

NHỮNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

A. LÝ THUYẾT:

1. Bình phương của một tổng: $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

2. Bình phương của một hiệu: $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

3. Hiệu hai bình phương: $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

4. Lập phương của một tổng: $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

5. Lập phương của một hiệu: $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

6. Tổng hai lập phương: $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$

7. Hiệu hai lập phương: $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

Ngoài ra, ta có các hằng đẳng thức hệ quả của 7 hằng đẳng thức trên. Thường sử dụng trong khi biến đổi, chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức,...

1. Tổng hai bình phương: $A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB$

2. Tổng hai lập phương: $A^3 + B^3 = (A + B)^3 - 3AB(A + B)$

3. Bình phương của tổng 3 số hạng:

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2(AB + BC + CA)$$

4. Lập phương của tổng 3 số hạng:

$$(A + B + C)^3 = A^3 + B^3 + C^3 + 3(A + B)(B + C)(C + A)$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP MINH HỌA CƠ BẢN:

Dạng 1: Biến đổi biểu thức

Phương pháp:

Áp dụng 7 hằng đẳng thức đáng nhớ để thực hiện biến đổi biểu thức.

Bài 1: Thực hiện phép tính:

a) $(-3x + 2y)^2$

b) $(-x - xy)^2$

c) $x^2 - 4y^2$

d) $(x + y)^2 - (2 - y)^2$

Giải

a) Áp dụng hằng đẳng thức ta có:

$$(-3x + 2y)^2 = (-3x)^2 + 2(-3x)(2y) + (2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2$$

b) Áp dụng hằng đẳng thức ta có:

$$(-x - xy)^2 = (-x)^2 - 2(-x)(xy) + (xy)^2 = x^2 + 2x^2y + x^2y^2$$

c) Áp dụng hằng đẳng thức ta có:

$$x^2 - 4y^2 = x^2 - (2y)^2 = (x - 2y)(x + 2y)$$

d) Áp dụng hằng đẳng thức ta có:

$$\begin{aligned}(x + y)^2 - (2 - y)^2 &= ((x + y) - (2 - y))((x + y) + (2 - y)) \\ &= (x + 2y - 2)(x + 2)\end{aligned}$$

Bài 2: Thực hiện phép tính:

a) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) - (-x + y)(x^2 + xy + y^2)$

b) $2x^3 - 6x^2 + 6x - 2$

c) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

d) $(x + y)^3 - (x - 2y)^3$

Giải

a) Áp dụng bất đẳng thức ta được:

$$\begin{aligned}(x + y)(x^2 - xy + y^2) - (-x + y)(x^2 + xy + y^2) \\ = x^3 + y^3 + (x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 + y^3 + x^3 - y^3 = 2x^3\end{aligned}$$

b) Ta có: $2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$.

Áp dụng bất đẳng thức ta được: $2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 2(x - 1)^3$.

c) Ta có: $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot x + 2^3$

Áp dụng bất đẳng thức ta được: $x^3 + 3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot x + 2^3 = (x + 2)^3$

d) Áp dụng bất đẳng thức ta được: $(x + y)^3 - (x - 2y)^3$

$$= (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - (x^3 - 3x^2 \cdot 2y + 3x \cdot (2y)^2 - (2y)^3)$$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3 + 6x^2y - 12xy^2 + 8y^3$$

$$= 9x^2y - 9xy^2 + 9y^3$$

Bài 3: Rút gọn biểu thức:

a) $(a - b + c + d)(a - b - c - d)$

b) $(x + 2y + 3z)(x - 2y + 3z)$

$$c) (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2+x+1)$$

$$d) (x+y)^3 - (x-y)^3$$

$$e) (x^2+3x+1)^2 + (3x+1)^2 - 2(x^2+3x+1)(3x-1)$$

Giải

$$a) (a-b+c+d)(a-b-c-d)$$

$$= [(a-b)+(c+d)] \cdot [(a-b)-(c+d)] = (a-b)^2 - (c+d)^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2 = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - 2ab - 2cd$$

$$b) (x+2y+3z)(x-2y+3z) = [(x+3z)+2y] \cdot [(x+3z)-2y]$$

$$= (x+3z)^2 - (2y)^2 = x^2 + 6xz + 9z^2 - 4y^2$$

$$c) (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2+x+1) = (x^3-1)(x^3+1) = x^6 - 1$$

$$d) (x+y)^3 - (x-y)^3$$

$$= (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3)$$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3$$

$$= 6x^2y + 2y^3 = 2y(3x^2 + y^2)$$

$$e) (x^2+3x+1)^2 + (3x+1)^2 - 2(x^2+3x+1)(3x-1)$$

$$= [(x^2+3x+1) - (3x-1)]^2 = (x^2+3x+1-3x+1)^2 = (x^2+2)^2$$

Dạng 2: Tính giá trị biểu thức

Phương pháp: Dạng bài toán này rất đa dạng ta có thể giải theo phương pháp cơ bản như sau:

- Biến đổi biểu thức cho trước thành những biểu thức cần thiết sao cho phù hợp với biểu thức cần tính giá trị.

- Áp dụng 7 hằng đẳng thức đáng nhớ để thực hiện biến đổi biểu thức cần tính giá trị về biểu thức có liên quan đến giá trị đề bài đã cho.

- Thay vào biểu thức cần tính tìm được giá trị.

Bài 1: Cho $x + y = 1$. Tính giá trị biểu thức sau: $A = x^3 + 3xy + y^3$

Giải

Áp dụng hằng đẳng thức bậc 3, ta được:

$$A = x^3 + y^3 + 3xy = (x+y)(x^2 - xy + y^2) + 3xy$$

$$= (x+y)((x+y)^2 - 3xy) + 3xy$$

Theo bài ra $x+y=1$, thay vào A ta được:

$$A = (x+y)((x+y)^2 - 3xy) + 3xy = 1 \cdot (1^2 - 3xy) + 3xy = 1 - 3xy + 3xy = 1$$

Vậy $A=1$.

Bài 2: Cho $x-y=4$ và $xy=5$. Tính $B = x^3 - y^3 + (x-y)^2$

Giải.

Áp dụng hằng đẳng thức, ta được:

$$\begin{aligned} B &= x^3 - y^3 + (x-y)^2 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) + (x-y)^2 \\ &= (x-y)((x-y)^2 + 3xy) + (x-y)^2 \end{aligned}$$

Theo bài ra $x-y=4$, $xy=5$ thay vào B ta được:

$$B = (x-y)((x-y)^2 + 3xy) + (x-y)^2 = 4(4^2 + 3 \cdot 5) + 16 = 140$$

Vậy $B=140$

Bài 3: Tính giá trị biểu thức:

a) $9x^2 - 48x + 64 - 5x^3$ tại $x=2$

b) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$ tại $x=-4$

c) $\frac{x^3-1}{x^2-1}$ tại $x=6$

d) $\frac{x^2-2x+1}{x^3-1} + \frac{x^2-1}{(x-1)^2}$ tại $x=3$

Giải

a) Ta có: $9x^2 - 48x + 64 - 5x^3 = (3x-8)^2 - 5x^3$

Thay $x=2$ vào ta được: $(3 \cdot 2 - 8)^2 - 5 \cdot 2^3 = -36$

b) Ta có $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x-3)^3$

Thay $x=-4$ vào ta được: $(x-3)^3 = (-4-3)^3 = -7^3 = -343$

c) Ta có: $\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1}$

Thay $x=6$ vào ta được: $\frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{6^2+6+1}{6+1} = \frac{43}{7}$

d) Ta có: $\frac{x^2-2x+1}{x^3-1} + \frac{x^2-1}{(x-1)^2}$

$$= \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{x^2+x+1} + \frac{x+1}{x-1}$$

Thay $x=3$ vào ta được: $\frac{3-1}{3^2+3+1} + \frac{3+1}{3-1} = \frac{2}{13} + 2 = \frac{28}{13}$

Dạng 3: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Phương pháp:

+) Giá trị lớn nhất của biểu thức $A(x)$. Áp dụng bất đẳng thức ta biến đổi được về dạng:

$$m - Q^2(x) \leq m \text{ (với } m \text{ là hằng số)} \Rightarrow \text{GTLN của } A(x) = m.$$

+) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A(x)$. Áp dụng bất đẳng thức ta biến đổi được về dạng

$$Q^2(x) + n \geq n \text{ (với } n \text{ là hằng số)} \Rightarrow \text{GTNN của } A(x) = n.$$

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

a) $A = -x^2 - 2x + 5$

b) $B = 9x - 3x^2 + 4$

Giải

a) Ta có: $A = -x^2 - 2x + 5 = -x^2 - 2x - 1 + 6 = 6 - (x+1)^2 \leq 6$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là 6 khi $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

b) Ta có:

$$B = 9x - 3x^2 + 4 = 3\left(-\frac{9}{4} + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x - x^2\right) + \frac{27}{4} + 4 = \frac{43}{4} - 3\left(\frac{3}{2} - x\right)^2 \leq \frac{43}{4}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức B là $\frac{43}{4}$ khi $\frac{3}{2} - x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a) $A = 8x^2 - 8x + 14$ b) $B = x^2 + x + 2$

Giải

a) Ta có: $A = 8x^2 - 8x + 14 = 2(4x^2 - 4x + 1) + 12$

$$= 2(2x-1)^2 + 12 \geq 12$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là 12 khi $2x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

b) Ta có: $B = x^2 + x + 2 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức B là $\frac{7}{4}$ khi $x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Bài 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a) $A = (x^2 - x + 1)^2$

b) $B = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$

Giải

a) Ta có: $x^2 - x + 1 = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

Do $x^2 - x + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$.

Giá trị nhỏ nhất của $A = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ khi và chỉ khi $x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

b) Ta có: $B = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = x^4 - 2x^3 + x^2 + x^2 - 2x + 1$
 $= x^2(x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 2x + 1) = x^2(x-1)^2 + (x-1)^2 \geq 0$

Mặt khác: $B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x-1 = 0 \\ x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \Leftrightarrow x = 1. \\ x = 1 \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = 0$ khi và chỉ khi $x = 1$.

Bài 4: Chứng minh rằng $x^2 - 4x + 10$ luôn dương với mọi x

Giải

Ta có: $x^2 - 4x + 10 = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 4 + 6 = (x-2)^2 + 6$

Ta thấy $(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-2)^2 + 6$ luôn dương với mọi x .

B.CÁC DẠNG BÀI TẬP MINH HỌA NÂNG CAO TỔNG HỢP

1. Tìm hệ số x^2 của đa thức sau khi khai triển :

a) $A = (x-2)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^3 + (3x+1)^3$

b) $B = (2x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (3x-1)^3$

Giải

a) $A = x^2 - 4x + 4 + x^2 + 4x + 4 + x^3 + 9x^2 + 27x + 27 + 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$
 $= 28x^3 + 38x^2 + 36x + 36$

Vậy hệ số của x^2 là 38.

b) $B = 4x^2 - 4x + 1 + x^2 - 4x + 4 + x^3 - 9x^2 + 27x - 27 + 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$
 $= 28x^3 - 31x^2 + 28x - 23$

Vậy hệ số của x^2 là -31.

2. Tính giá trị biểu thức

a) $A = x^2 + 0,2x + 0,01$ tại $x = 0,9$.

b) $B = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ tại $x = 19$.

c) $C = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ tại $x^2 - x = 8$

Giải

a) Ta có :

$$A = x^2 + 0,2x + 0,01$$

$$= x^2 + 0,2x + (0,1)^2$$

$$= (x + 0,1)^2$$

Với $x = 0,9 \Rightarrow A = (0,9 + 0,1)^2 = 1$

b) Ta có:

$$B = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

$$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1 = (x + 1)^3 + 1$$

Với $x = 19$ thì $B = (19 + 1)^3 + 1 = 8000 + 1 = 8001$

c) Ta có :

$$C = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$$

$$= x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x^2 - 2x + 2$$

$$= (x^2 - x)^2 + 2 \cdot (x^2 - x) + 1 + 1$$

$$= (x^2 - x + 1)^2 + 1$$

Với $x^2 - x = 8 \Rightarrow C = (8 + 1)^2 + 1 = 81 + 1 = 82$.

3. Tính hợp lý :

a) $A = \frac{356^2 - 144^2}{256^2 - 244^2}$

b) $B = 253^2 + 94.253 + 47^2$

c) $C = 163^2 - 92.136 + 46^2$

d) $D = (100^2 + 98^2 + \dots + 2^2) - (99^2 + 97^2 + \dots + 1^2)$

Giải

a) $A = \frac{356^2 - 144^2}{256^2 - 244^2} = \frac{(356 + 144)(356 - 144)}{(256 + 244)(256 - 244)} = \frac{500.212}{500.12} = \frac{53}{3}$

b) $B = 253^2 + 94.253 + 47^2 = 253^2 + 2.47.253 + 47^2 = (253 + 47)^2 = 300^2 = 90000$

$$c) C = 136^2 - 92 \cdot 136 + 46^2 = 136^2 - 2 \cdot 46 \cdot 136 + 46^2 = (136 - 46)^2 = 90^2 = 8100$$

$$\begin{aligned} d) D &= (100^2 + 98^2 + \dots + 2^2) - (99^2 + 97^2 + \dots + 1^2) \\ &= (100^2 - 99^2) + (98^2 - 97^2) + \dots + (2^2 - 1^2) \\ &= (100 - 99)(100 + 99) + (98 - 97)(98 + 97) + \dots + (2 - 1)(2 + 1) \\ &= 1 \cdot (100 + 99) + 1 \cdot (98 + 97) + \dots + 1 \cdot (2 + 1) \\ &= 100 + 99 + \dots + 1 = (100 + 1) + (99 + 2) + \dots + (51 + 50) \\ &= 101 + 101 + \dots + 101 = 101 \cdot 50 = 5050 \end{aligned}$$

4. Tính giá trị biểu thức :

$$A = \frac{2021^2 (2020 - 2019)}{(2020 - 1)(2020^3 + 1)} \cdot \frac{2019^2 (2020^2 + 2021)}{2020^3 - 1}$$

Giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{2021^2 (2020^2 - 2019)}{(2020^2 - 1)(2020^3 + 1)} \cdot \frac{2019^2 (2020 + 2021)}{2020^3 - 1} \\ &= \frac{2021^2 (2020^2 - 2020 + 1)}{(2020 + 1)(2020 - 1)(2020 + 1)(2020^2 - 2020 + 1)} \cdot \frac{2019^2 (2020^2 + 2020 + 1)}{(2020 - 1)(2020^2 + 2020 + 1)} \\ &= \frac{1}{2019} \cdot 2019 = 1 \end{aligned}$$

5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$a) A = 5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2020 \quad b) M = 5x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2xy - z - 1$$

Giải

a) Ta có :

$$\begin{aligned} A &= 4x^2 + 8xy + 4y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + 2018 \\ &= 4(x + y)^2 + (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 2018 \geq 2018 \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A = 2018$ tại $x = 1; y = -1$

$$\begin{aligned} c) M &= x^2 - 2xy + y^2 + 4x^2 - 4x + 1 + z^2 - z + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= (x + y)^2 + (2x - 1)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{4} \geq -2 \cdot \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{2} \\ z - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $-2\frac{1}{4}$ khi $x = y = z = \frac{1}{4}$

6. Tìm x, biết :

$$a) (x+2)^2 + (x+3)^2 - 2(x-2)(x-3) = 19$$

$$b) (x+2)(x^2 - 2x + 4) - x(x^2 - 5) = 15$$

$$c) (x-1)^3 + (2-x)(4+2x+x^2) + 3x(x+2) = 17$$

Giải

$$a) (x+2)^2 + (x+3)^2 - 2(x-2)(x-3) = 19$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + 8x + (x-3)^2 + 12x - 2(x-2)(x-3) = 19$$

$$\Leftrightarrow 20x + [(x-2) - (x-3)]^2 = 19$$

$$\Leftrightarrow 20x + 1 = 19$$

$$\Leftrightarrow 20x = 18 \Leftrightarrow x = \frac{9}{10}$$

$$b) (x+2)(x^2 - 2x + 4) - x(x^2 - 5) = 15$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 8 - x^3 + 5x = 15$$

$$\Leftrightarrow 5x + 8 = 15 \Leftrightarrow 5x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$$

$$c) (x-1)^3 + (2-x)(4-2x+x^2) + 3x(x+2) = 17$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 + 8 - x^3 + 3x^2 + 6x = 17$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 8 - x^3 + 6x = 17$$

$$\Leftrightarrow 9x + 7 = 17$$

$$\Leftrightarrow 9x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{9}$$

7. Biết $xy = 11$ và $x^2y + xy^2 + x + y = 2016$. Hãy tính giá trị : $x^2 + y^2$

Giải

Ta có: $x^2y + xy^2 + x + y = 2016$

$$xy(x + y) + x + y = 2016$$

$$11(x + y) + (x + y) = 2016$$

$$12(x + y) = 2016 \Rightarrow x + y = 168$$

Mà $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 168^2 - 2.11 = 28202$

8. Cho $a - b = 7$. Tính giá trị biểu thức : $A = a^2(a + 1) - b^2(b - 1) - 3ab(a - b + 1) + ab$

Giải

Ta có : $A = a^3 + a^2 - b^3 + b^2 - 3ab(a - b) - 3ab + ab$

$$= a^3 - 3ab(a - b) - b^3 + a^2 + b^2 - 2ab$$

$$= (a - b)^3 + (a - b)^2 = 7^3 + 7^2 = 392$$

9. Chứng minh rằng với mọi x ta có :

$$a) x(x - 6) + 10 > 0$$

$$b) (x - 3)(x - 5) + 3 > 0$$

$$c) x^2 + x + 1 > 0$$

Giải

$$a) x(x - 6) + 10 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + 1 > 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$b) (x - 3)(x - 5) + 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 18 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)^2 + 2 > 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$c) x^2 + x + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} > 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ (luôn đúng)}$$

10. Tìm x, y biết :

$$a) x^2 - 2x + 5 + y^2 - 4y = 0$$

$$b) 4x^2 + y^2 - 20x - 2y + 26 = 0$$

$$c) 9x^2 + 4y^2 + 4y - 12x + 5 = 0$$

Giải

$$a) x^2 - 2x + 5 + y^2 - 4y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0; (y-2)^2 = 0 \text{ (vì } (x-1)^2, (y-2)^2 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 1; y = 2$$

$$b) 4x^2 + y^2 - 20x - 2y + 26 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 20x + 25) + (y^2 - 2y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-5)^2 + (y-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-5)^2 = 0 \text{ và } (y-1)^2 = 0 \text{ (vì } (2x-5)^2, (y-1)^2 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}; y = 1$$

$$c) 9x^2 + 4y^2 + 4y - 12x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (9x^2 - 12x + 4) + (4y^2 + 4y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)^2 + (2y+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)^2 = 0 \text{ và } (2y+1)^2 = 0 \text{ (vì } (3x-2)^2, (2y+1)^2 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}; y = -\frac{1}{2}$$

11. Chứng minh không tồn tại x; y thỏa mãn:

$$a) x^2 + 4y^2 + 4x - 4y + 10 = 0 \quad b) 3x^2 + y^2 + 10x - 2xy + 29 = 0$$

$$c) 4x^2 + 2y^2 + 2y - 4xy + 5 = 0$$

Giải

$$a) x^2 + 4y^2 + 4x - 4y + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + 4y^2 - 4y + 1 + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (2y-1)^2 + 5 = 0$$

$$\text{Mà } (x+2)^2 + (2y-1)^2 + 5 \geq 5 > 0$$

Suy ra không có x, y thỏa mãn đề bài.

$$b) 3x^2 + y^2 + 10x - 2xy + 29 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + 2x^2 + 10x + 29 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + 2(x+2,5)^2 + 16,5 = 0$$

$$\text{Mà } (x-y)^2 + 2(x+2,5)^2 + 16,5 \geq 16,5 > 0$$

Suy ra không có x, y thỏa mãn đề bài.

$$c) 4x^2 + 2y^2 + 2y - 4xy + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 4xy + y^2) + (y^2 + 2y + 1) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - y)^2 + (y + 1)^2 + 4 = 0$$

$$\text{Mà } (2x - y)^2 + (y + 1)^2 + 4 \geq 4 > 0$$

Suy ra không có x, y thỏa mãn đề bài.

12. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$a) A = 15 - 8x - x^2 \qquad b) B = 4x - x^2 + 2 \qquad c) C = x^2 - y^2 + 4x - 4y + 2$$

Giải

$$a) \text{ Ta có : } A = 15 - 8x - x^2 = 31 - (16 + 8x + x^2) = 31 - (4 + x)^2 \leq 31$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 31 khi $x = -4$

$$b) \text{ Ta có } B = 6 - (4 - 4x + x^2) = 6 - (2 - x)^2 \leq 6$$

Vậy giá trị lớn nhất của B là 6 khi $x = 2$

$$c) \text{ Ta có : } C = 10 - (x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 4y + 4) = 10 - (x - 2)^2 - (y + 2)^2 \leq 10$$

Vậy giá trị lớn nhất của C là 10 khi $x = 2; y = -2$

13. Cho các số thực $x; y$ thỏa mãn điều kiện $x + y = 3; x^2 + y^2 = 17$. Tính giá trị biểu thức

$$x^3 + y^3.$$

Giải

Ta có:

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 17 + 2xy = 9$$

$$\Leftrightarrow xy = \frac{9 - 17}{2} = -4$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 27 - 3 \cdot (-4) \cdot 3 = 63$$

14. Cho $x + y = a + b$ (1) và $x^3 + y^3 = a^3 + b^3$ (2) Chứng minh rằng : $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

Giải

$$\text{Ta có hằng đẳng thức : } (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \quad (1)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \quad (2)$$

$$\text{Kết hợp với (1) và (2) suy ra } xy = ab \quad (3)$$

Mặt khác, từ (1) suy ra $(x + y)^2 = (a + b)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy = a^2 + b^2 + 2ab$

Kết hợp với (3) suy ra : $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

15. Cho $a + b + c = 2p$. Chứng minh rằng:

$$a) 2bc + b^2 + c^2 - a^2 = 4p(p - a) \quad b) (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - p^2$$

Giải

$$\begin{aligned} a) \text{ Ta có: } 2bc + b^2 + c^2 - a^2 &= (b + c)^2 - a^2 \\ &= (b + c + a)(b + c - a) = 2p(2p - a) = 4p(p - a) \end{aligned}$$

Vế trái bằng vế phải. Điều phải chứng minh

$$\begin{aligned} b) \text{ Ta có: } (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 &= p^2 - 2ap + a^2 + p^2 - 2pb + b^2 + p^2 - 2pc + c^2 \\ &= 3p^2 - 2p(a + b + c) + a^2 + b^2 + c^2 \\ &= 3p^2 - 2p \cdot 2p + a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 - p^2 \end{aligned}$$

Vế trái bằng vế phải. Điều phải chứng minh

16. Cho $A = \underbrace{99\dots9}_{2020 \text{ chữ số } 9}$. Hãy so sánh tổng các chữ số của A^2 với tổng các chữ số của A.

Giải

Ta có :

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{99\dots9}_{2020 \text{ chữ số } 9} = 10^{2020} - 1 \text{ nên } A^2 = (10^{2020} - 1)^2 \\ &= 10^{4040} - 2 \cdot 10^{2020} + 1 = \underbrace{99\dots9800\dots01}_{2019 \quad 2019} \end{aligned}$$

Tổng các chữ số của A^2 là : $9 \times 2019 + 8 + 1 = 18180$

Tổng các chữ số của A là : $9 \times 2020 = 18180$

Vậy tổng các chữ số của A^2 và tổng các chữ số của A bằng nhau.

17. Chứng minh rằng:

Nếu $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = (a + b - 2c)^2 + (b + c - 2a)^2 + (c + a - 2b)^2$ thì $a = b = c$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Giải

$$(a + b - 2c)^2 - (a - b)^2 + (b + c - 2a)^2 - (b - c)^2 + (c + a - 2b)^2 - (c - a)^2 = 0(*)$$

Áp dụng hằng đẳng thức : $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ ta có :

$$(a+b-2c)^2 - (a-b)^2 = (2a-2c)(2b-2c) = 4(a-c)(b-c)$$

$$(b+c-2a)^2 - (b-c)^2 = (2b-2a)(2c-2a) = 4(b-a)(c-a)$$

$$(c+a-2b)^2 - (c-a)^2 = (2c-2b)(2a-2b) = 4(c-b)(a-b)$$

Kết hợp với (*) ta có :

$$4(a-c)(b-c) + 4(b-a)(c-a) + 4(c-b)(a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-c)(b-c) + (b-a)(c-a) + (c-b)(a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow ab - ac - bc + c^2 + bc - ba - ac + a^2 + ac - bc - ab + b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

$$\begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \\ c-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c$$

18. Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh rằng $n^4 + 4^n$ là hợp số

(Thi học sinh giỏi toán 9, tỉnh Quảng Bình, năm học 2012-2013)

Giải

- Với n là số chẵn $\Rightarrow n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) thì $n^4 + 4^n = 16k^4 + 4^{2k} : 4$ nên $n^4 + 4^n$ là hợp số

- Với n là số lẻ. Đặt $n = 2k - 1$ ($k \in \mathbb{N}^*, k > 1$) thì ta có:

$$\begin{aligned} n^4 + 4^n &= n^4 + 2 \cdot n^2 \cdot 2^n + 4^n - n^2 \cdot 2^{n+1} \\ &= (n^2 + 2^n)^2 - n^2 \cdot 2^{2k} = (n^2 + 2^n - 2^k \cdot n)(n^2 + 2^n + 2^k \cdot n) \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} n^2 + 2^n - 2^k \cdot n &= n^2 - 2^k \cdot n + 2^{2k-2} + 2^n - 2^{2k-2} = (n - 2^{k-1})^2 + 2^{2k-1} - 2^{2k-2} \\ &= (n - 2^{k-1})^2 + 2^{2k-2} > 1 \end{aligned}$$

mà $n^2 + 2^n + 2^k \cdot n > n^2 + 2^n - 2^k \cdot n$ suy ra $n^4 + 4^n$ là hợp số

Vậy $n^4 + 4^n$ là hợp số với n là số tự nhiên lớn hơn 1.

19.

a) Cho $a + b = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = a^2 + b^2$

b) Cho $x + 2y = 8$. Tìm giá trị lớn nhất của $B = xy$

Giải

a) Ta có: $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$$\Rightarrow 4 + (a-b)^2 = 2A$$

$$\Rightarrow 4 \leq 2A \Rightarrow A \geq 2$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2 khi $a = b = 1$

b) Từ $x + 2y = 8 \Rightarrow x = 8 - 2y$ suy ra

$$B = (8 - 2y)y = 8y - 2y^2 = 8 - 8 + 8y - 2y^2$$

$$B = 8 - 2(2 - y)^2 \leq 8$$

Vậy giá trị lớn nhất của B là 8 khi $y = 2; x = 4$

20. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 3(x^2 + y^2)$ biết $x^2 + y^2 = xy + 12$

(Tuyển sinh vào lớp 10, THPT chuyên Bình Dương, năm học 2014-2015)

Giải

Từ giả thiết, ta có $(x + y)^2 = 3xy + 12 \Leftrightarrow 6xy = 2(x + y)^2 - 24$

Ta có :

$$A = 3(x^2 + y^2) = 3(x + y)^2 - 6xy = 3(x + y)^2 - 2(x + y)^2 + 24 = (x + y)^2 + 24$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 24 khi $x + y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$

21. Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn: $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 2010$. Tính giá trị của

biểu thức $A = |a - b| + |b - c| + |c - a|$

Giải

Đặt $a - b = x; b - c = y; c - a = z \Rightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow z = -(x + y)$

Ta có: $x^3 + y^3 + z^3 = 210 \Leftrightarrow x^3 + y^3 - (x + y)^3 = 210 \Leftrightarrow -3xy(x + y) = 210$

$$\Leftrightarrow xyz = 70. \text{ Do } x, y, z \text{ là số nguyên có tổng bằng } 0 \text{ và } xyz = 70 = (-2)(-5).7$$

nên $x, y, z \in \{-2; -5; 7\} \Rightarrow A = |a - b| + |b - c| + |c - a| = 14$

22. Chứng minh không tồn tại hai số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 - y^2 = 2020$

Giải

Từ $x^2 - y^2 = 2020$ suy ra $x; y$ cùng chẵn hoặc cùng lẻ

TH1: Nếu $x; y$ cùng chẵn. Đặt $x = 2m; y = 2n$

$$4m^2 - 4n^2 = 2018 \Rightarrow 2m^2 - 2n^2 = 1009$$

Vế trái chẵn, còn vế phải lẻ. Vô lí

TH2: Xét $x; y$ cùng lẻ. Đặt $x = 2k + 1; y = 2q + 1$

$$\text{Ta có : } (2m+1)^2 - (2n+1)^2 = 2018 \Leftrightarrow 4m^2 + 4m - 4n^2 - 4n = 2018$$

Vế trái chia hết cho 4, vế phải không chia hết cho 4, vô lí

Vậy không tồn tại số nguyên $x; y$ thỏa mãn $x^2 - y^2 = 2020$.

D. PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

CẦN NHỚ

- 1) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- 2) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
- 3) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
- 4) $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
- 5) $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
- 6) $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$
- 7) $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

BÀI TỰ LUYỆN

1. Khai triển các biểu thức sau:

a) $\left(\frac{1}{2}x - 3\right)^3$; b) $(2x^2 + 3y)^3$

2. Tính giá trị của mỗi biểu thức sau tại giá trị chỉ ra:

a) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$ tại $x = 6$;

b) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ tại $x = 22$.

3. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) - (54 + x^3)$;

b) $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2) - (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$.

4. Tính nhanh giá trị các biểu thức sau:

a) $34^2 + 66^2 + 68.66$;

b) $74^2 + 24^2 - 48.74$.

5. So sánh các cặp số sau:

a) $A = 2008.2010$ với $B = 2009^2$;

b) $A = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ với $B = 2^{32}$.

6. Tìm x , biết:

a) $16x^2 - (4x - 5)^2 = 15$

b) $(2x + 3)^2 - 4(x - 1)(x + 1) = 49$

c) $(2x + 1)(1 - 2x) + (1 - 2x)^2 = 18$

d) $2(x + 1)^2 - (x - 3)(x + 3) - (x - 4)^2 = 0$

e) $(x - 5)^2 - x(x - 4) = 9$

f) $(x - 5)^2 + (x - 4)(1 - x) = 0$

7. Chứng minh đẳng thức $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

8. Tìm các giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = x^2 - 2x + 5$

b) $B = x^2 - x + 1$

c) $C = (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6)$

d) $D = x^2 + 5y^2 - 2xy + 4y + 3$

9. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A = -x^2 - 4x - 2$

b) $B = -2x^2 - 3x + 5$

c) $C = (2 - x)(x + 4)$

d) $D = -8x^2 + 4xy - y^2 + 3$

10. Chứng minh rằng các giá trị của các biểu thức sau luôn dương với mọi giá trị của biến.

a) $A = 25x^2 - 20x + 7$

b) $B = 9x^2 - 6xy + 2y^2 + 1$

c) $E = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 6$

d) $D = x^2 - 2x + 2$

11. Chứng minh rằng tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 là một số chính phương.

LỜI GIẢI PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

1.

a) Ta có: $\left(\frac{1}{2}x - 3\right)^3 = \left(\frac{1}{2}x\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}x\right)^2 \cdot 3 + 3\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot 3^2 - 3^3 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{27}{2}x - 27$.

b) Ta có: $(2x^2 + 3y)^3 = (2x^2)^3 + 3(2x^2)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x^2 \cdot (3y)^2 + (3y)^3$
 $= 8x^6 + 36x^4y + 54x^2y^2 + 27y^3$.

2.

a) Ta có: $x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = x^3 + 3x^2 \cdot 4 + 3x \cdot 4^2 + 4^3 = (x + 4)^3$.

Thay $x = 6$ vào biểu thức cuối ta được kết quả là 1000.

b) Ta có: $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 - 2^3 = (x - 2)^3$.

Thay $x = 22$ vào biểu thức cuối ta được kết quả là 8000.

3.

a) Ta có: $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) - (54 + x^3) = (x^3 + 3^3) - (54 + x^3) = x^3 + 27 - 54 - x^3 = -27$.

b) Ta có: $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2) - (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$
 $= (2x)^3 + y^3 - \left((2x)^3 - y^3 \right) = (2x)^3 + y^3 - (2x)^3 + y^3 = 2y^3.$

4.

a) Ta có: $34^2 + 66^2 + 68.66 = 34^2 + 2.34.66 + 66^2 = (34 + 66)^2 = 100^2 = 10000.$

b) Ta có: $74^2 + 24^2 - 48.74 = 74^2 - 2.24.74 + 24^2 = (74 - 24)^2 = 50^2 = 2500.$

5.

a) Ta có: $A = 2008.2010 = (2009 - 1)(2009 + 1) = 2009^2 - 1.$

Vậy $A < B.$

b) Ta có: $A = A(2 - 1) = (2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$
 $= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$
 $= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) = (2^8 - 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$
 $= (2^{16} - 1)(2^{16} + 1) = 2^{32} - 1.$

Vậy $A < B.$

6.

a) $x = 1;$ b) $x = 3;$ c) $x = -4;$

d) $x = \frac{5}{12}$ e) $x = \frac{8}{3}$ f) $x = \frac{21}{5}$

7. Biến đổi VP = VT hoặc ngược lại.

8. a) $A = (x - 1)^2 + 4 \geq 4$ b) $B = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

c) $C = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) = (x^2 + 5x)^2 - 36 \geq -36$

d) $D = (x - y)^2 + (2y + 1)^2 + 2 \geq 2$

9. a) $A = 2 - (x + 2)^2 \leq 2$ b) $B = \frac{49}{8} - 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 \leq \frac{49}{8}$

c) $C = 9 - (x + 1)^2$ d) $D = 3 - (2x - y)^2 - 4x^2 \leq 3$

10.a) $A = (5x - 2)^2 + 3 \geq 3 > 0$ b) $B = (3x - y)^2 + y^2 + 1 \geq 1 > 0$

c) $E = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + 1 \geq 1 > 0$ d) $D = (x - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$

11. Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp lần lượt là $x - 2; x - 1; x; x + 1$ ($x \in \mathbb{N}; x \geq 2$)

Ta có: $A = (x - 2)(x - 1)x(x + 1) = (x - 2)(x + 1)x(x - 1) = (x^2 - x - 2)(x^2 - x)$

đặt $x^2 - x = t$ khi đó $A + 1 = (t - 2)t + 1 = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2$

$A + 1 = (x^2 - x - 1)^2$. Vậy $A + 1$ là một số chính phương.

===== TOÁN HỌC SƠ ĐỒ =====