Trung tâm Bồi dưỡng Văn Hóa **ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10**

Hà Nội – Amsterdam **Môn: TOÁN**

Thi thử vào lớp 10 ngày 21/4/2021 ***(Dành cho mọi thí sinh)***

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1 (2,5 điểm).

Cho biểu thức $A=\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$, với $x>0,\ x\neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $A=-3\sqrt{x}-3$.

c) Khi $x=7+4\sqrt{3}$ thì giá trị của $A=a\sqrt{b},\ a\in\mathbb{N},\ b\in\mathbb{N}$. Tìm a và b.

Câu 2 (2,0 điểm).

Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình:
Một xe lửa đi từ Huế ra Hà Nội. Sau đó 24 phút, một xe lừa khác đi từ Hà Nội vào Huế với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe lửa thứ nhất là 15 km/h. Hai xe gặp nhau tại một ga cách Hà Nội 345 km. Tìm vận tốc của mỗi xe, giả thiết rằng quãng đường sắt Huế - Hà Nội dài 645 km.

Câu 3 (3,0 điểm).

1. Cho hàm số $y=kx^2$, biết đồ thị hàm số đi qua $A(-2;-8)$. Tìm k và vẽ đồ thị hàm số với k vừa tìm được.

2. Cho phương trình $x^2+2(m+1)x+m^2=0\ (1)$.

a) Giải phương trình với $m=5$.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng -2.

Câu 4 (3,5 điểm).

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$ và tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). AC cắt OM tại E; MB cắt nửa đường tròn (O) tại $D,\ D\neq B$.

a) Chứng minh $AMDE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Tia BC cắt Ax tại N. Chứng minh $MN^2=MD\cdot MB$.

c) Vẽ CH vuông góc với $AB,\ H\in AB$. Chứng minh rằng MB đi qua trung điểm của CH.

d) Lấy P là điểm đối xứng của M qua C và K là hình chiếu vuông góc của A trên PB. Gọi Q và R lần lượt là trung điểm các đoạn MK và PD. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác CQR tiếp xúc với đường tròn tâm O đường kính AB.

Câu 5 (0,5 điểm).

Cho $a,\ b$ là các số thực dương thỏa mãn $a-b=\frac{a}{b}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+b}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{ab-a-b}\right)+\frac{1}{ab-a-b}\geq\frac{9}{ab}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

------------HẾT------------

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1 (2,5 điểm).

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$, với $x>0,\ x\neq 1.$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $A=-3\sqrt{x}-3$.

c) Khi $x=7+4\sqrt{3}$ thì giá trị của $A=a\sqrt{b},\ a\in\mathbb{N},\ b\in\mathbb{N}$. Tìm a và b.

Lời giải

a) Với $x>0$ và $x\neq 1,$ ta có:

$$A=\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)=\frac{(x-1)^2}{4x}\cdot\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2-\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\frac{(x-1)^2}{4x}\cdot\frac{4\sqrt{x}}{(x-1)}=\frac{x-1}{\sqrt{x}}.$$

Vậy $A=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}.$

b) Điều kiện: $x>0$ và $x\neq 1.$ Ta có:

$$A=-3\sqrt{x}-3\Leftrightarrow\frac{x-1}{\sqrt{x}}=-3\sqrt{x}-3\Leftrightarrow x-1=-3x-3\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 4x+3\sqrt{x}-1=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+1\right)\left(4\sqrt{x}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\frac{1}{16}.$$

Thỏa điều kiện đã cho.

Vậy $x=\dfrac{1}{16}$ là giá trị cần tìm.

c) Ta có: $x=7+4\sqrt{3}=4+2\cdot2\cdot\sqrt{3}+3=\left(2+\sqrt{3}\right)^2.$

Do đó: $A=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}=\dfrac{7+4\sqrt{3}-1}{\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}}=\dfrac{6+4\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+2\right)}{2+\sqrt{3}}=2\sqrt{3}.$

Vậy $a=2,\ b=3$ là các giá trị cần tìm.

Câu 2 (2,0 điểm).

Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình:

Một xe lửa đi từ Huế ra Hà Nội. Sau đó 24 phút, một xe lửa khác đi từ Hà Nội vào Huế với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe lửa thứ nhất là 15 km/h. Hai xe gặp nhau tại một ga cách Hà Nội 345 km. Tìm vận tốc của mỗi xe, giả thiết rằng quãng đường sắt Huế - Hà Nội dài 645 km.

Lời giải

Gọi x (km/h) là vận tốc xe lửa thứ nhất thì vận tốc xe lửa thứ hai là $x+15$.

Khi hai xe gặp nhau, xe thứ hai đã khởi hành được quãng thời gian là $\dfrac{345}{x+15}$ (giờ).

Vì xe thứ hai xuất phát sau xe thứ nhất 24 phút nên đến khi hai xe gặp nhau, xe thứ nhất đã đi $\dfrac{345}{x+15}+\dfrac{2}{5}$ giờ với quãng đường $645-345=300$ (km). Vì vậy ta có phương trình

$$x\left(\frac{345}{x+15}+\frac{2}{5}\right)=300 \Leftrightarrow 1725x+2x\left(x+15\right)=1500\left(x+15\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+255x-22500=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=60 \\ x=-\dfrac{375}{2} \end{array}\right.\cdot$$

Tuy nhiên $x>0$ nên $x=60.$ Vậy vận tốc của xe thứ nhất và xe thứ hai lần lượt là 60 và 75 (km/h).

Câu 3 (3,0 điểm).

1. Cho hàm số $y=kx^2$, biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(-2;-8\right)$. Tìm k và vẽ đồ thị hàm số với k vừa tìm được.

2. Cho phương trình $x^2+2\left(m+1\right)x+m^2=0\ \left(1\right)$.

a) Giải phương trình với $m=5$.

b) Tìm m để phương trình $\left(1\right)$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng -2.

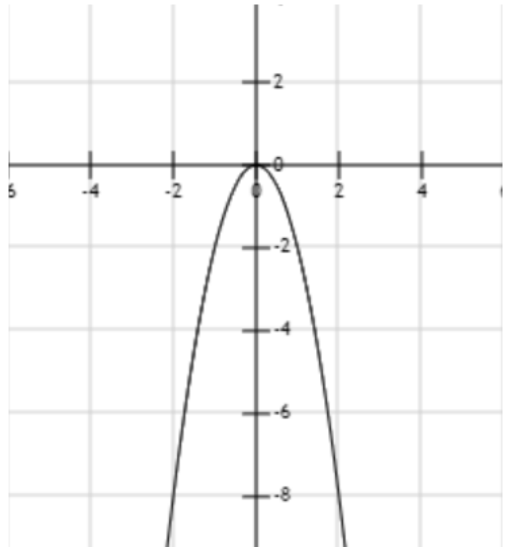
Lời giải

1. Vì đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(-2;-8\right)$, nên:

$$-8=k\left(-2\right)^2 \Leftrightarrow k=-2.$$

Với $k=-2$, ta có: $y=-2x^2$.

Đồ thị hàm số đã cho đi qua các điểm $O\left(0;0\right)$, $B\left(1;-2\right)$, $C\left(-1;-2\right)$.



2. a) Với $m=5,$ phương trình đã cho trở thành:

$$x^2+12x+25=0 \Leftrightarrow x^2+12x+36=11$$
$$\Leftrightarrow (x+6)^2=11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+6=\sqrt{11} \\ x+6=-\sqrt{11} \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{11}-6 \\ x=-\sqrt{11}-6 \end{array}\right..$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $S=\left\{-6-\sqrt{11};\,-6+\sqrt{11}\right\}.$

b) Đặt $f(x)=x^2+2(m+1)x+m^2.$ Yêu cầu bài toán tương đương với:

$$\begin{cases} \Delta'=(m+1)^2-m^2>0 \\ f(-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1>0 \\ m^2-4m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=4 \end{array}\right..$$

Vậy $m=0$ hoặc $m=4$ là các giá trị cần tìm.

Câu 4 (3,5 điểm).

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$ và tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với $AB.$ Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). AC cắt OM tại E; MB cắt nửa đường tròn (O) tại $D,\, D\neq B.$

a) Chứng minh $AMDE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Tia BC cắt Ax tại $N.$ Chứng minh $MN^2=MD\cdot MB.$

c) Vẽ CH vuông góc với $AB,\, H\in AB.$ Chứng minh rằng MB đi qua trung điểm của $CH.$

d) Lấy P là điểm đối xứng của M qua C và K là hình chiếu vuông góc của A trên $PB.$ Gọi Q và R lần lượt là trung điểm các đoạn MK và $PD.$ Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác CQR tiếp xúc với đường tròn tâm O đường kính $AB.$

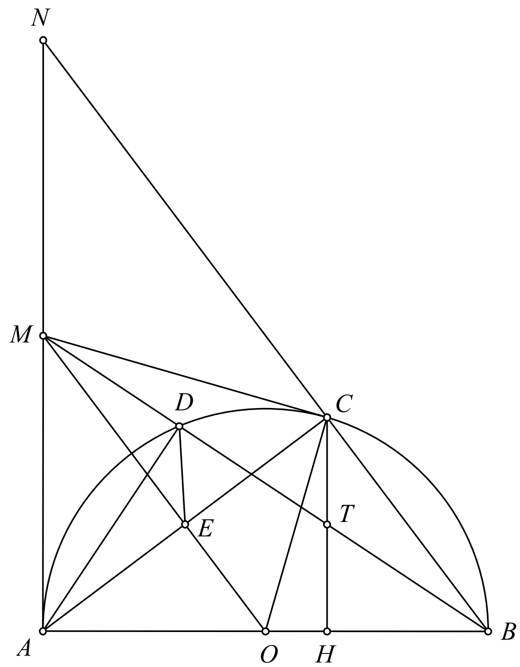
Lời giải

Gọi (O) là đường tròn tâm O đường kính AB.

a) Ta có AB là đường kính của (O) nên $\angle MDA = 90^\circ$. Mà MA, MC là hai tiếp tuyến của (O) nên MA = MC, do đó OM là trung trực của AC nên $\angle MEA = 90^\circ = \angle MDA$, suy ra tứ giác AMDE nội tiếp.

b) Ta có AB là đường kính của (O) nên $\angle NCA = \angle BCA = 90^\circ$. Mà MA = MC nên M chính là trung điểm cạnh huyền NA của tam giác vuông ANC. Đồng thời, chú ý rằng ABM là tam giác vuông tại A có đường cao AD nên áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có

$$MN^2 = MA^2 = MD.ME.$$

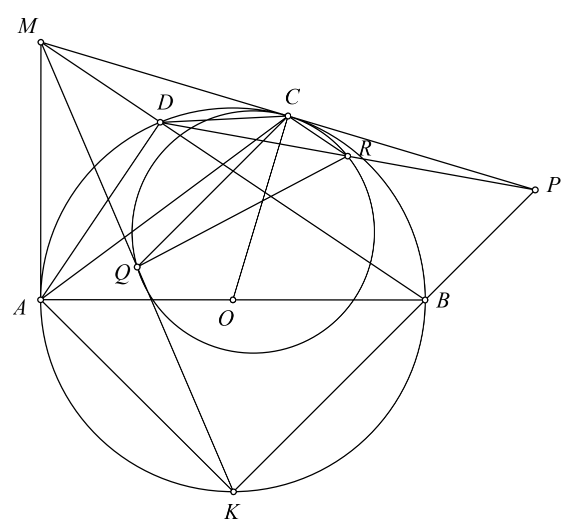


c) Gọi T là giao điểm của BM và CH, ta có CH và AN song song (cùng vuông góc với AB) nên theo định lý Ta – lét

$$\frac{CT}{MN} = \frac{BT}{BM} = \frac{TH}{MA},$$

Nhưng MN = MA nên ta có CT = TH. Vậy MB đi qua trung điểm T của CH.

d) Ta có $\angle AKB = 90^\circ$ nên K ∈ (O).



Ta có C, Q, R lần lượt là trung điểm MP, MK, DP nên QC, CR tương ứng là đường trung bình của tam giác MKP, PDM, kéo theo QC || KP và CR || MB nên $\angle QCR = \angle MBP$.

Xét đường tròn (O) có MC là tiếp tuyến nên $\angle MCD = \angle MBC$, suy ra hai tam giác MDC và MCB đồng dạng (góc – góc), do đó $MC^2 = MD.MB$. Chứng minh tương tự ta cũng có $PC^2 = PB.PK$. Mà CP = CM nên

$$\frac{MB}{PB} = \frac{PK}{MD} = \frac{PK/2}{MD/2} = \frac{CQ}{CR}.$$

Từ đó ta suy ra hai tam giác QCR và MBP đồng dạng (cạnh – góc – cạnh), nên

$$\angle CQR = \angle BMP = \angle RCP \; (CR \parallel MD)$$

Suy ra CP là tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CQR. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác CQR và đường tròn (O) có chung tiếp tuyến tại C nên chúng tiếp xúc nhau.

Câu 5 (0,5 điểm).

Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a - b = \frac{a}{b}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+b}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{ab-a-b}\right) + \frac{1}{ab-a-b} \geq \frac{9}{ab}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

Với mọi $m, n, x, y > 0,$ ta có: $\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y}$. Thật vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$(x+y)\left(\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y}\right) \geq (m+n)^2 \Leftrightarrow m^2 + n^2 + \frac{m^2 y}{x} + \frac{n^2 x}{y} \geq m^2 + n^2 + 2mn \Leftrightarrow \left(m\sqrt{\frac{y}{x}} - n\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{m}{n} = \frac{x}{y}$.

Ta có: $a - b = \frac{a}{b} \Leftrightarrow ab = b^2 + a \Leftrightarrow ab - a - b = b(b-1)$.

Mặt khác $a - b = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a = \frac{b^2}{b-1} > 0 \Rightarrow a > 1$.

Do đó $ab - a - b > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có:

$$\frac{ab}{a+b}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{ab-a-b}\right) \geq \frac{ab}{a+b} \cdot \frac{4}{a+b+ab-a-b} = \frac{4}{a+b}.$$

Lại có: $\frac{4}{a+b} + \frac{1}{ab-a-b} \geq \frac{(2+1)^2}{a+b+ab-a-b} = \frac{9}{ab}$.

Từ đây suy ra: $\frac{ab}{a+b}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{ab-a-b}\right)+\frac{1}{ab-a-b}\geq\frac{9}{ab}$.

Suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ:

$$\begin{cases} a+b=ab-a-b \\ a-b=\dfrac{a}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2b}{b-2} \\ a=\dfrac{b^2}{b-1} \end{cases} \Rightarrow \frac{2b}{b-2}=\frac{b^2}{b-1} \Leftrightarrow b\left(b^2-4b+2\right)=0 \Leftrightarrow b=2+\sqrt{2}.$$

Khi đó $a=\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}+1}=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{\sqrt{2}+1}=2\left(\sqrt{2}+1\right)=2+2\sqrt{2}$.

Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ $a=2+2\sqrt{2}$, $b=2+\sqrt{2}$.