$\Rightarrow AC = 25\text{cm}$$

- Ta có: $AB^2 = AH.AC$ (chứng minh trên)

$$\Rightarrow AH = \frac{AB^2}{AC} = \frac{15^2}{25} = 9\text{cm}$$

- Theo ý a) và ý b), ta có: $\triangle CHB \sim \triangle CBA$ và $\triangle BHA \sim \triangle CBA$ nên:

$$\triangle CHB \sim \triangle BHA$$

$$\Rightarrow \frac{BH}{AH} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow BH = \frac{BC.AH}{AB} = \frac{20.9}{15} = 12\text{cm}.$$

d) Chứng minh $\triangle BKI \sim \triangle BCA$.

- Ta có: $\triangle CHB \sim \triangle BHA$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \angle BCH = \angle ABH$ (1)

- Tứ giác BKHI có: $\angle B = \angle K = \hat{I} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow KI = BH \text{ (tính chất hình chữ nhật)}$$

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo BH và IK

$$\Rightarrow OB = OK \Rightarrow \triangle BOK \text{ cân tại O} \Rightarrow \angle BKI = \angle KBH \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \angle BKI = \angle BCH$

- Xét $\triangle BKI$ và $\triangle BCA$ có:

$$\angle BKI = \angle BCH$$

Chung $\angle B$

$$\Rightarrow \triangle BKI \sim \triangle BCA \text{ (g.g.)}$$

e) Tính diện tích $\triangle BKN$.

- Ta có: BM là trung tuyến của $\triangle ABC$ vuông tại B nên: $BM = AM$

$$\Rightarrow \triangle AMB \text{ cân tại M}$$

$$\Rightarrow \angle BAC = \angle ABM$$

Mà: $\angle BKI = \angle BCH$ (cmt) và: $\angle BAC + \angle BCH = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle BKI + \angle ABM = 90^\circ \text{ (cmt)}$$

Suy ra: $\triangle BKN$ vuông tại N.

- Ta có: $\angle BKI = \angle KBH = 12\text{cm}$

$$+ \triangle BKI \sim \triangle BCA \Rightarrow \frac{BK}{BC} = \frac{KI}{CA}$$

$$\Rightarrow BK = \frac{BC.KI}{CA} = \frac{20.12}{25} = 9,6\text{cm}$$

- Xét $\triangle BKN$ và $\triangle BCA$ có: $\angle BNK = \angle ABC = 90^\circ$

$$\angle BKN = \angle BCA \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle BKN \sim \triangle ACB \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{BKN}}{S_{ACB}} = \left(\frac{BK}{AC}\right)^2 = \left(\frac{9,6}{25}\right)^2 = \frac{92,16}{625}$$

$$\text{Mà: } S_{ACB} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 150 \text{cm}^2$$

$$\Rightarrow S_{BKN} = \frac{92,16}{625} \cdot S_{ACB} = \frac{92,16}{625} \cdot 150 = 22,1184 \text{cm}^2.$$

Bài 4.

a) Chứng minh $\triangle AIB \sim \triangle AEC$

Xét $\triangle AIB$ và $\triangle AEC$ có:

$\angle A$ là góc chung.

$$\angle AIB = \angle AEC = 90^\circ$$

Do đó: $\triangle AIB \sim \triangle AEC$ (g.g)

b) Chứng minh $\triangle AIE \sim \triangle ABC$

Do $\triangle AIB \sim \triangle AEC$

$$\Rightarrow \frac{AI}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AI}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

Xét $\triangle AIE$ và $\triangle ABC$ có:

$\angle A$ là góc chung.

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

Do đó: $\triangle AIE \sim \triangle ABC$ (c.g.c)

c) Chứng minh: $AB \cdot AE + AF \cdot CB = AC^2$

$$\text{Ta có: } \frac{AI}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AB \cdot AE = AC \cdot AI \quad (1)$$

Xét $\triangle AFC$ và $\triangle CIB$ có:

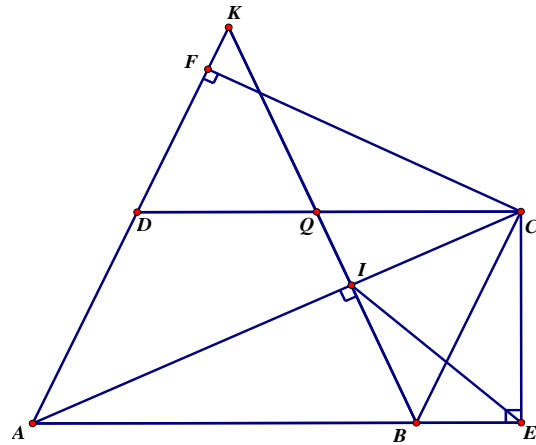
$\angle FAC = \angle ICB$ (so le trong).

$$\angle AFC = \angle CIB = 90^\circ$$

Do đó: $\triangle AFC \sim \triangle CIB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AF}{CI} = \frac{AC}{CB} \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{CI}{CB} \Rightarrow AF \cdot CB = AC \cdot CI \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AB \cdot AE + AF \cdot CB = AC \cdot AI + AC \cdot CI = AC \cdot (AI + CI) = AC^2$$



d) Chứng minh: $BI^2 = IK.IQ$

Xét tam giác ABI có: $AB \parallel QC \Rightarrow \frac{IQ}{IB} = \frac{IC}{IA}$ (3) (Theo hệ quả định lý Ta-let)

Xét tam giác BIC có: $BC \parallel AK \Rightarrow \frac{IC}{IA} = \frac{IB}{IK}$ (4) (Theo hệ quả định lý Ta-let)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \frac{IQ}{IB} = \frac{IB}{IK} \Rightarrow IB.IB = IK.IQ$

Vậy $BI^2 = IK.IQ$ (đpcm)

Bài 5.

a) Chứng minh rằng: $\triangle BDC$ đồng dạng với $\triangle EDB$ từ đó suy ra $BD^2 = DC.DE$.

Xét $\triangle BDC$ và $\triangle EDB$ có:

$\angle BDC$ chung

$$\angle BCD = \angle DBE = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle BDC$ đồng dạng với $\triangle EDB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{DE} = \frac{DC}{BD} \Rightarrow BD^2 = DC.DE$$

b) Tính DB, CE .

Ta có: $\triangle DCB$ vuông tại C

$$\Rightarrow BD^2 = BC^2 + DC^2 \Rightarrow BD = 5(\text{cm})$$

$$\text{Ta có } BD^2 = DC.DE \Rightarrow DE = \frac{BD^2}{DC} = \frac{25}{4}(\text{cm})$$

$$\text{Mà } DE = DC + CE \Rightarrow CE = DE - DC = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}(\text{cm})$$

c) Chứng minh được $CE \parallel BD$

Xét $\triangle EBO$ có: $IF \parallel BO \Rightarrow \frac{IF}{BO} = \frac{EI}{EO}$ (hệ quả định lý Talet)

Xét $\triangle EDO$ có: $IC \parallel DO \Rightarrow \frac{IC}{DO} = \frac{EI}{EO}$ (hệ quả định lý Talet)

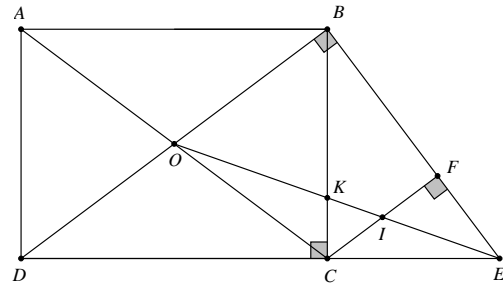
$$\Rightarrow \frac{IF}{BO} = \frac{IC}{DO}$$

Mà $BO = DO$ ($ABCD$ là hình chữ nhật) $\Rightarrow IF = IC$

$\Rightarrow I$ là trung điểm của đoạn CF .

d) Chứng minh rằng ba điểm D, K, F thẳng hàng.

Xét $\triangle BOK$ có $CI \parallel BO \Rightarrow \frac{IK}{OK} = \frac{CI}{OB}$ (hệ quả đl Talet)



$$\text{Mà } IC = IF; OD = OB \Rightarrow \frac{OK}{IK} = \frac{OD}{IF}$$

$$\text{Xét } \triangle KOD \text{ và } \triangle KIF \text{ có: } \angle DOK = \angle FIK (BD \parallel CF); \frac{OK}{IK} = \frac{OD}{IF}$$

$\Rightarrow \triangle KOD$ đồng dạng $\triangle KIF$ (c.g.c)

$\Rightarrow \angle OKD = \angle IKF \Rightarrow \angle OKD + \angle DKE = \angle IKF + \angle DKE \Rightarrow \angle DKF = 180^\circ \Rightarrow D, K, F$ thẳng hàng.

Bài 6.

a) Chứng minh $\triangle ADB \sim \triangle AEC$ và $\triangle AED \sim \triangle ACB$

- Xét $\triangle ADB$ và $\triangle AEC$, có:

$\angle BAD$ chung

$$\angle BDA = \angle CEA = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle ADB \sim \triangle AEC$ (g-g)

- Vì $\triangle ADB \sim \triangle AEC$ (chứng minh trên)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

- Xét $\triangle AED$ và $\triangle ACB$, có

$\angle BAD$ chung

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \text{ (chứng minh trên)}$$

$\Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ACB$ (c-g-c)

b) Chứng minh: $HE \cdot HC = HD \cdot HB$

- Xét $\triangle BHE$ và $\triangle CHD$, có

$$\angle BHE = \angle CHD \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\angle BEH = \angle CDH = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle BHE \sim \triangle CHD$ (g-g)

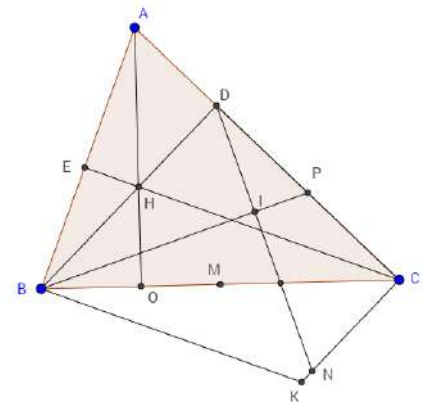
$$\Rightarrow \frac{HB}{HC} = \frac{HE}{HD} \text{ (tính chất)}$$

$$\Rightarrow HE \cdot HC = HD \cdot HB$$

c) Chứng minh: H, M, K thẳng hàng và $\angle AED = \angle ACB$

- Ta có $\left. \begin{array}{l} BD \perp AC \text{ (gt)} \\ CK \perp AC \text{ (gt)} \end{array} \right\} \Rightarrow BD \parallel CK \text{ hay } BH \parallel CK \text{ (1) (từ } \perp \text{ đến } \parallel)$

- Ta có $\left. \begin{array}{l} CE \perp AB \text{ (gt)} \\ BK \perp AB \text{ (gt)} \end{array} \right\} \Rightarrow CE \parallel BK \text{ hay } CH \parallel BK \text{ (2) (từ } \perp \text{ đến } \parallel)$



- Từ (1) và (2) $\Rightarrow BHCK$ là hình bình hành

$\Rightarrow BC$ và HK cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

Mà M là trung điểm của BC

$\Rightarrow M$ cũng là trung điểm của HK

Hay H, M, K thẳng hàng

d) AH cắt BC tại O . Chứng minh $BE.BA + CD.CA = BC^2$

- Xét $\triangle BAO$ và $\triangle BCE$, có

$\angle ABC$ chung

$$\angle BEC = \angle AOB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle BAO \sim \triangle BCE (g.g) \Rightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{BO}{BE} (t/c) \Rightarrow BA.BE = BO.BC (3)$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có: } \triangle CDB \sim \triangle COA (g-g) \Rightarrow \frac{CD}{CO} = \frac{CB}{CA} \Rightarrow CD.CA = BC.CO (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow BE.BA + CD.CA = BC.BO + BC.CO = BC.(BO + CO) = BC.BC$$

$$\Rightarrow BE.BA + CD.CA = BC^2 (\text{đpcm}).$$

$$\text{e) Chứng minh: } \frac{HO}{AO} + \frac{HD}{BD} + \frac{HE}{CE} = 1$$

$$\text{- Ta có: } \left. \begin{array}{l} S_{\triangle BHC} = \frac{1}{2} HO.BC \\ S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AO.BC \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{S_{\triangle BHC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} HO.BC}{\frac{1}{2} AO.BC} = \frac{HO}{AO}$$

$$\text{- CMTT: } \frac{S_{\triangle AHC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} HD.AC}{\frac{1}{2} BD.AC} = \frac{HD}{BD}$$

$$\text{Suy ra } \frac{S_{\triangle AHB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} HE.AB}{\frac{1}{2} CE.AB} = \frac{HE}{CE}$$

$$\Rightarrow \frac{HO}{AO} + \frac{HD}{BD} + \frac{HE}{CE} = \frac{S_{\triangle BHC}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle AHC}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle AHB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle BHC} + S_{\triangle AHC} + S_{\triangle AHB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}}$$

$$\Rightarrow \frac{HO}{AO} + \frac{HD}{BD} + \frac{HE}{CE} = 1 (\text{đpcm})$$

f) Chứng minh H là giao điểm của đường phân giác của tam giác ODE

- Ta có $\triangle AED \sim \triangle ACB$ (cmt) $\Rightarrow \angle AED = \angle ACB$ (2 góc tương ứng)..

$$\text{- Do } BA.BE = BO.BC (\text{cmt}) \Rightarrow \frac{BE}{BC} = \frac{BO}{BA}$$

- Xét $\triangle BEO$ và $\triangle BCA$, có:

ABC chung

$$\frac{BE}{BC} = \frac{BO}{BA} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle BEO \sim \triangle BCA \text{ (g.g)} \Rightarrow \angle BEO = \angle ACB \text{ (6)}$$

Từ (5) và (6) $\Rightarrow \angle AED = \angle BEO$

$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} \angle AED + \angle DEC = 90^\circ \\ \angle BEO + \angle OEC = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle DEC = \angle OEC \Rightarrow EH \text{ là phân giác của } \angle DOE$$

CMTT: OH là phân giác của $\angle EOD$

Vậy H là giao điểm của đường phân giác của tam giác ODE

g) Cho góc $\angle ACB = 45^\circ$, Gọi P là trung điểm của DC . Từ D kẻ đường thẳng vuông góc với BP tại I và cắt CK tại N . Tìm tỉ số diện tích của tứ giác $CPIN$ và diện tích tam giác DCN

- Xét $\triangle DIP$ và $\triangle DCN$, có:

Có $\angle PDI$ chung

$$\Rightarrow \triangle DIP \sim \triangle DCN \text{ (g - g)}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle DIP}}{S_{\triangle DCN}} = \left(\frac{DP}{DC} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{Ta có: } \frac{S_{CPIN}}{S_{\triangle DCN}} = \frac{S_{\triangle DCN} - S_{\triangle DIP}}{S_{\triangle DCN}} = 1 - \frac{S_{\triangle DIP}}{S_{\triangle DCN}} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Vậy tỉ số diện tích của tứ giác $CPIN$ và diện tích tam giác DCN bằng $\frac{3}{4}$.

h) Tam giác ABC có điều kiện gì thì tứ giác $BHCK$ là hình thoi? Hình chữ nhật?

- Giả sử $BHCK$ là hình thoi

$$\Rightarrow \angle HBC = \angle HCB \text{ mà } \triangle ADB \sim \triangle AEC \Rightarrow \angle ABD = \angle ACE$$

$$\Rightarrow \angle HBC + \angle ABD = \angle HCB + \angle ACE$$

$$\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } A$$

Vậy $\triangle ABC$ cân tại A thì $BHCK$ là hình thoi

- Giả sử $BHCK$ là hình chữ nhật

$$\Rightarrow \angle BHC = 90^\circ \Rightarrow \angle EHD = 90^\circ$$

Xét tứ giác: $AEHD$, có $\angle EHD = 90^\circ$, $\angle AEH = 90^\circ$, $\angle ADH = 90^\circ$

$$\Rightarrow AEHD \text{ là hình chữ nhật}$$

$$\Rightarrow \angle BAC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại } A$$

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A thì $BHCK$ là hình thoi.

Bài 7.

a) Xét ΔCDI và ΔCFK có:

$$\widehat{CDI} = \widehat{CFK} = 90^\circ$$

$\widehat{CDI} = \widehat{KCF}$ (vì CK là tia phân giác góc FCM)

Do đó $\Delta CDI \sim \Delta CFK$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CD}{CF} = \frac{CI}{CK} \quad (1)$$

Xét ΔCDF có CI là đường phân giác của góc ACB nên theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta có:

$$\frac{CD}{CF} = \frac{DI}{FI} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{CD}{CF} = \frac{CI}{CK} = \frac{DI}{FI}$

Vì $\Delta CDI \sim \Delta CFK$ nên $\widehat{CID} = \widehat{CKF}$, mà $\widehat{CID} = \widehat{KIF}$. Do đó $\widehat{CKF} = \widehat{KIF}$
 $\Rightarrow \Delta FKI$ cân tại F $\Rightarrow FI = FK$.

b) Tứ giác AEMF có $\widehat{AEM} = 90^\circ$ (Vì $ME \perp AB$)

$\widehat{EAF} = 90^\circ$ (Vì ΔABC vuông tại A); $\widehat{AFM} = 90^\circ$ (Vì $MF \perp AC$)

Do đó tứ giác AEMF là hình chữ nhật.

c) Xét ΔAHC và ΔMFC có:

\widehat{MFC} chung; $\widehat{AHC} = \widehat{MFC} = 90^\circ$

Do đó $\Delta AHC \sim \Delta MFC$ (g.g)

Xét ΔABH và ΔMBE có: \widehat{B} chung; $\widehat{AHB} = \widehat{MEB} = 90^\circ$

Do đó $\Delta ABH \sim \Delta MBE$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AH}{ME} = \frac{BH}{BE} \Rightarrow AH \cdot BE = BH \cdot ME$$

d) Vì $\Delta AHC \sim \Delta MFC$ nên $\frac{AH}{MF} = \frac{AC}{MC} \Rightarrow MF \cdot AC = AH \cdot MC$ (3)

Vì $\Delta ABH \sim \Delta MBE$ nên $\frac{AB}{MB} = \frac{AH}{ME} \Rightarrow ME \cdot AB = AH \cdot MB$ (4)

Vì AM là đường trung tuyến của ΔABC nên M là trung điểm của BC

$$\Rightarrow BM = MC$$
 (5)

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow ME \cdot AB = AH \cdot MB$

e) Xét ΔABC có M là trung điểm của BC; $ME \parallel AC$ (Vì cùng vuông góc với AB).

$\Rightarrow M$ là trung điểm của AB.

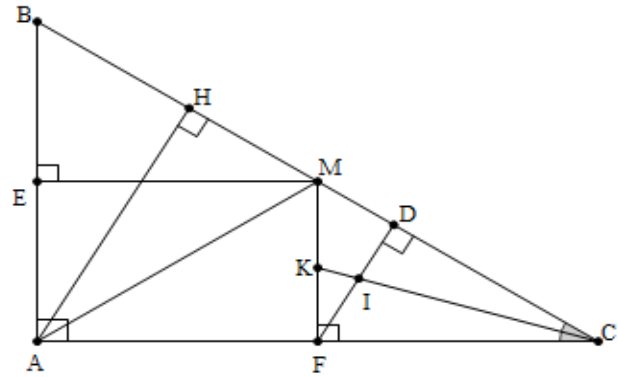
$$\Rightarrow AB = 2AE$$
 (6).

Xét ΔABH và ΔCBA có: \widehat{B} chung; $\widehat{AHB} = \widehat{BAC} = 90^\circ$

Do đó $\Delta ABH \sim \Delta CBA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH \cdot BC$$
 (7)

Từ (6), (7) $\Rightarrow BH \cdot BC = (2AE)^2$ hay $BH \cdot BC = 4AE^2$



Bài 8.a) Chứng minh $\Delta CAI \sim \Delta CBN$ Ta có $\angle ACI + \angle ICB = 90^\circ$ (do ΔABC vuông tại C)

$$\angle ICB + \angle BCN = 90^\circ \text{ (do } CI \perp MN \text{)}$$

Nên $\angle ACI = \angle BCN$ (1)Ta lại có $\angle CAB + \angle CBA = 90^\circ$ (do ΔABC vuông tại C)

$$\angle CBA + \angle CBN = 90^\circ \text{ (do } By \perp AB \text{)}$$

Nên $\angle CAB = \angle CBN$ (2)Từ (1) và (2) suy ra $\Delta CAI \sim \Delta CBN$ (g.g)b) Chứng minh $AB \cdot NC = NI \cdot CB$.Xét ΔCAB và ΔCIN , ta có:

$$\begin{cases} \angle ACB = \angle ICN = 90^\circ \\ \frac{CA}{CB} = \frac{CI}{CN} \text{ (do } \Delta CAI \sim \Delta CBN \text{)} \end{cases}$$

Suy ra $\Delta CAB \sim \Delta CIN$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \frac{AB}{IN} = \frac{CB}{CN}$$

Vậy $AB \cdot NC = NI \cdot CB$ c) Chứng minh góc MIN là góc vuông.Ta có $\Delta CAB \sim \Delta CIN$ (cmt)

$$\Rightarrow \angle CAB = \angle CIN$$

$$\Rightarrow \angle CIM = \angle MAC$$

$$\text{Mà } \angle CAB + \angle MAC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle CIN + \angle CIM = 90^\circ$$

Hay góc MIN là góc vuôngd) Tìm vị trí của điểm I để diện tích IMN gấp hai lần diện tích tam giác ABC .

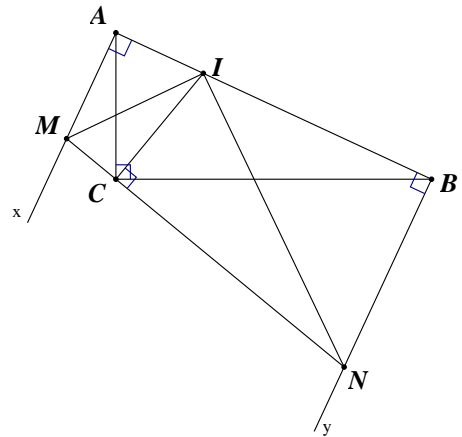
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB$$

$$S_{\Delta IMN} = \frac{1}{2} IM \cdot IN = \frac{1}{2} IC \cdot MN$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta IMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{IM \cdot IN}{CA \cdot CB} = \frac{IC \cdot MN}{CA \cdot CB}$$

$$S_{\Delta IMN} = 2 \cdot S_{\Delta ABC}$$

$$\Rightarrow IM \cdot IN = 2CA \cdot CB$$

Suy ra I là trung điểm AB .

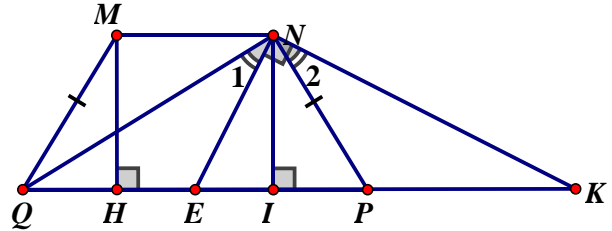
Bài 9.a) Tính IP .Xét $\triangle NIP$ có $\angle NIP = 90^\circ$ (NI là đường cao):

$$NP^2 = NI^2 + IP^2 \text{ (Định lý Py - ta - go)}$$

$$\Leftrightarrow 15^2 = 12^2 + IP^2$$

$$\Rightarrow IP^2 = 225 - 144 = 81$$

$$\Rightarrow IP = 9(\text{cm})$$

b) Chứng minh $QN \perp NP$

$$\text{Có } QP = QI + IP = 16 + 9 = 25(\text{cm})$$

Xét $\triangle QNI$ có $\angle QIN = 90^\circ$ (NI là đường cao):

$$NQ^2 = NI^2 + IQ^2 \text{ (Định lý Py - ta - go)}$$

$$\Leftrightarrow QN^2 = 12^2 + 16^2$$

$$\Rightarrow QN^2 = 144 + 256 = 400$$

$$\Rightarrow QN = 20(\text{cm})$$

Xét $\triangle QNP$ có: $QP^2 = QN^2 + NP^2$ ($25^2 = 20^2 + 15^2$)

$$\Rightarrow \triangle QNP \text{ vuông tại } N \Rightarrow QN \perp NP$$

c) Tính diện tích hình thang $MNPQ$ Kẻ $MH \perp QP$

$$\text{Có } IH = QP - QH - IP = 25 - 9 - 9 = 7(\text{cm})$$

Xét $\triangle QMH$ và $\triangle PNI$ có:

$$MQ = NP \text{ (} MNPQ \text{ là hình thang cân)}$$

$$\angle MHQ = \angle NIP (= 90^\circ)$$

$$\angle MQH = \angle NPI \text{ (} MNPQ \text{ là hình thang cân)}$$

$$\Rightarrow \triangle QMH = \triangle PNI \text{ (ch - gn)}$$

$$\Rightarrow QH = IP = 9\text{cm} \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

Xét tứ giác $MNIH$ có $MN \parallel IH; MH \parallel NI (\perp QP) \Rightarrow$ tứ giác $MNIH$ là hình bình hành

$$\Rightarrow MN = IH = 7(\text{cm})$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{(MN + QP) \cdot NI}{2} = \frac{(7 + 25) \cdot 12}{2} = 192(\text{cm}^2)$$

d) Gọi E là trung điểm của PQ . Đường thẳng vuông góc với EN tại N cắt PQ tại K . Chứng minh rằng $KN^2 = KP \cdot KQ$.Xét $\triangle QNP$ vuông tại N (cmt) có E là trung điểm của QP

$$\Rightarrow NE = QE = PE = \frac{1}{2}QP \text{ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông)}$$

$$\Rightarrow \Delta QNE \text{ cân tại } E$$

$$\Rightarrow EQN = N_1 \text{ (tính chất tam giác cân) (1)}$$

$$\text{Mặt khác, } \left. \begin{array}{l} N_1 + ENP = 90^\circ \\ N_2 + ENP = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow N_1 = N_2 \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow EQN = N_2$$

Xét ΔKNQ và ΔKPN có:

K chung

$$EQN = N_2$$

$$\Rightarrow \Delta KNQ \sim \Delta KPN (g.g) \Rightarrow \frac{KN}{KP} = \frac{KQ}{KN} \Rightarrow KN^2 = KP.KQ \text{ (đpcm).}$$

Bài 10:

* Ta có $AH \parallel OM$ (cùng vuông góc với BC)

$MN \parallel AB$ (chứng minh được MN là đường trung bình của ΔABC)

$$\Rightarrow \angle BAH = \angle OMN \text{ (góc có cạnh tương ứng song song)}$$

* Chứng minh tương tự ta được $\angle ABH = \angle ONM$

* Xét ΔABH và ΔMNO có $\angle BAH = \angle OMN$; $\angle ABH = \angle ONM$ nên ΔABH đồng dạng với ΔMNO

$$\Rightarrow \frac{AH}{OM} = \frac{AB}{MN}, \text{ mà } \frac{AB}{MN} = 2 \text{ (tc đường trung bình MN)} \Rightarrow \frac{AH}{OM} = 2$$

* Gọi giao điểm của HO với AM là G' , ta sẽ chứng minh G' trùng với G .

- Thật vậy ta có $\angle HAG' = \angle G'MO$ ($AH \parallel OM$); $\angle AG'H = \angle MG'O$ (đối đỉnh) nên $\Delta AHG'$ đồng

$$\text{dạng với } \Delta MOG' \Rightarrow \frac{AG'}{G'M} = \frac{AH}{OM} = \frac{HG'}{G'O} = 2$$

$\Rightarrow G'$ là trọng tâm ΔABC , hay $G' \equiv G$. Khi đó có H, G, O thẳng hàng và $HG = 2GO$

Bài 11.

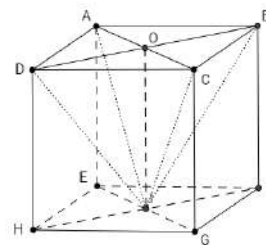
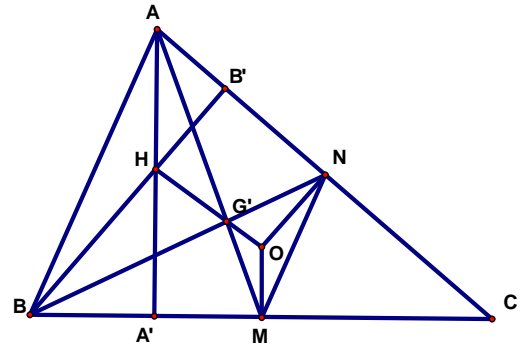
a) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật.

Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2.S_d = (12+9).2.10 + 2.12.9 = 636 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Thể tích hình hộp chữ nhật là:

$$V = AB.AD.AE = 12.9.10 = 1080 \text{ (cm}^3\text{)}.$$



$AB = 12\text{cm}$
 $BC = 9\text{cm}$
 $AE = 10\text{cm}$

b) Gọi I và O lần lượt là tâm đối xứng của hình chữ nhật $EFGH$ và $ABCD$. Đường thẳng OI song song với những mặt phẳng nào?

Ta có:

- $ABFE$ là hình chữ nhật suy ra $AE // BF$ và $AE = BF$ (1)

- $BCFG$ là hình chữ nhật suy ra $BF // CG$ và $BF = CG$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AE // CG$ và $AE = CG$.

Do đó $ABGC$ là hình bình hành.

Ta có: $OA = OC$ và $EI = IG$

$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của hình bình hành $AEGC$.

Nên $OI // AE // CG$.

Mà $AE \subset mp(AEHD)$

Do đó $OI // mp(AEHD)$

Tương tự: $OI // mp(BCGF), OI // mp(AEFB), OI // mp(DCGH)$

c) Chứng tỏ hình chóp $I.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau nhưng không phải hình chóp đều.

Ta có: $OI // AE; AE \perp AC \Rightarrow IO \perp AC$.

Tương tự ta có: $IO \perp OB$.

Xét $\triangle IOC$ và $\triangle IOB$ có:

IO chung

$\angle IOC = \angle IOB = 90^\circ$

$OC = OB$ (Do $ABCD$ là hình chữ nhật)

Suy ra $\triangle IOC = \triangle IOB \Rightarrow IC = IB$.

Tương tự: $IA = IB = IC = ID$

Suy ra hình chóp $I.ABCD$ có các mặt bên là tam giác cân.

Mà $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB \neq BC$

Nên hình chóp $I.ABCD$ không là hình chóp đều.

d) Tính diện tích xung quanh của hình chóp $I.ABCD$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

Suy ra $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15(cm)$

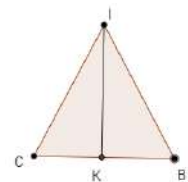
$\Rightarrow OC = OA = \frac{AC}{2} = 7,5(cm)$.

Xét $\triangle OIC$ vuông tại O : $IC^2 = OC^2 + OI^2$

Suy ra $IC = \sqrt{OC^2 + OI^2} = \sqrt{7,5^2 + 10^2} = 12,5(cm)$.

Kẻ $IK \perp CB$.

Xét $\triangle ICB$ cân tại I có IK là đường cao suy ra IK là đường trung tuyến.



Nên $CH = HB = \frac{CB}{2} = \frac{9}{2} = 4,5 (cm)$.

Xét ΔICK vuông tại I : $IK^2 = CI^2 - CH^2 \Rightarrow IK = \sqrt{12,5^2 - 4,5^2} \approx 11,66 (cm)$.

Diện tích xung quanh của hình chóp $I.ABCD$ là:

$$S_{xq} = 4.S_{\Delta IBC} = 4 \cdot \frac{1}{2} IH \cdot BC = 2 \cdot 11,66 \cdot 9 = 209,88 (cm^2).$$

Dạng 5. Một số bài tập nâng cao.

Bài 1.

1) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

2) $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

Ta chứng minh: $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Ta chứng minh: $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

Theo trên ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 3ab + 3bc + 3ca$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

3) $(a+b-c)^2 \geq 4a(b-c)$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2a(b-c) + (b-c)^2 \geq 4a(b-c)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a(b-c) + (b-c)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b+c)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

4a) $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} (a, b > 0)$

Dùng phép biến đổi tương đương và $a, b > 0$ ta có:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} \Leftrightarrow x^2b(a+b) + y^2a(a+b) \geq (x+y)^2 ab$$

$$\Leftrightarrow x^2ab + x^2b^2 + y^2a^2 + y^2ab \geq x^2ab + 2xyab + y^2ab$$

$$\Leftrightarrow x^2b^2 - 2xyab + y^2a^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow bx = ay \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

$$4b) \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c} \quad (a, b, c > 0)$$

$$\text{Ta có} \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \right) + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c} \quad (a, b, c > 0)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

$$4c) (ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 \leq a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2$$

$$\Leftrightarrow 2abxy \leq a^2y^2 + b^2x^2$$

$$\Leftrightarrow a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

5) Với a, b, c là các số thực thỏa mãn $a+b+c+ab+bc+ca=6$. Chứng minh $a^2+b^2+c^2 \geq 3$

$$\text{Từ } (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca = 6 - (a+b+c) \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 + 3(a+b+c) - 18 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c+6)(a+b+c-3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c \geq 3 \\ a+b+c \leq -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq \frac{3^2}{3} = 3$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow a=b=c=1$$

Bài 2.

$$\text{Ta có: } 10a^2 - 3b^2 + ab = 0 \Leftrightarrow 10a^2 + 6ab - 5ab - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow 2a(5a+3b) - b(5a+3b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a-b)(5a+3b) = 0 \Leftrightarrow 2a-b=0 \text{ hoặc } 5a+3b=0$$

$\Leftrightarrow 2a = b$ hoặc $5a = -3b$ (không thỏa mãn do $b > a > 0$)

Thay $b = 2a$ vào biểu thức A, ta được:

$$A = \frac{2a - 2a}{3a - 2a} + \frac{5 \cdot 2a - a}{3a + 2a} = \frac{0}{a} + \frac{9a}{5a} = 0 + \frac{9}{5} = \frac{9}{5}$$

Vậy $A = \frac{9}{5}$

Bài 3.

Từ đề bài: $(x + y)^2 = (x - 2) \cdot (y + 2)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = xy + 2x - 2y - 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 - 2x + 2y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x + 4y + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 4y + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 + (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 0 \quad (*)$$

$$\forall i \begin{cases} (x + y)^2 \geq 0 \forall xy \\ (x - 2)^2 \geq 0 \forall x \\ (y + 2)^2 \geq 0 \forall y \end{cases} \text{ nên } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Do đó: $A = 2^2 + (-2)^2 = 8$

Bài 4. Tìm GTLN, GTNN (nếu có) của các biểu thức

$$1) A = \frac{6}{4x^2 + 4x + 3} = \frac{6}{4\left(x^2 + x + \frac{3}{4}\right)} = \frac{3}{2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

Ta có: $2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \forall x \Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \geq 1, \forall x \Leftrightarrow \frac{3}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1} \leq 3, \forall x \Leftrightarrow A \leq 3$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Vậy GTNN của A là 3 tại $x = -\frac{1}{2}$

$$2) B = \frac{-4}{6 + 4x + x^2} = \frac{-4}{x^2 + 4x + 4 + 2} = \frac{-4}{(x + 2)^2 + 2}$$

Ta có: $(x + 2)^2 \geq 0, \forall x$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + 2 \geq 2, \forall x \Leftrightarrow (x + 2)^2 + 2 \geq 2, \forall x \Leftrightarrow \frac{-4}{(x + 2)^2 + 2} \geq -2, \forall x \Leftrightarrow B \geq -2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Vậy GTNN của B là -2 tại $x = -2$

$$3) C = \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 2x + 1} (x \neq 1)$$

$$= \frac{(x^2 - 2x + 1) - x + 1 + 1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - (x-1) + 1}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{x-1} = y \Rightarrow C = 1 - y + y^2 = \left(y^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\text{Ta có: } \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \forall y \Leftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \forall y$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 3 (TM)$$

Vậy GTNN của C là $\frac{3}{4}$ tại $x = 3$

$$4) D = x + \frac{1}{x} = \frac{x}{16} + \frac{1}{x} + \frac{15x}{16}$$

Áp dụng bất đẳng thức cô - si cho hai số dương $\frac{x}{16}$ và $\frac{1}{x}$ ta có:

$$D = x + \frac{1}{x} = \frac{x}{16} + \frac{1}{x} + \frac{15x}{16} \geq 2\sqrt{\frac{x}{16} \cdot \frac{1}{x}} + \frac{15x}{16} = 2\sqrt{\frac{1}{16}} + \frac{15x}{16} = \frac{1}{2} + \frac{15x}{16}$$

$$\text{Do } x \geq 4 \text{ nên } \frac{15x}{16} \geq \frac{15 \cdot 4}{16} = \frac{15}{4} \text{ Suy ra } D \geq \frac{1}{2} + \frac{15}{4} = \frac{17}{4}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{x}{16} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 (TM) \\ x = -4 (KTM) \end{cases}$$

Vậy GTNN của D là $\frac{17}{4}$ tại $x = 4$

$$5) Q = \frac{12x + 34}{x^2 + 2} = \frac{x^2 + 12x + 36 - x^2 - 2}{x^2 + 2} = \frac{(x+6)^2}{x^2 + 2} - \frac{x^2 + 2}{x^2 + 2} = \frac{(x+6)^2}{x^2 + 2} - 1$$

$$\text{Ta có: } \frac{(x+6)^2}{x^2 + 2} \geq 0 \forall x \Leftrightarrow \frac{(x+6)^2}{x^2 + 2} - 1 \geq -1 \forall x$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x+6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$$

Vậy GTNN của Q là -1 tại $x = -6$

$$6) E = |x-1| + 2|x-2| + |x-3| + 4$$

$$E \geq |x-1+3-x| + 2|x-2| + 4 = 2|x-2| + 6 \geq 6$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \begin{cases} (x-1)(3-x) \geq 0 \\ x-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy GTNN của E là 6 tại $x = 2$

Bài 5.

1) Cho $a > 0; b > 0; c > 0$ và $a + b + c = 6$. Tìm GTNN của $Q = \frac{a^3 + b^3}{ab} + \frac{b^3 + c^3}{bc} + \frac{c^3 + a^3}{ca}$

$$Q = \frac{a^3 + b^3}{ab} + \frac{b^3 + c^3}{bc} + \frac{c^3 + a^3}{ca} = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{b} + \frac{c^2}{a} + \frac{a^2}{c}$$

$$= \left(\frac{a^2}{b} + b \right) + \left(\frac{b^2}{a} + a \right) + \left(\frac{b^2}{c} + c \right) + \left(\frac{c^2}{b} + b \right) + \left(\frac{c^2}{a} + a \right) + \left(\frac{a^2}{c} + c \right) - 2(a + b + c)$$

$$\text{Vì } a > 0, b > 0, c > 0 \Rightarrow \frac{a^2}{b} > 0, \frac{b^2}{a} > 0, \frac{b^2}{c} > 0, \frac{c^2}{b} > 0, \frac{c^2}{a} > 0, \frac{a^2}{c} > 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương $\frac{a^2}{b}$ và b có: $\frac{a^2}{b} + b \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b} \cdot b} = 2\sqrt{a^2} = 2a$.

Hoàn toàn tương tự ta có: $\frac{b^2}{a} + a \geq 2b; \frac{b^2}{c} + c \geq 2b; \frac{c^2}{b} + b \geq 2c; \frac{c^2}{a} + a \geq 2c; \frac{a^2}{c} + c \geq 2a$.

Suy ra $Q \geq 4(a + b + c) - 2(a + b + c) = 2(a + b + c) = 2 \cdot 6 = 12$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{b} = b \Leftrightarrow a = b \\ \dots \\ \frac{a^2}{c} = c \Leftrightarrow a = c \\ a + b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 2. \text{ Khi đó } Q \text{ đạt GTNN bằng } 12.$$

2) $A = x^2 + y^2 - xy - x + 4y + 600$

$$\Leftrightarrow 4A = 4x^2 + 4y^2 - 4xy - 4x + 16y + 2400$$

$$\Leftrightarrow 4A = (4x^2 - 4xy + y^2) - (4x - 2y) + (3y^2 + 14y) + 2400$$

$$\Leftrightarrow 4A = \left[(2x - y)^2 - 2(2x - y) + 1 \right] + 3 \left(y^2 + 2 \cdot \frac{7}{3}y + \frac{49}{9} \right) + \left(2400 - 1 - \frac{49}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow 4A = (2x - y - 1)^2 + 3 \left(y + \frac{7}{3} \right)^2 + \frac{7148}{3} \geq \frac{7148}{3}$$

$$\text{Khi đó } A \geq \frac{7148}{3} : 4 \Leftrightarrow A \geq \frac{1787}{3}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ y + \frac{7}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2}{3} \\ y = \frac{-7}{3} \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $\frac{1787}{3}$ khi và chỉ khi $x = \frac{-2}{3}; y = \frac{-7}{3}$

Bài 6. $\frac{mx+5}{12} + \frac{x-1}{2} > 2$ (1) và $(x^2+1)(x+22) < 0$ (2)

Ta có: $x^2+1 \geq 1, \forall x \Rightarrow x^2+1 > 0, \forall x$

$$(2) \Leftrightarrow x+22 < 0 \Leftrightarrow x < -22$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{mx+5}{12} + \frac{6(x-1)}{12} > \frac{24}{12}$$

$$\Leftrightarrow mx+5+6x-6 > 24$$

$$\Leftrightarrow mx+6x > 24-5+6$$

$$\Leftrightarrow (m+6)x > 25$$

- Trường hợp 1: $m+6 > 0 \Leftrightarrow m > -6 \Leftrightarrow x > \frac{25}{m+6}$

- Trường hợp 2: $m+6 < 0 \Leftrightarrow m < -6 \Leftrightarrow x < \frac{25}{m+6}$

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow \begin{cases} m < -6 \\ \frac{25}{m+6} = -22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -6 \\ -22(m+6) = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -6 \\ m = \frac{-157}{22} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{-157}{22}$$

Vậy với $m = \frac{-157}{22}$ thì hai bất phương trình đã cho tương đương.