TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

THƯ VIỆN TOÁN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9

Môn Toán (Vòng 1 – Đợt 1)

Ngày 27 tháng 3 năm 2021

Thời gian 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (3,0 điểm)

1. Giải phương trình: $8x^9 + x^3 = 3x^2 + 4x + 2.$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)(x+1)(y+1) = 8 \\ 7y^3 + 6xy(x+2y) = 25 \end{cases}.$

Câu 2. (3,0 điểm)

1. Tìm x, y nguyên không âm thỏa mãn:

$$(x+y)(x^3+1) = x^4 + 3.$$

2. Với $0 < a \le b \le 2,\ b + 2a \ge 2ab,$ tìm giá trị lớn nhất của

$$M = a^4 + b^4.$$

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Các điểm E, F lần lượt thuộc các cạnh CA, AB sao cho nếu đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại G khác A thì G nằm trên cung AB không chứa C của (O).

1. Chứng minh rằng hai tam giác GEC và GFB đồng dạng.

2. Gọi AD là đường kính của (O). GD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GEF tại K khác G.

Chứng minh rằng: $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AK}{AD}.$

3. Giả sử trung trực của EF đi qua trung điểm của BC. Chứng minh rằng: $\dfrac{GE}{GF} = \dfrac{KE}{KF}.$

Câu 4. (1,0 điểm)

Chúng ta thêm dấu "+" hoặc "−" vào các dãy số $1, 2, 3, \dots, 2005$ sao cho tổng đại số của dãy số nhận được là không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất của các tổng đại số nhận được.

---**HẾT**---

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

1. Giải phương trình: $8x^9 + x^3 = 3x^2 + 4x + 2.$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)(x+1)(y+1) = 8 \\ 7y^3 + 6xy(x+2y) = 25 \end{cases}.$

Lời giải

1. Ta có phương trình tương đương:

$$\begin{aligned}
&(2x^3)^3 + 2x^3 = x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \\
&\Leftrightarrow (2x^3)^3 + 2x^3 = (x+1)^3 + (x+1) \\
&\Leftrightarrow (2x^3)^3 - (x+1)^3 + 2x^3 - (x+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[2x^3 - (x+1)\right]\left[4x^6 + 2x^3(x+1) + (x+1)^2 + 1\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow 2x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 2x + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 1
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1.$

2. Ta có:

$$\begin{aligned}
&x^3 + 8y^3 + 6xy(x+2y) = x^3 + y^3 + \left[7y^3 + 6xy(x+2y)\right] \\
&\Leftrightarrow x^3 + 8y^3 + 6xy(x+2y) = x^3 + y^3 + 25 \\
&\Leftrightarrow x^3 + 8y^3 + 6xy(x+2y) = x^3 + y^3 + 1 + 24 \\
&\Leftrightarrow x^3 + 8y^3 + 6xy(x+2y) = x^3 + y^3 + 1 + 3(x+y)(x+1)(y+1) \\
&\Leftrightarrow (x+2y)^3 = (x+y+1)^3 \\
&\Leftrightarrow x + 2y = x + y + 1 \\
&\Leftrightarrow y = 1.
\end{aligned}$$

Với $y = 1,$ ta có: $7 + 6x(x+2) = 25 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right..$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x;y) = (1;1), (-3;1).$

Câu 2.

1. Tìm $x,\ y$ nguyên không âm thỏa mãn:

$$(x+y)(x^3+1) = x^4 + 3.$$

2. Với $0 < a \le b \le 2,\ b + 2a \ge 2ab,$ tìm giá trị lớn nhất của

$$M = a^4 + b^4.$$

Lời giải

1. Nếu $x = y = 0$ thì phương trình vô nghiệm do đó $x,\ y \neq 0.$ Khi đó phương trình tương đương:

$$x + y = \frac{x^4 + 3}{x^3 + 1} \Leftrightarrow y = \frac{3 - x}{x^3 + 1}.$$

Do $x,\ y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(9 + 3x + x^2\right) y = \frac{27 - x^3}{x^3 + 1} = \frac{28}{x^3 + 1} - 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 28 \vdots \left(x^3 + 1\right).$

Do $x \geq 0 \Rightarrow x^3 + 1 \in \{1; 2; 4; 7; 28\} \Leftrightarrow x \in \{0; 1; 3\}.$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 3.$

Với $x = 1 \Rightarrow y = 1.$

Với $x = 3 \Rightarrow y = 0.$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $(x; y) = (0; 3),\ (1; 1),\ (3; 0).$

2. Ta có: $b + 2a \geq 2ab \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq 2.$

Suy ra:

$$17 = a^4\left(\frac{1}{a^4} + \frac{16}{b^4}\right) + \left(b^4 - a^4\right)\frac{16}{b^4} \geq a^4 \cdot \frac{1}{2^3}\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right)^4 + \left(b^4 - a^4\right) \cdot \frac{16}{2^4} \geq 2a^4 + b^4 - a^4 = a^4 + b^4.$$

Hay $a^4 + b^4 \leq 17.$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1,\ b = 2.$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 17 đạt được khi $a = 1,\ b = 2.$

Câu 3.

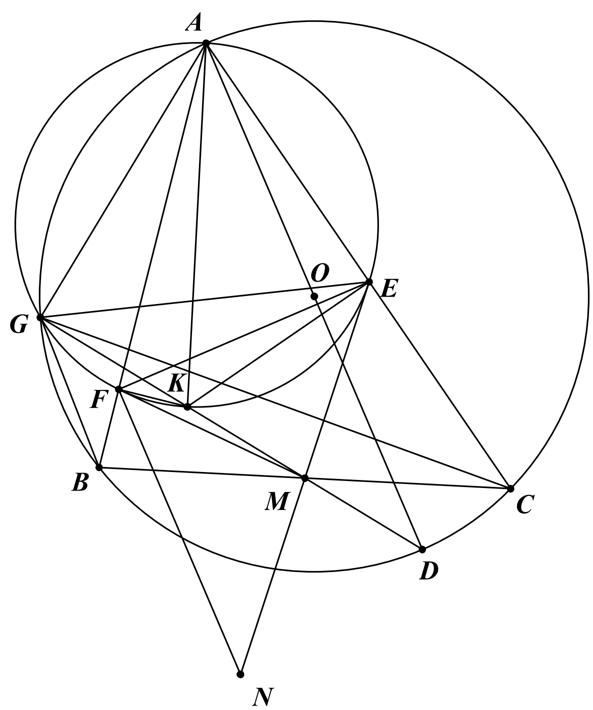
Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Các điểm E, F lần lượt thuộc các cạnh CA, AB sao cho nếu đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại G khác A thì G nằm trên cung AB không chứa C của (O).

1. Chứng minh rằng hai tam giác GEC và GFB đồng dạng.

2. Gọi AD là đường kính của (O). GD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GEF tại K khác G. Chứng minh rằng: $\frac{EF}{BC} = \frac{AK}{AD}.$

3. Giả sử trung trực của EF đi qua trung điểm của BC. Chứng minh rằng: $\frac{GE}{GF} = \frac{KE}{KF}.$

Lời giải



1. Do tứ giác $GAEF$ nội tiếp nên $\angle GFA = \angle GEA \Rightarrow \angle GFB = \angle GEC$ (1).

Mặt khác tứ giác $GACB$ nội tiếp nên $\angle GBA = \angle GCA \Rightarrow \angle GBF = \angle GCE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra hai tam giác GEC và GFB đồng dạng.

2. Do $\Delta GEC \sim \Delta GFB \Rightarrow \dfrac{GE}{GF} = \dfrac{GC}{GB}$. Mà $\angle FGE = \angle FAE = \angle BAC = \angle BGC$.

Suy ra: $\Delta GEF \sim \Delta GCB \Rightarrow \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{R_{\Delta GEF}}{R_{\Delta CB}}$. Trong $R_{\Delta XYZ}$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔXYZ.

Mặt khác $\angle AGK = \angle AGD = 90^0$ nên AK, AD lần lượt là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔGEF và ΔGCB. Hay $\dfrac{AK}{AD} = \dfrac{R_{\Delta GEF}}{R_{\Delta GBC}}$.

Từ đây ta có: $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AK}{AD}$.

3. Gọi M là trung điểm của MC thì $ME = MF$. Lấy N đối xứng với E qua M thì $MF = ME = MN$ hay tam giác ΔFNE vuông tại F.

Suy ra: $\angle BFN = \angle KFE$. Do tính đối xứng nên $BN \parallel CE \perp KE$, do đó $\angle BNF = \angle KEF$.

Suy ra: hai tam giác KEF và BNF đồng dạng.

Từ đó ta có: $\dfrac{KE}{KF} = \dfrac{BN}{BF} = \dfrac{BC}{FB} = \dfrac{GE}{GF}$.

Câu 4.

Chúng ta thêm dấu $"+"$ hoặc $"-"$ vào các dãy số $1, 2, 3,..., 2005$ sao cho tổng đại số của dãy số nhận được là không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất của các tổng đại số nhận được.

Lời giải

Ta có: $1, 2, 3,..., 2005$ gồm 1002 số chẵn và 1003 số lẽ nên tổng hoặc hiệu giữa 2005 số là một số lẽ.

Ta có: $1+\left(2-3-4+5\right)+\left(6-7-8+9\right)+...+\left(2002-2003-2004+2005\right)=1$ là số lẽ nhỏ nhất.