Email: ntvu@ptnk.edu.vn
Giáo viên: Nguyễn Tăng Vũ

1 Bài tập phương trình - Hệ phương trình

Bài 1.

a) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2-2xy=8x^2-6x+1 \\ y^2=x^3+8x^2-x+1 \end{cases}$

Bài 2.

a) Giải phương trình:

$$5\sqrt{x-1}-\sqrt{x+7}=3x-4$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2(x+y)-xy=4 \\ xy(x+y-4)=-2 \end{cases}$$

Bài 3.

a) Giải phương trình: $4\sqrt{x+3}=1+4x+\dfrac{2}{x}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^3=1 \\ x^2+y^5=x^3+y^2 \end{cases}$

Bài 4.

a) Giải hệ phương trình: $2(x+2)\sqrt{3x-1}=3x^2-7x-3$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}-\dfrac{10}{x}=-1 \\ 20y^2-xy-y=1 \end{cases}$

Bài 5. Cho hệ phương trình với k là tham số:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{yz}}+\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{x}{z}}=k \\ \dfrac{y}{\sqrt{zx}}+\sqrt{\dfrac{y}{z}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=k \\ \dfrac{z}{\sqrt{xy}}+\sqrt{\dfrac{z}{x}}+\sqrt{\dfrac{z}{y}}=k \end{cases}$$

a) Giải hệ với $k=1$.

b) Chứng minh hệ vô nghiệm với $k\ge 2$ và $k\ne 3$.

Bài 6. Giải hệ $\begin{cases} (x-2y)(x+my)=m^2-2m-3 \\ (y-2x)(y+mx)=m^2-2m-3 \end{cases}$ khi $m=-3$ và tìm m để hệ co ít nhất một nghiệm (x_o,y_o) thỏa $x_o>0, y_o>0$.

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\left(1+x\sqrt{y}\right)^2=9y\sqrt{x} \\ 2(1+y\sqrt{x})^2=9x\sqrt{y} \end{cases}$

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2+2y+1=2z\left(x+2\right) \\ 3y^2+2z+1=2x\left(y+2\right) \\ 3z^2+2x+1=2y\left(z+2\right) \end{cases}$

Bài 9. Cho phương trình

$$x^2+(a+b+c)x+m(ab+bc+ac)=0$$

trong đó a,b,c là các số dương, m là tham số.

a) Chứng minh rằng nếu $m\le\dfrac{3}{4}$ thì phương trình có nghiệm.

b) Chứng minh rằng nếu a,b,c là độ dài 3 cạnh của tam giác và $m\ge1$ thì phương trình không có nghiệm.

Bài 10. Cho phương trình $\sqrt{2x+m^2-6m+3}=x-m$ (m là tham số)

a) Giải phương trình khi $m=4$.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất.

2 Phương trình bậc hai và định lý Viete

Bài 11.

a) Giải phương trình (1) khi $m = -1$.

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $21x_1 + 7m\left(2 + x_2 + x_2^2\right) = 58$

Bài 12. (PTNK 2016) Cho phương trình $\dfrac{(x+1)(x^2+mx+2m+14)}{\sqrt{x}} = 0(1)$. Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho:

$$\sqrt{x_2^2 + (m+1)x_2 + 2m + 14} = 3 - \sqrt{x_1}$$

Bài 13. Cho phương trình bậc hai $x^2 - (m+3)x + m^2 = 0$ trong đó m là tham số sao cho phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

a) Khi $m = 1$. Chứng minh rằng ta có hệ thức $\sqrt[8]{x_1} + \sqrt[8]{x_2} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{6}}}$

b) Tìm tất cả các giá trị của m sao cho $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{5}$

c) Xét đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx$. Tìm tất cả các cặp số (a, b) sao cho ta có hệ thức $P(x_1) = P(x_2)$ với mọi giá trị của tham số m.

Bài 14. Cho phương trình $x^3 - 4x\sqrt{x} + m + 1 = 0$ (1)

a) Giải phương trình (1) khi $m = -33$

b) Tìm m để phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1^6 + x_2^6 = 82$.

Bài 15. Cho phương trình $(m^2+5)x^2 - 2mx - 6m = 0$ (1) với m là tham số.

a) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng khi đó tổng của hai nghiệm không thể là số nguyên.

b) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện

$$\left(x_1x_2 - \sqrt{x_1 + x_2}\right)^4 = 16$$

Bài 16. Cho phương trình $x^2 - 4mx + m^2 - 2m + 1 = 0$ (1) với m là tham số .

a) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng khi đó hai nghiệm không thể trái dấu.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $|x_1 - x_2| = 1$.

Bài 17. Giả sử phương trình $2x^2 + 2ax + 1 - b = 0$ có 2 nghiệm nguyên (a, b là tham số). Chứng minh rằng $a^2 - b^2 + 2$ là số nguyên và không chia hết cho 3.

Bài 18. Cho hai phương trình $x^2 + ax + 6 = 0$ và $x^2 + bx + 12 = 0$ có một nghiệm chung. Tìm GTNN của $|a| + |b|$.

Bài 19. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thoả $x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leq 3m^2 + 16$.

Bài 20. $mx^2 - x + 1 = 0 \quad (2)$ với m là tham số.

a) Tìm m để các phương trình (1) và (2) đều có 2 nghiệm dương phân biệt.

b) Giả sử điều kiện ở câu a) được thỏa mãn gọi $x_1;\ x_2$ là nghiệm của (1) và $x_3;\ x_4$ là nghiệm của (2). Chứng minh rằng $x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 > 5$

7 Lời giải

Bài 1.

a) $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$ (1)

Đặt $\sqrt{2x^2+x+9}=a$ $(a>0)$ (do $2x^2+x+9>0$)

và $\sqrt{2x^2-x+1}=b$ $(b>0)$ (do $2x^2-x+1>0$)

Khi đó ta có: $a^2-b^2=2x+8$

Thay vào phương trình ta có:

$a+b=\dfrac{a^2-b^2}{2}\Leftrightarrow 2(a+b)=(a-b)(a+b)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0\\ a-b=2\end{array}\right.$

- TH1: $a+b=0\Leftrightarrow \begin{cases} a=0\\ b=0\end{cases}$ (Loại do $a>0,b>0$)
- TH2: $a-b=2$ khi đó ta có:
  $\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2$
  $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+x+9}=2+\sqrt{2x^2-x+1}$
  $\Leftrightarrow 2x^2+x+9=4+2x^2-x+1+4\sqrt{2x^2-x+1}$
  $\Leftrightarrow x+2=2\sqrt{2x^2-x+1}$
  $\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2\\ x^2+4x+4=8x^2-4x+4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2\\ \left[\begin{array}{l} x=0\ (n)\\ x=\dfrac{8}{7}\ (n)\end{array}\right.\end{cases}$

Vậy $S=\left\{0;\ \dfrac{8}{7}\right\}$

b) $\begin{cases} y^2-2xy=8x^2-6x+1\ (1)\\ y^2=x^3+8x^2-x+1\ (2)\end{cases}$

Từ (2) ta có: $y^2=x^3+8x^2-x+1$ thay vào (1) ta có:

$x^3+8x^2-x+1-2xy=8x^2-6x+1\Leftrightarrow x^3-2xy+5x=0$

$\Leftrightarrow x(x^2-2y+5)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x^2-2y+5=0\end{array}\right.$

- TH1: $x=0$ thay vào (2) ta có: $y^2=1\Rightarrow y=\pm 1$
- TH2: $x^2-2y+5=0\Leftrightarrow 2y=x^2+5$ thay vào (2) ta có:
  $4y^2=4x^3+32x^2-4x+4$
  $\Leftrightarrow (x^2+5)^2=4x^3+32x^2-4x+4$
  $\Leftrightarrow x^4-4x^3-22x^2+4x+21=0$
  $\Leftrightarrow (x-7)(x+3)(x-1)(x+1)=0$
  $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7\Rightarrow y=27\\ x=1\Rightarrow y=3\\ x=-1\Rightarrow y=3\\ x=-3\Rightarrow y=7\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(-3;7)$, $(-1;3)$,$(0;-1)$, $(0;1)$, $(1;3)$, $(7;27)$.

Bài 2.

a) Điều kiện $x\geq 1$. $5\sqrt{x-1}-\sqrt{x+7}=3x-4$

$\Leftrightarrow \dfrac{25(x-1)-(x+7)}{5\sqrt{x-1}+\sqrt{x+7}}=3x-4$

$\Leftrightarrow \dfrac{8(3x-4)}{5\sqrt{x-1}+\sqrt{x+7}}=3x-4$

$3x-4=0$ (1)hoặc $5\sqrt{x-1}+\sqrt{x+7}=8$ (2)

(1) $\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}$(nhận)

(2)$64=25(x-1)+x+7+10\sqrt{(x-1)(x+7)}$

$\Leftrightarrow 82-26x=10\sqrt{(x^2+6x-7)}$

Giải ra được nghiệm $x=2$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $S = \{2, \frac{4}{3}\}$.

b) Từ phương trình (1) ta có $(x-2)(y-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $y = 2$. Với $x = 2$ thế vào (2) ta có $y = 1$.
Ta có nghiệm $(x; y)$ là $(2; 1)$.
Với $y = 2$ thế vào (2) ta có $y = 1$. Ta có nghiệm $(x; y)$ là $(1; 2)$.
Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y)$ là $(2; 1)$ và $(1; 2)$.

Bài 3.

a) Giải phương trình: $4\sqrt{x+3} = 1 + 4x + \frac{2}{x}$. (1)

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \geq 3. \end{cases}$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 4x\sqrt{x+3} = x + 4x^2 + 2$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x\sqrt{x+3} + (x+3) = 1$

$\Leftrightarrow (2x - \sqrt{x+3})^2 = 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \sqrt{x+3} = 1 \\ 2x - \sqrt{x+3} = -1. \end{array}\right.$

- **Trường hợp 1:** $2x - 1 = \sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ (2x-1)^2 = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 5x - 2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{5+\sqrt{57}}{8} \\ x = \frac{5-\sqrt{57}}{8} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5+\sqrt{57}}{8}.$$

- **Trường hợp 2:** $2x + 1 = \sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ (2x+1)^2 = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x^2 + 3x - 2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{-3+\sqrt{41}}{8} \\ x = \frac{-3-\sqrt{41}}{8} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-3+\sqrt{41}}{8}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\mathcal{S} = \left\{\frac{5+\sqrt{57}}{8}; \frac{-3+\sqrt{41}}{8}\right\}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^3 = 1 & (1) \\ x^2 + y^5 = x^3 + y^2 & (2) \end{cases}$

Ta có phương trình

$(2) \Leftrightarrow x^2(1-x) = y^2(1-y^3) = y^2x^2 \Leftrightarrow x^2(1-x-y^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 1 - x - y^2 = 0 \end{array}\right.$

- **Trường hợp 1:** Với $x = 0$ thì $(1) \Leftrightarrow y^3 = 1 \Leftrightarrow y = 1$.
- **Trường hợp 2:** Với $1 - x - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - y^2$ thì

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (1-y^2)^2 + y^3 = 1 \\ &\Leftrightarrow y^4 + y^3 - 2y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow y^2(y^2 + y - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow y^2(y-1)(y+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \\ y = -2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

  - Với $y = 0$ thì $x = 1$.
  - Với $y = 1$ thì $x = 0$.

– Với $y = -2$ thì $x = -3$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là: $\mathcal{S} = \{(0;1),\ (1;0),\ (-3;-2)\}$

Bài 4.

a) Điều kiện: $x \geq \dfrac{1}{3}$

$2(x+2)\sqrt{3x-1} = 3x^2 - 7x - 3$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + 2(x+2)\sqrt{3x-1} + 3x - 1 = 4x^2$

$\Leftrightarrow \left(x + 2 + \sqrt{3x-1}\right)^2 = (2x)^2$

$\Leftrightarrow x + 2 + \sqrt{3x-1} = 2x \quad \left(\text{vì } x \geq \dfrac{1}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x-1} = x - 2 \ \ (x \geq 2)$

$\Leftrightarrow 3x - 1 = x^2 - 4x + 4$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7+\sqrt{29}}{2} \ \ (n) \\ x = \dfrac{7-\sqrt{29}}{2} \ \ (l) \end{array}\right.$

b) $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} - \dfrac{10}{x} = -1 \ \ (1) \\ 20y^2 - xy - y = 1 \ \ (2) \end{cases}$

Điều kiện: $y \neq 0,\ x \neq 0$

Chia 2 vế của (2) cho y ta được:

$20y - x - 1 = \dfrac{1}{y}$

$\Rightarrow 20y - x = \dfrac{1}{y} + 1$

Mà $\dfrac{1}{y} + 1 = \dfrac{10}{x} - x$ nên

$20y - x = \dfrac{10}{x} - x$

$\Rightarrow xy = \dfrac{1}{2}$

Thay vào (2) ta được:

$20y^2 - \dfrac{1}{2} - y = 1 \Rightarrow 40y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{3}{10} \Rightarrow x = \dfrac{5}{3} \\ y = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow x = -2 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) \in \left\{\left(-2; -\dfrac{1}{4}\right), \left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{3}{10}\right)\right\}$

Bài 5.

- Cách 1: Điều kiện $x,\ y,\ z$ cùng dấu đôi một.

  Ta xét hệ phương trình với $k \geq 1$

  Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{xz} + \sqrt{xy} = k\sqrt{yz} \\ y + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} = k\sqrt{zx} \\ z + \sqrt{zy} + \sqrt{zx} = k\sqrt{xy} \end{cases}$

  Đặt $a = \sqrt{xy},\ b = \sqrt{yz},\ c = \sqrt{zx}$ $(a,\ b,\ c > 0)$

  - Trường hợp 1: $x,\ y,\ z > 0 \Rightarrow x = \dfrac{ac}{b};\ y = \dfrac{ab}{c};\ z = \dfrac{bc}{a}$

  Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{ac}{b} + a + c = kb \\ \dfrac{ab}{c} + a + b = kc \\ \dfrac{bc}{a} + b + c = ka \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ka^2 = ab + ac + bc \ (1) \\ kb^2 = ab + bc + ca \ (2) \\ kc^2 = ab + ac + bc \ (3) \end{cases}$

  Lấy (1)-(2): $k\left(a^2 - b^2\right) = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \ \ (\text{loại}) \end{array}\right.$

Tương tự lấy (2)-(3): $b = c$

Vậy $a = b = c \Rightarrow ka^2 = 3a^2 \Rightarrow k = 3$

- Trường hợp 2: $x,\ y,\ z < 0 \Rightarrow x = -\dfrac{ac}{b};\ y = -\dfrac{ab}{c};\ z = -\dfrac{bc}{a}$

Hệ phương trình $\Rightarrow \begin{cases} ka^2 = ab + ac - bc \\ kb^2 = ab + bc - ca \\ kc^2 = ac + bc - ab \end{cases}$

Cộng các phương trình lại ta có: $k\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = ab + bc + ac$

mà $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$

Suy ra $k\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \leq a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow k \leq 1$

Vậy $k = 1$ và $a = b = c \Leftrightarrow x = y = z < 0$

Câu a) Áp dụng điều trên, hệ có nghiệm $x = y = z < 0$.

Câu b) Suy ra điều phải chứng minh.

- Cách 2: Điều kiện xác định là: x, y, z cùng dương hoặc cùng âm.

  Đặt $a = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $b = \sqrt{\dfrac{y}{z}}$, $c = \sqrt{\dfrac{z}{x}}$ thì a, b, $c > 0$ và $abc = 1$.

  Ta có: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{|x|}{\sqrt{yz}}$, $\dfrac{b}{a} = \dfrac{|y|}{\sqrt{zx}}$, $\dfrac{c}{b} = \dfrac{|z|}{\sqrt{xy}}$.

  a) Khi $k = 1$, nếu $x,\ y,\ z > 0$ thì $\dfrac{a}{c} + a + \dfrac{1}{c} = \dfrac{b}{a} + b + \dfrac{1}{a} = \dfrac{c}{b} + c + \dfrac{1}{b} = 1$.

  Cộng lại suy ra $\left(a + \dfrac{1}{a}\right) + \left(b + \dfrac{1}{b}\right) + \left(c + \dfrac{1}{c}\right) + \left(\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b}\right) = 3$

  Theo bất đẳng thức Cô-si thì rõ ràng $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$, $b + \dfrac{1}{b} \geq 2$, $c + \dfrac{1}{c} \geq 2$ nên đẳng thức trên không thể xảy ra.

  Xét trường hợp x, y, z cùng âm thì

  $-\dfrac{a}{c} + a + \dfrac{1}{c} = -\dfrac{b}{a} + b + \dfrac{1}{a} = -\dfrac{c}{a} + c + \dfrac{1}{b} = 1$

  Trừ vào các vế và phân tích, ta suy ra:

  $\dfrac{(a-1)(b-1)}{a} = \dfrac{(b-1)(c-1)}{b} = \dfrac{(c-1)(a-1)}{c} = 0$

  Từ đây dễ dàng suy ra ít nhất 2 trong a, b, c phải là 1 mà $abc = 1$ nên $a = b = c = 1$. Vì thế nên thay vào ta có $x = y = z < 0$. Và mọi bộ số như thế đều thỏa mãn hệ.

  b) Với $k \geq 2$, giả sử hệ có nghiệm (x, y, z). Nếu như $x,\ y,\ z < 0$ thì ta có

  $\dfrac{(a-1)(b-1)}{a} = \dfrac{(b-1)(c-1)}{b} = \dfrac{(c-1)(a-1)}{c} = k - 1 > 0.$

  Từ đó suy ra $a-1$, $b-1$, $c-1$ đều cùng dấu, kéo theo $a,\ b,\ c > 1$ hoặc $a,\ b,\ c < 1$ Tuy nhiên $abc = 1$ nên điều này không thể xảy ra.

  Do đó, ta phải có $a,\ b,\ c > 0$ nên đưa về

  $$\frac{a}{c} + a + \frac{1}{c} = \frac{b}{a} + b + \frac{1}{a} = \frac{c}{b} + c + \frac{1}{b} = k.$$

  Trong các số $a,\ b,\ c$ giả sử $a = \max\{a, b, c\}$ thì $k = \dfrac{a}{c} + a + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{a}{c} + 2\sqrt{\dfrac{a}{c}} \geq 1 + 2 = 3$ nên ta cần có $k \geq 3$. Vì $k \neq 3$ nên $k > 3$.

  Vì $a = \max\{a, b, c\} \geq 1$ nên ta có $2b + 1 \geq \dfrac{b}{a} + b + \dfrac{1}{a} = k > 3$ kéo theo $b > 1$. Tương tự từ $2c + 1 > \dfrac{c}{b} + c + \dfrac{1}{b} = k > 3$ nên $c > 1$. Từ đây suy ra $a,\ b,\ c > 1$ trong khi $abc = 1$, vô lý.

  Vậy hệ luôn vô nghiệm với $k \geq 2$ và $k \neq 3$.

Bài 6. Khi $m = -3$ ta có hệ:

$\begin{cases} (x-2y)(x-3y) = 12 \\ (y-2x)(y-3x) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 12(1) \\ y^2 - 5xy + 6x^2 = 12(2) \end{cases}$

Lấy (1) - (2) ta có $5(y^2 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = y, x = -y$.

Với $x=y$ thế vào (1) ta có $x^2=6 \Leftrightarrow x=\sqrt{6}, y=\sqrt{6}$ hoặc $x=-\sqrt{6}, y=-\sqrt{6}$.
Với $x=-y$ thế vào (1) ta có $x^2=1 \Leftrightarrow x=1, x=-1$. Với $x=1, y=-1$, với $x=-1, y=1$.
Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm.
Hệ có thể viết lại $\begin{cases} x^2+(m-2)xy-2my^2=m^2-2m-3(1) \\ y^2+(m-2)xy-2mx^2=m^2-2m-3(2) \end{cases}$
Lấy (1) - (2) ta có $(2m+1)(y^2-x^2)=0$.
Xét $m=\dfrac{-1}{2}$ ta có hệ trở thành: $x^2-\dfrac{5}{2}xy+y^2+\dfrac{7}{4}=0$, có nghiệm $(\dfrac{5+\sqrt{2}}{2}, 2)$ thỏa đề bài.
Xét $m \neq \dfrac{-1}{2}$ ta có $x=y$ hoặc $x=-y$. Trường hợp $x=-y$ không thỏa đề bài.
Trường hợp $x=y$, thế vào (1) ta có:
$-(m+1)x^2=m^2-2m-3=(m+1)(m-3)$.
Nếu $m=-1$ ta có $(x-2y)(x-y)=0, (y-2x)(y-x)=0$ có nghiệm thỏa đề bài, chỉ cần chọn $x=1, y=1$.
Nếu $m \neq -1$ ta có $x^2=3-m$ để có nghiệm $x_o=y_o>0$ thì $m<3$. Khi đó phương trình có nghiệm $x_0=\sqrt{3-m}, y_o=\sqrt{3-m}$ thỏa đề bài.
Kết luận $m=\dfrac{-1}{2}, m=-1$ và $m<3$.

Bài 7. Đặt $a=x\sqrt{y}, b=y\sqrt{x}$. Điều kiện $a, b \geq 0$.
Ta có hệ: $\begin{cases} 2(1+a)^2=9b(1) \\ 2(1+b)^2=9a(2) \end{cases}$
Lấy (1) trừ (2) ta có: $(a-b)(2a+2b+13)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b(n) \\ 2a+2b=-13(l) \end{array}\right.$
Với $a=b$ thế vào (1) ta có $2(1+a^2)=9a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2, b=2 \\ a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$
Khi $a=b=2$ ta có $x=y=\sqrt[3]{4}$
Khi $a=b=\dfrac{1}{2}$ ta có $x=y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$.

Bài 8. Cộng ba phương trình lại ta có:
$3(x^2+y^2+z^2)+2(x+y+z)+3=2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)$
$\Leftrightarrow 3(x^2+y^2+z^2)-2(xy+yz+xz)-2(x+y+z)+3=0$
$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$
Thử lại thấy $(1,1,1)$ là nghiệm của hệ.

Bài 9.

a) Ta có $\Delta=(a+b+c)^2-4\lambda(ab+bc+ca)$ Sử dụng bất đẳng thức $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, ta có

$$\Delta \geq (3-4\lambda)(ab+bc+ca) \geq 0$$

b) Do a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác nên $|a-b|<c$, suy ra $(a-b)^2<c^2$.
Tương tự thì $(b-c)^2<a^2$ và $(c-a)^2<b^2$.
Khi đó $(a+b+c)^2<4(ab+bc+ca)$,, suy ra

$$\Delta<4(1-\lambda)(ab+bc+ca) \leq 0$$

Do đó ta có điều cần chứng minh.

Bài 10.

a) Khi $m=4$. $\sqrt{2x-5}=x-4$.
   - $2x-5=(x-4)^2(x \geq 4)$
   - $x=3(l), x=7(n)$

- $S = \{7\}$

b)
- $x^2 - 2(m+1)x + 6m - 3 = 0 (x \geq m)$.
- $x = 3, x = 2m - 1$.

TH1: $3 = 2m - 1 \geq m \Leftrightarrow m = 2$.

TH2: $3 < 2m - 1, 2m - 1 \geq m > 3 \Leftrightarrow m > 3$.

TH3: $2m - 1 < 3, 3 \geq m > 2m - 1 \Leftrightarrow m < 1$.

- Phương trình có một một khi $m = 2$, $m < 1$ hoặc $m > 3$.

Bài 11.

a) Khi m=-1 ta có phương trình:

$\dfrac{-x^2 - 4x - 3}{x+3} = 0$ (dk: $x \neq 3$)

$\Leftrightarrow -x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1\ (n) \\ x = -3\ (l) \end{array}\right.$

Vậy $S = \{-1\}$

b) $\dfrac{mx^2 + (m-3)x + 2m - 1}{x+3} = 0$ (1)

- Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là phương trình $mx^2 + (m-3)x + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -3

$\left\{\begin{array}{l} m \neq 0 \\ \Delta = (m-3)^2 - 4m(2m-1) > 0 \\ m(-3)^2 + (m-3)(-3) + 2m - 1 \neq 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m \neq 0 \\ 7m^2 + 2m - 9 < 0 \\ m \neq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m \neq 0 \\ m \neq -1 \\ -\dfrac{9}{7} < m < 1 \end{array}\right.$

- Ta có $mx_2^2 + (m-3)x_2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m\left(2 + x_2 + x_2^2\right) = 3x_2 + 1$

- Do đó

$21x_1 + 7m\left(2 + x_2 + x_2^2\right) = 58$

$\Leftrightarrow 21x_1 + 7(3x_2 + 1) = 58$

$\Leftrightarrow 21\left(x_1 + x_2\right) = 51$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = \dfrac{17}{7}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3-m}{m} = \dfrac{17}{7}$

$\Leftrightarrow 21 - 7m = 17m \Leftrightarrow m = \dfrac{7}{8}$ (n)

Vậy $m = \dfrac{7}{8}$

Bài 12.

- Điều kiện $x > 0$.
- Phương trình (1) tương đương $x^2 + mx + 2m + 14 = 0$ (2).

Để (1) có 2 nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt dương, tương đương $\Delta = m^2 - 4(2m + 14) > 0, S = -m > 0, P = 2m + 14 > 0$ (*)

- Khi đó $x_1 + x_2 = -m, x_1x_2 = 2m + 14$ và x_2 là nghiệm nên $x_2^2 + mx_2 + 2m + 14 = 0$, suy ra $x_2^2 + (m+1)x_2 + 2m + 14 = x_2$.

- Do đó $\sqrt{x_2^2 + (m+1)x_2 + 2m + 14} = 3 - \sqrt{x_1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 3$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2} = 9$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2m+14} = 9 + m$

$\Leftrightarrow 4(2m + 14) = m^2 + 18m + 81$

$\Leftrightarrow m^2 + 10m + 25 = 0 \Leftrightarrow m = -5(n)$ vì thỏa (*). Kết luận $m = -5$.

Bài 13.

a) Ta có $\Delta = (m+3)^2 - 4m^2 = 3(m+1)(3-m) > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 3$.
Khi $m = 1$,ta có phương trình $x^2 - 4x + 1 = 0$, phương trình có hai nghiệm dương x_1, x_2. Theo định lý Viete ta có: $x_1 + x_2 = 4, x_1x_2 = 1$. Ta biến đổi tương đương:
$\sqrt[8]{x_1} + \sqrt[8]{x_2} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{6}}} \Leftrightarrow \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2} + 2\sqrt[8]{x_1x_2} = 2 + \sqrt{2+\sqrt{6}} \Leftrightarrow \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2} = \sqrt{2+\sqrt{6}} \Leftrightarrow$ $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 2\sqrt[4]{x_1x_2} = 2 + \sqrt{6} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2} = 6$.
Hệ thức cuối cùng đúng do $x_1 + x_2 = 4, x_1x_2 = 1$.

b) Để phương trình có hai nghiệm không âm thì:
$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = x_1 + x_2 \geq 0 \\ P = x_1x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 3(*)$.
Theo định lý Viete ta có $x_1 + x_2 = m + 3, x_1x_2 = m^2$.
Ta có $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2} = 5$
$\Leftrightarrow m + 3 + 2\sqrt{m^2} = 5 \Leftrightarrow m + 2|m| = 2$
$\Leftrightarrow m = \dfrac{2}{3}(n), m = -2(l)$. Kết luận $m = \dfrac{2}{3}$.

c) Ta có $P(x_1) = P(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 - x_2^3 + a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + a(x_1 + x_2) + b) = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)((x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 + a(x_1 + x_2) + b) = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)((m+3)^2 - m^2 + a(m+3) + b) = 0 \Leftrightarrow (6 + a)m + 9 + 3a + b = 0$ với mọi $-1 < m < 3$.
Suy ra $a + 6 = 0, 3a + b + 9 = 0 \Leftrightarrow a = -6, b = 9$.
Vậy $(a, b) = (-6, 9)$ là cặp số cần tìm.

Bài 14. Đặt $t = x\sqrt{x} \geq 0$

a) Khi $m = -33$ ta có phương trình:

$$\begin{aligned} & t^2 - 4t - 32 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & t = -4 \text{ hoặc } t = 8(\text{loại})t = -4 \\ \Leftrightarrow\ & t = 8 \end{aligned}$$

Với $t = 8$ ta được $x = 4$.

b) Với $t = x\sqrt{x}$ thì phương trình (1) tương đương

$$t^2 - 4t + m + 1 = 0 \quad (2).$$

Để (1) có hai nghiệm phân biệt thì (2) phải có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

Ta có $\Delta' = 3 - m > 0 \Leftrightarrow m < 3$ và $\begin{cases} S = t_1 + t_2 = 4 \\ P = t_1t_2 = m + 1 \end{cases}$ Khi đó

$$\begin{aligned} & x_1^6 + x_2^6 = t_1^4 + t_2^4 \\ &= \left(t_1^2 + t_2^2\right)^2 - 2t_1^2t_2^2 \\ &= \left[S^2 - 2P\right]^2 - 2P^2 \\ &= (14 - 2m)^2 - 2(m+1)^2 \\ &= 2m^2 - 60m + 194 \end{aligned}$$

$$x_1^6 + x_2^6 = 82 \Leftrightarrow m^2 - 30m + 56 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 28 \end{array}\right.$$

Chỉ có $m = 2$ thoả các điều kiện. Vậy $m = 2$ thoả yêu cầu đề bài.

Bài 15.

a) Phương trình có hai nghiêm phân biệt khi và chỉ khi:

$\begin{cases} m^2+5 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 + 6m\left(m^2+5\right) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m\left(6m^2+m+30\right) > 0$

$\Leftrightarrow m\left[5m^2 + \left(m+\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{119}{4}\right] > 0$

$\Leftrightarrow m > 0$

Khi đó theo định lý Viete ta có $x_1 + x_2 = \dfrac{2m}{m^2+5}$.

Vì $m^2 + 5 - 2m = (m-1)^2 + 4 > 0$, suy ra $m^2 + 5 > 2m > 0$.

Do đó $0 < \dfrac{2m}{m^2+5} < 1$ nên tổng hai nghiệm của phương trình không thể là số nguyên.

b) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm $\Delta` \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$. Khi đó $\begin{cases} x_1+x_2 = \dfrac{2m}{m^2+5} \\ x_1x_2 = \dfrac{-6m}{m^2+5} \end{cases}$

Ta có $\left(x_1x_2 - \sqrt{x_1+x_2}\right)^4 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1x_2 - \sqrt{x_1+x_2} = 2 \\ x_1x_2 - \sqrt{x_1+x_2} = -2 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $x_1x_2 - \sqrt{x_1+x_2} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{-6m}{m^2+5} - \sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}} = 2$.

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}$, ta có phương trình: $-3t^2 - t = 2\,(VN)$

Trường hợp 2: $x_1x_2 - \sqrt{x_1+x_2} = -2 \Leftrightarrow \dfrac{-6m}{m^2+5} - \sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}} = -2$.

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}$ ta có phương trình: $-3t^2 - t = -2 \Leftrightarrow t = -1(l), t = \dfrac{3}{2}$.

Với $t = \dfrac{3}{2}$ ta có $\dfrac{2m}{m^2+5} = \dfrac{3}{2}$. Giải ra được $m = 2(n), m = \dfrac{5}{2}(n)$.

Bài 16.

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta' = 3m^2+2m-1 > 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{3}$ hoặc $m < -1$.

Khi đó tích hai nghiệm của phương trình $x_1x_2 = (m-1)^2 \geq 0$ nên phương trình không thể có hai nghiệm trái dấu.

b) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 không âm:

$$\begin{cases} \Delta' = 3m^2+2m-1 \geq 0 \\ S = x_1 + x_2 \geq 0 \\ P = x_1x_2 = m^2 - 2m + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \dfrac{1}{3}$$

Ta có $|\sqrt{x_1} - \sqrt{2}| = 1$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 - \sqrt{x_1x_2} = 1$

$\Leftrightarrow 4m - 2\sqrt{m^2-2m+1} = 1$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}(n), m = \dfrac{-1}{2}(l)$.

Bài 17. Theo định lý Viete ta có $x_1 + x_2 = -a, x_1x_2 = \dfrac{1-b}{2}$. Khi đó $Q = a^2 - b^2 + 2 = (x_1+x_2)^2 - (2x_1x_2 - 1)^2 + 2 = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1^2x_2^2 + 6x_1x_2 + 1$ là một số nguyên.

Ta chứng minh Q không chia hết cho 3.

Ta có tính chất sau, với một số nguyên m bất kì thì nếu m chia hết cho 3 thì m^2 chia hết cho 3. Nếu m chia 3 dư 1 hoặc 2 thì m^2 chia 3 dư 1.

Ta có $Q = x_1^2 + x_2^2 - x_1^2x_2^2 + 1 - 3x_1^2x_2^2 + 6x_1x_2$.
Ta cần chứng minh $Q' = x_1^2 + x_2^2 - x_1^2x_2^2 + 1$ không chia hết cho 3. Xét xác trường hợp sau:

- Nếu x_1, x_2 không chia hết cho 3 thì x_1^2, x_2^2 chia 3 dư 1. Khi đó Q' chia 3 dư 2.
- Nếu x_1 chia hết cho 3, x_2 không chia hết cho 3, khi đó Q' chia 3 dư 2.

- x_1, x_2 chia hết cho 3. Khi đó Q' chia 3 dư 1.

Vậy Q' không chia hết cho 3.
Do đó Q không chia hết cho 3.

Bài 18.

Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình. Khi đó ta có

$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + 6 = 0 \quad (1) \\ x_0^2 + bx_0 + 12 = 0 \quad (1) \end{cases}.$$

Cộng vế theo vế hai phương trình trên ta được

$$2x_0^2 + (a+b)x_0 + 18 = 0 \quad (3).$$

Tồn tại $x_0 \Leftrightarrow$ phương trình (3) phải có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = (a+b)^2 - 144 \geq 0 \Leftrightarrow |a+b| \geq 12$.
Mặt khác $|a| + |b| \geq |a+b| \geq 12$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} ab \geq 0 \\ |a+b| = 12. \end{cases}$
Nếu $a + b = 12$ thì từ (3) suy ra

$$\begin{aligned} & 2x_0^2 + 12x_0 + 18 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_0^2 + 6x_0 + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x_0 + 3)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_0 = -3. \end{aligned}$$

Thay vào (1) và (2) suy ra $a = 5, b = 7$.
Nếu $a + b = -12$ thì từ (3) suy ra

$$2x_0^2 - 12x_0 + 18 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 3.$$

Thay vào (1) và (2) suy ra $a = -5, b = -7$.
Vậy GTNN của $|a| + |b|$ bằng 12 khi $(a, b) = (5, 7)$ hoặc (-5,-7).

Bài 19.

Bài 20.

a) Xét phương trình (1): $x^2 - x + m = 0$
Phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt:
$$\begin{cases} \triangle > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4m > 0 \\ 1 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{4} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{1}{4}$$
Xét phương trình (2): $mx^2 - x + 1 = 0$
Phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt:
$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \triangle > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - 4m > 0 \\ \dfrac{1}{m} > 0 \\ \dfrac{1}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \dfrac{1}{4} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{1}{4}$$
Vậy để (1) và (2) có hai nghiệm dương phân biệt thì $0 < m < \dfrac{1}{4}$