Chuyên đề 1: RÚT GỌN VÀ TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

RÚT GỌN BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Để rút gọn biểu thức ta thường thực hiện các bước sau:

- Đặt điều kiện để biểu thức có nghĩa. Lưu ý:

  $\sqrt{a}$ có nghĩa $\Leftrightarrow a \geq 0$;

  $\frac{a}{b}$ có nghĩa $\Leftrightarrow b \neq 0$;

  $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0$ và $a \neq b$.
- Vận dụng các phép toán đối với đa thức, phân thức, thứ tự thực hiện các phép tính, các hằng đẳng thức đáng nhớ, …

I. RÚT GỌN PHÂN THỨC HỮU TỈ

Phương pháp: Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử, rồi rút gọn nhân tử chung (lưu ý phải đặt điều kiện cho mẫu thức khác 0).

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{x^4 - x^3 - 2x - 4}{2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x - 4}.$$

Lời giải:

Ta có:

$$x^4 - x^3 - 2x - 4 = \left(x^4 - 4\right) - \left(x^3 + 2x\right) = \left(x^2 + 2\right)\left(x^2 - 2\right) - x\left(x^2 + 2\right)$$

$$= \left(x^2 + 2\right)\left(x^2 - x - 2\right) = \left(x^2 + 2\right)\left(x + 1\right)\left(x - 2\right).$$

$$2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x - 4 = \left(2x^4 - 8\right) - \left(3x^3 + 6x\right) + \left(2x^2 + 4\right)$$

$$= 2\left(x^4 - 4\right) - 3x\left(x^2 + 2\right) + 2\left(x^2 + 2\right)$$

$$= \left(x^2 + 2\right)\left(2x^2 - 3x - 2\right) = \left(x^2 + 2\right)\left(x - 2\right)\left(2x + 1\right).$$

Điều kiện xác định A là $x \neq 2$ và $x \neq -\frac{1}{2}$. Ta có:

$$A = \frac{\left(x^2 + 2\right)\left(x + 1\right)\left(x - 2\right)}{\left(x^2 + 2\right)\left(x - 2\right)\left(2x + 1\right)} = \frac{x + 1}{2x + 1}.$$

Vậy với $x \neq 2, x \neq -\frac{1}{2}$ thì $A = \frac{x + 1}{2x + 1}$. □

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức:

$$B=\frac{2xy-x^2+z^2-y^2}{x^2+z^2-y^2+2xz}.$$

Lời giải:

Ta có: $B=\dfrac{z^2-\left(x^2-2xy+y^2\right)}{\left(x^2+2xz+z^2\right)-y^2}=\dfrac{z^2-\left(x-y\right)^2}{\left(x+z\right)^2-y^2}=\dfrac{\left(z+x-y\right)\left(z-x+y\right)}{\left(x+z+y\right)\left(x+z-y\right)}$.

Với $x+y+z\neq 0, x-y+z\neq 0$ thì $B=\dfrac{z-x+y}{x+y+z}$. □

II. RÚT GỌN BIỂU THỨC CÓ CHỨA CĂN THỨC

➢ Ta thường dùng các hằng đẳng thức:

$a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ với $a\geq 0, b\geq 0$.

$a\sqrt{a}+b\sqrt{b}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)$ với $a\geq 0, b\geq 0$.

$a\sqrt{a}-b\sqrt{b}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)$ với $a\geq 0, b\geq 0$.

$$\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=\begin{cases}a-b,\ a\geq b\\ b-a,\ a<b\end{cases}.$$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức:

$$C=x+2y-\sqrt{x^2-4xy+4y^2}.$$

Lời giải:

Ta có: $C=x+2y-\sqrt{\left(x-2y\right)^2}=x+2y-\left|x-2y\right|$.

Nếu $x\geq 2y$ thì $\left|x-2y\right|=x-2y$. Do đó $C=x+2y-x+2y=4y$.

Nếu $x<2y$ thì $\left|x-2y\right|=-x+2y$. Do đó $C=x+2y+x-2y=2x$.

Vậy $C=\begin{cases}4y,\ x\geq 2y\\ 2x,\ x<2y\end{cases}$. □

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức:

$$D=\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}\right)\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}.$$

Lời giải: Điều kiện xác định $a\geq 0, b\geq 0, a\neq b$. Khi đó

$$D=\left(\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{ab}+b\right)}$$

$$=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\frac{a+\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}+b}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}+b}=\frac{\sqrt{ab}}{a-\sqrt{ab}+b}.$$

Vậy với $a\ge 0, b\ge 0, a\ne b$ thì $D=\dfrac{\sqrt{ab}}{a-\sqrt{ab}+b}$. □

Ví dụ 5: Rút gọn biểu thức:

$$E=\left(\frac{\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{2}}{1-\sqrt[4]{2}}+\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}\right)^2-\frac{\sqrt{1+\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}}}{1+\sqrt{2}}.$$

Lời giải:

Đặt $\sqrt[4]{2}=a$ thì $a^4=2$, $\sqrt[4]{4}=a^2=\sqrt{2}$. Ta có:

$$E=\left(\frac{a^2-a}{1-a}+\frac{1+a^2}{a}\right)^2-\frac{\sqrt{1+\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{a^4}}}{1+a^2}$$

$$=\left(-a+\frac{1+a^2}{a}\right)^2-\frac{1+a^2}{a^2\left(1+a^2\right)}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2}=0.$$

Vậy $E=0$. □

Lời giải. Đặt $a=\sqrt[4]{5}$ thì $a^4=\sqrt{5}$: $a^2=\sqrt[4]{25}$; $a^3=\sqrt[4]{125}$. Ta có

$$\frac{1}{4-3\sqrt[4]{5}+2\sqrt[4]{25}+\sqrt[4]{125}}=\frac{-1}{\left(a^3+3a\right)-\left(2a^2+4\right)}=\frac{-\left(a^3+3a+2a^2+4\right)}{\left(a^3+3a\right)^2-\left(2a^2+4\right)^2}$$

$$=\frac{-\left(a^3+2a^2+3a+4\right)}{a^6+6a^4+9a^2-4a^4-16a^2-16}=\frac{a^3+2a^2+3a+4}{2a^2+6}$$

$$=\frac{\left(a^3+2a^2+3a+4\right)\left(a^2-3\right)}{2\left(a^4-9\right)}=\frac{a^5+2a^4-2a^2-9a-12}{-8}=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2.$$

Suy ra $F=2\sqrt{\left(\dfrac{a+1}{2}\right)^2}=a+1=\sqrt[4]{5}+1$. □

- Đối với biểu thức có dạng tổng hay hiệu của hai biểu thức liên hợp bậc hai $M=\sqrt{a+b\sqrt{c}}$, $M'=\sqrt{a-b\sqrt{c}}$, ta có $\left(M+M'\right)^2=2a+2\sqrt{a^2-b^2c}$; $\left(M-M'\right)^2=2a-2\sqrt{a^2-b^2c}$.

Vì vậy có thể dùng phép luỹ thừa bậc hai để khử bớt căn.

♦ **Thí dụ 7.** *Rút gọn biểu thức*

$$G=\sqrt{a+b+c+2\sqrt{ac+bc}}+\sqrt{a+b+c-2\sqrt{ac+bc}},$$

trong đó a, b, c *là các số không âm.*

Lời giải. Bình phương biểu thức G ta có

$$G^2=2\left(a+b+c\right)+2\sqrt{\left(a+b-c\right)^2-4\left(ac+bc\right)}$$

$$=2\left(a+b+c\right)+2\sqrt{\left(a+b-c\right)^2}=2\left(a+b+c\right)+2\left|a+b+c\right|.$$

Nếu $a+b\ge c$ thì $G^2=2\left(a+b+c\right)+2\left(a+b-c\right)=4\left(a+b\right)\Rightarrow G=2\sqrt{a+b}$.

Nếu $a+b\le c$ thì $G^2=2\left(a+b+c\right)-2\left(a+b-c\right)=4c\Rightarrow G=2\sqrt{c}$.

Vậy $G=\begin{cases}2\sqrt{a+b}\ khi\ a+b\ge c\\ 2\sqrt{c}\ khi\ a+b\le c\end{cases}$.□

- Đối với biểu thức có dạng tổng hay hiệu của hai biểu thức liên hợp bậc ba $M=\sqrt[3]{a+b\sqrt{c}}$, $M'=\sqrt[3]{a-b\sqrt{c}}$, ta có
  $$\left(M+M'\right)^3=M^3+M'^3+3MM'\left(M+M'\right)=2a+3\sqrt[3]{a^2-b^2c}\left(M+M'\right)$$
  nên $M+M'$ là một nghiệm của phương trình
  $$x^3-3\sqrt[3]{a^2-b^2c}x-2a=0.$$
  Tương tự $M-M'$ là một nghiệm của phương trình
  $$x^3+3\sqrt[3]{a^2-b^2c}x-2a=0.$$
  Vì vậy có thể dùng luỹ thừa bậc ba để khử bớt căn.

  ♦ **Thí dụ 8.** *Rút gọn biểu thức*
  $$H=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}.$$
  Lời giải. Lập phương biểu thức H ta có
  $$H^3=20-3\sqrt[3]{10^2-6^2.3}.H\Leftrightarrow H^3+6H-20=0\Leftrightarrow\left(H-2\right)\left(H^2-2H+10\right)=0.$$
  Do $H^2-2H+10=\left(H-1\right)^2+9>0$ nên suy ra $H-2=0\Leftrightarrow H=2$. □
- Khi gặp biểu thức chứa căn bậc hai, nếu biến đổi được thành $\sqrt{A^2}=\left|A\right|$ thì việc thực hiện phép tính sẽ đơn giản hơn nhiều.

Xuất phát từ đẳng thức

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{ac}+\frac{2}{bc}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2\left(a+b+c\right)}{abc}.$$

Nếu $a+b+c=0$ thì $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

Suy ra: Với $abc\neq 0$, $a+b+c=0$ thì

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right| \qquad (*)$$

Vận dụng đẳng thức (*) vào rút gọn biểu thức chứacăn rất hiệu quả.

♦ **Thí dụ 9.** *Cho a, b, c là các số hữu tỉ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng* $S=\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}$ *là các số hữu tỷ.*

Lời giải. Nhận thấy $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$ và $a-b\neq 0$, $b-c\neq 0$, $c-a\neq 0$. Áp dụng (*) cho ba số $a-b$, $b-c$, $c-a$ ta có

$$S=\left|\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right|.$$

Mà a, b, c là các số hữu tỉ đôi một khác nhau nên S phải là số hữu tỉ. □

♦ **Thí dụ 10.** *Rút gọn biểu thức*

$$P=\sqrt{\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}+\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}+\frac{1}{(x^2+y^2)^2}}}.$$

Lời giải. Điều kiện $x\neq 0$, $y\neq 0$, $x\neq -y$. Nhận thấy $x^2+y^2+\left(-x^2-y^2\right)=0$. Áp dụng (*) cho ba số x^2, y^2, $-\left(x^2+y^2\right)$ ta được

$$\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}+\frac{1}{(x^2+y^2)^2}}=\left|\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{-\left(x^2+y^2\right)}\right|=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Do đó $P=\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}}$.

Lại áp dụng (*) với ba số x, y, $-(x+y)$ ta có

$$P=\left|\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right|=\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{x+y}\right|.□$$

♦ **Thí dụ 11.** Tính tổng gồm 2010 số hạng

$$S=\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2011^2}+\frac{1}{2012^2}}.$$

Lời giải. Mỗi số hạng của tổng có dạng

$$\sqrt{1+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}}=\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{(-n)^2}}=1+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\ \left(n=3,\ldots,2012\right).$$

Từ đó, ta có

$$S=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}\right)=2010+\frac{1}{2}-\frac{1}{2012}=2010\frac{1005}{2012}.\square$$

III – VẬN DỤNG TÍNH CHẤT NGHIỆM CỦA ĐA THỨC ĐỂ RÚT GỌN BIỂU THỨC HỮU TỈ

1. Cơ sở lí thuyết

Mệnh đề

a) Nếu nhị thức dạng $f(x)=ax+b$ (a, b là các tham số) có hai nghiệm phân biệt thì $a=b=0$, tức là $f(x)$ đồng nhất bằng 0.

b) Nếu tam thức $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c là các tham số) có ba nghiệm đôi một khác nhau thì $a=b=c=0$, tức là $f(x)$ đồng nhất bằng 0.

Chứng minh

a) Giả sử với $x_1\neq x_2$ mà $f(x_1)=f(x_2)=0$ thì $ax_1+b=0$ và $ax_2+b=0$. Từ đó $a(x_1-x_2)=0$. Vì $x_1-x_2\neq 0$ nên $a=0$ suy ra $b=0$.

b) Giả sử x_1, x_2, x_3 đôi một khác nhau mà $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$ thì $ax_1^2+bx_1+c=0$; $ax_2^2+bx_2+c=0$; $ax_3^2+bx_3+c=0$.

Từ đó suy ra $a\left(x_1^2-x_2^2\right)+b(x_1-x_2)=0$; $a\left(x_1^2-x_3^2\right)+b(x_1-x_3)=0$. Do $x_1\neq x_2$, $x_1\neq x_3$, nên $a(x_1+x_2)+b=0$; $a(x_1+x_3)+b=0$.

Suy ra $a(x_2-x_3)=0$, vì $x_2\neq x_3$ nên $a=0$. Từ đó suy ra $b=0$, $c=0$. ❒

• Khi rút gọn phân thức hữu tỉ, nếu khai triển các phép tính gặp phải những biến đổi phức tạp thì ta nên coi nó như một đa thức theo một biến rồi áp dụng mệnh đề trên. Lúc đó công việc trở nên dễ dàng hơn.

2. Một số thí dụ áp dụng

★ **Thí dụ 12.** *Rút gọn biểu thức*

$$\frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(d-c)(d-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Lời giải. Điều kiện xác định $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$.

Xét đa thức $f(x)=\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.

Khi đó biểu thức đã cho chính là $f(d)$.

Nhận thấy $f(a)=\frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(a-c)(a-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(a-a)(a-b)}{(c-a)(c-b)}=1$.

Tương tự có $f(b)=f(c)=1$.

Như vậy $f(x)-1$ là tam thức dạng Ax^2+Bx+C nhận ba số khác nhau a, b, c làm nghiệm.

Vậy $f(x)-1$ đồng nhất bằng 0, hay $f(x)=1$ với mọi x. Suy ra $f(d)=1$. ❐

★ **Thí dụ 13.** *Đơn giản biểu thức*

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Lời giải. Điều kiện xác định $a \neq -b$, $b \neq -c$, $c \neq -a$.

Sau khi quy đồng mẫu số chung $(a+b)(b+c)(c+a)$, ta có tử thức là

$P=(a-b)(b+c)(c+a)+(b-c)(a+b)(c+a)+(c-a)(a+b)(b+c)+(a-b)(b-c)(c-a)$.

Xét

$f(x)=(x-b)(x+c)(b+c)+(b-c)(x+b)(x+c)+(c-x)(x+b)(b+c)+(x-b)(b-c)(c-x)$

,

thì $P=f(a)$.

Ta thấy

$f(b)=(b-c)(b+b)(b+c)+(c-b)(b+b)(b+c)=0$;

$f(c)=(c-b)(c+c)(b+c)+(b-c)(c+b)(c+c)=0$;

$f(0)=-bc(b+c)+(b-c)bc+bc(b+c)-bc(b-c)=0$.

- Nếu $b \neq c$ và đều khác 0 thì $f(x)$ có dạng $Ax^2 + Bx + C$ nhận b, c, 0 đôi một khác nhau làm nghiệm nên $f(x)$ đồng nhất bằng 0 và $P = 0$.

- Nếu $b = 0$ hoặc $b = c$ hoặc $c = 0$ thì suy ra $P = 0$.

Vậy biểu thức đã cho bằng 0. ❐

BÀI TẬP

1. Rút gọn các biểu thức sau

1) $M = \left(\dfrac{x+2}{3x} + \dfrac{2}{x+1} - 3\right) : \dfrac{2-4x}{x+1} - \dfrac{3x - x^2 + 1}{3x}$.

2) $N = \left(\dfrac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \dfrac{1}{x^2 + 1}\right) . \left(x^4 + \dfrac{1 - x^4}{1 + x^2}\right)$.

3) $P = \dfrac{a^2 - bc}{(a+b)(a+c)} + \dfrac{b^2 - ac}{(b+c)(b+a)} + \dfrac{c^2 - ab}{(c+a)(c+b)}$.

2. Chứng minh rằng với a, b, c là các số đôi một khác nhau thì

$$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2.$$

3. Rút gọn các biểu thức chứa căn thức

1) $A = \dfrac{\sqrt{a^2 + 4a + 4}}{|a| - 2}$.

2) $B = \sqrt{3x - 4 - 2\sqrt{3x - 5}}$.

3) $C = \dfrac{2\sqrt{a} - 9}{a - 5\sqrt{a} + 6} - \dfrac{\sqrt{a} + 3}{\sqrt{a} - 2} - \dfrac{2\sqrt{a} + 1}{3 - \sqrt{a}}$.

4) $D = \dfrac{\sqrt{a}(-a)^3}{1 - a^2} : \left(\dfrac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\dfrac{1 + a\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)$.

4. Rút gọn các biểu thức

1) $E = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{7 + 5\sqrt[4]{5} + 3\sqrt[4]{25} + \sqrt[4]{125}}$.

2) $F = \sqrt[3]{6 + \sqrt{\dfrac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\dfrac{847}{27}}}$.

3) $G=\dfrac{2}{\sqrt[3]{7}}-\sqrt[3]{7}-\dfrac{\sqrt{7}-\dfrac{1}{\sqrt{7}}}{\sqrt[3]{7}-\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{7}}}}+\dfrac{6}{\sqrt{7}\left(\sqrt[3]{7}+\sqrt{\dfrac{1}{7}}\right)}+\dfrac{7}{\sqrt[3]{343}}$.

5. Cho $S_n=\sqrt{1+\left(\underbrace{\overline{99\ldots9}}_{n \text{ ch÷ sè } 9}\right)^2+\left(0,\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ ch÷ sè } 9}\right)^2}$. Hãy viết S_n dưới dạng số thập phân.

TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ MỘT BIẾN

Tính giá trị của biểu thức đại số một biến mà giá trị của biến là một biểu thức phức tạp hoặc thỏa mãn điều kiện nào đó là dạng toán gặp nhiều trong các kì thi vào THPT, thi học sinh giỏi với những bài tập hay và khó, đòi hỏi sự vận dụng linh hoạt và sáng tạo các phép biến đổi. Ta thường sử dụng phương pháp phân tích từ điều kiện đã cho của biến để biến đổi.

✪ **Bài toán 1.** *Tính giá trị của biểu thức*

$$A=\left(x^5+x^4-x^3+1\right)^{2012}+\frac{\left(x^2+x-3\right)^{2012}}{x^5+x^4-x^3-2^{2012}} \text{ khi } x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Lời giải. $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Rightarrow 2x+1=\sqrt{5}\Rightarrow 4x^2+4x+1=5\Rightarrow x^2+x-1=0$.

Ta có $x^5+x^4-x^3+1=x^3\left(x^2+x-1\right)+1=x^3.0+1=1$;

$x^2+x-3=x^2+x-1-1=0-2=-2$;

$x^5+x^4-x^3-2^{2012}=x^3\left(x^2+x-1\right)-2^{2012}=x^3.0-2^{2012}=-2^{2012}$.

Khi đó $A=1^{2012}+\dfrac{(-2)^{2012}}{-2^{2012}}=1+\dfrac{2^{2012}}{-2^{2012}}=0$. ❐

✪ **Bài toán 2.** *Cho biểu thức* $B=\left(4x^5+4x^4-5x^3+5x-2\right)^2+2011$.

Tính giá trị của biểu thức B *khi* $x=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$.

Lời giải. Ta có $x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\Rightarrow 2x+1=\sqrt{2}$

$\Rightarrow (2x+1)^2=2 \Leftrightarrow 4x^2+4x-1=0 \Rightarrow (2x+1)^2=2 \Leftrightarrow 4x^2+4x-1=0$

Suy ra

$$\begin{aligned}&4x^5+4x^4-5x^3+5x-2\\&=x^3\left(4x^2+4x-1\right)-x\left(4x^2+4x-1\right)+4x^2+4x-2\\&=x^3\cdot 0-x\cdot 0+0-1=-1\end{aligned}$$

Vậy $B=(-1)^2+2011=2012$

Bài toán 3: Gọi a là nghiệm dương của phương trình $\sqrt{2}x^2+x-1=0$. Không giải phương trình , hãy tính giá trị của biểu thức $C=\frac{2a-3}{\sqrt{2\left(2a^4-2a+3\right)}+2a^2}$

Lời giải. Do a là nghiệm của phương trình $\sqrt{2}x^2+x-1=0$ nên $\sqrt{2}a^2=1-a$ suy ra $0<a<1$ và $2a^4=1-2a+a^2$. Từ đó, ta có

$$C=\frac{2a-3}{\sqrt{2\left(2a^4-2a+3\right)}+2a^2}=\frac{(2a-3)\left(\sqrt{2\left(2a^4-2a+3\right)}-2a^2\right)}{4a^4-4a+6-4a^4}$$

$$=\frac{(2a-3)\left(\sqrt{2\left(2a^4-2a+3\right)}-2a^2\right)}{-2(2a-3)}=\frac{\sqrt{2\left(2a^4-2a+3\right)}-2a^2}{-2}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2(2-u)^2}-2u^2\right)=-\frac{2-a}{\sqrt{2}}+a^2=\frac{a-2}{\sqrt{2}}+\frac{1-a}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bài toán 4: Chứng minh rằng phương trình $x^2+x-1=0$ có hai nghiệm trái dấu. Gọi x_1 là nghiệm âm của phương trình . Tính giá trị của biểu thức $D=\sqrt{x_1^8+10x_1+13}+x_1$

Lời giải. Do $a.c=-1<0$ nên phương trình $x^2+x-1=0$ có hai nghiệm trái dấu.

Vì x_1 là nghiệm của phương trình nên $x_1^2+x_1-1=0\Rightarrow x_1^2=1-x_1$. Do đó

$$x_1^4=\left(1-x_1\right)^2=1-2x_1+x_1^2=1-2x_1+1-x_1=2-3x_1$$

$$\begin{aligned}x_1^g&=\left(2-3x_1\right)^2=4-12x_1+9x_1^2=4-12x_1+8x_1^2+x_1^2=4-12x_1+8\left(1-x_1\right)+x_1^2\\&=12-20x_1+x_1^2\end{aligned}$$

$$x_1^8+10x_1+13=12-20x_1+x_1^2+10x_1+13=25-10x_1+x_1^2=\left(5-x_1\right)^2$$

Suy ra $\sqrt{x_1^8+10x_1+13}=\left|5-x_1\right|$

Vì $x_1<0$ nên $5-x_1>0 \Rightarrow \left|5-x_1\right|=5-x_1$

Do đó $D=\sqrt{x_1^8+10x_1+13}+x_1=5-x_1+x_1=5$

Bài toán 5. Tính giá trị của biểu thức

$F=\dfrac{x^5-3x^3-10x+12}{x^4+7x^2+15}$ với $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{4}$

Lời giải. Ta có $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 4x=x^2+x+1 \Leftrightarrow x^2=3x-1$

Do đó $x^3=x.x^2=x(3x-1)=3x^2-x=3(3x-1)-x=8x-3$

$x^4=x^3\cdot x=(8x-3)x=8x^2-3x=8(3x-1)-3x=21x-8$

$x^5=x^4\cdot x=(21x-8)x=21x^2-8x=21(3x-1)-8x=55x-21$

Từ đó, ta có

$x^5-3x^3-10x+12=55x-21-3(8x-3)-10x+12=21x$

$x^4+7x^2+15=21x-8+7(3x-1)+15=42x$

Vậy $F=\dfrac{x^5-3x^3-10x+12}{x^4+7x^2+15}=\dfrac{21x}{42x}=\dfrac{1}{2}$(vì $x\neq 0$)

BÀI TẬP

1. Tính giá trị của biểu thức $A=x^2+\sqrt{x^4+x+1}$ với $x=\dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\dfrac{1}{8}}-\dfrac{\sqrt{2}}{8}$
2. Tính giá trị của biểu thức $B=\dfrac{a+1}{\sqrt{a^4+a+1}-a^2}$, trong đó a là nghiệm dương của phương trình $4x^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}=0$
3. Tính giá trị của biểu thức $C=\dfrac{x^5-4x^3-3x+9}{x^4+3x^2+11}$ với $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{4}$

TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC NHIỀU BIẾN CÓ ĐIỀU KIỆN

Để tính giá trị của biểu thức có nhiều hơn một biến số với điều kiện cho trước, ta có thể sử dụng phương pháp phân tích từ điều kiện đã cho, phương pháp hệ số bất định hay phương pháp hình học. Sau đây là một số ví dụ minh họa.

I. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH

★ **Ví dụ 1.** Cho các số thực dương x,y thỏa $7x^2-13xy-2y^2=0\,(1)$.

Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{2x-6y}{7x+4y}$

Lời giải. Ta có $(1)\Leftrightarrow(7x+y)(x-2y)=0\Leftrightarrow x=2y($ do $x>0,y>0)$

Thay vào biểu thức A, ta thu được $A=\dfrac{2.2\text{y}-6\text{y}}{7.2\text{y}+4\text{v}}=\dfrac{-2\text{y}}{18\text{y}}=-\dfrac{1}{9}$. Vậy $\lambda=-\dfrac{1}{9}$

★**Ví dụ 2.** Cho các số thực dương x,y thỏa mãn

$$\begin{cases}\dfrac{2012}{x}+1=\dfrac{2012}{y}\\ x+2y=\dfrac{7042}{3}\end{cases}.$$

Tính giá trị của biểu thức $B=\dfrac{x}{y}$

Lời giải. Đặt $a=\dfrac{2012}{x},b=\dfrac{2012}{y}$ với $a,b>0$ thì hệ điều kiện đã cho trở thành

$$\begin{cases}a+1=b\\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=\dfrac{7}{6}\end{cases}$$

Suy ra $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a+1}=\dfrac{7}{6}\Leftrightarrow 7a^2-11a-6=0\Leftrightarrow a=2($ do $a>0)$

Vậy $B=\dfrac{x}{y}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{2}$

★ **Ví dụ 3.** Cho các số thực dương x,y,z,t thỏa mãn

$$\begin{cases}tx=(t-2)y=\left(t-\dfrac{5}{2}\right)\\ \dfrac{s}{x}-\dfrac{7}{2}=\dfrac{s}{z}\end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức $C=\dfrac{s}{x}-\dfrac{s}{y}$

Lời giải. Từ điều kiện của bài toán suy ra $t\neq 2,t\neq\dfrac{5}{2}$

Từ (2) suy ra, $y=\dfrac{tx}{t-2}, z=\dfrac{2tx}{2t-5}$.

Thay vào (3) ta được $\dfrac{s}{x}-\dfrac{s}{\dfrac{2tx}{2t-5}}=\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow\dfrac{s}{tx}=\dfrac{7}{5}$.

Do đó $C=\dfrac{s}{x}-\dfrac{s}{y}=\dfrac{s}{x}-\dfrac{s}{\dfrac{tx}{t-2}}=\dfrac{s}{x}\left(1-\dfrac{t-2}{t}\right)=2.\dfrac{s}{tx}=\dfrac{14}{5}$.

II - PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH

Thí dụ 4. Cho các số x,y,z thoả mãn

$$\begin{cases}(x-y)(x+y)=z^2\\ 4y^2=5+7z^2\end{cases}\quad(4)$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $D=2x^2+10y^2-23z^2$.

Lời giải

Ta có $(4)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2-z^2=0\\ 4y^2-7z^2=5\end{cases}$.

Gọi a,b là các số thực thoả mãn $a\left(x^2-y^2-z^2\right)+b\left(4y^2-7z^2\right)=2x^2+10y^2-23z^2$

$$\Leftrightarrow ax^2+(4b-a)y^2-(7b+a)z^2=2x^2+10y^2-23z^2\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ 4b-a=10\\ 7b+a=23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases}.$$

Vậy $D=2\left(x^2-y^2-z^2\right)+3\left(4y^2-7z^2\right)=2.0+3.5=15$.

Thí dụ 5. Cho các số x,y,z,t thoả mãn

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x+2y+2z}=1\\ \dfrac{1}{z-3x}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\quad(5)$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $E=\dfrac{1}{x+8y+9z}$.

Lời giải

Ta có (5) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{t}+2\dfrac{y}{t}+2\dfrac{z}{t}=1 \\ -3\dfrac{x}{t}+\dfrac{z}{t}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ và $\dfrac{1}{E}=\dfrac{x}{t}+8\dfrac{y}{t}+9\dfrac{z}{t}$.

Gọi a,b là các số thực thoả mãn

$$a\left(\frac{x}{t}+2\frac{y}{t}+2\frac{z}{t}\right)+b\left(-3\frac{x}{t}+\frac{z}{t}\right)=\frac{x}{t}+8\frac{y}{t}+9\frac{z}{t}$$

$$(a-3b)\frac{x}{t}+2a\frac{y}{t}+(2a+1)\frac{z}{t}=\frac{x}{t}+8\frac{y}{t}+9\frac{z}{t}\Leftrightarrow\begin{cases} a-3b=1 \\ 2a=8 \\ 2a+1=9 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{E}=4.1+1.2=6.$ Vậy $\mathrm{E}=\dfrac{1}{6}$.

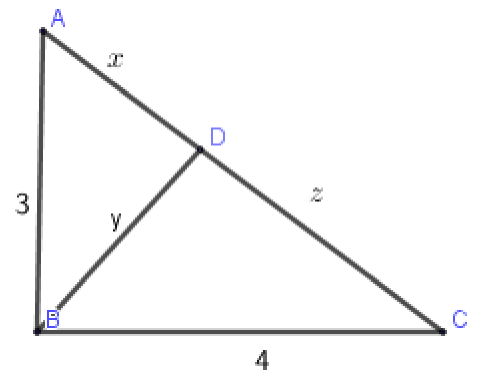
II - PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC

Thí dụ 6. Cho các số thực dương x,y,z thoả mãn

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y^2+z^2=16 \\ y^2=xz \end{cases} \qquad (6)$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $G=xy+yz$.

Lời giải (h.1.1)



Hình 1.1

Xét tam giác ABC vuông tại B, $BC = 4$, $AB = 3$ và đường cao BD. Đặt $BD = y$, $DA = x$ và $DC = z$.

Ta thấy x, y, z hoàn toàn thoả mãn điều kiện (6). Khi đó

$G = x.y + y.z = y.(x+z) = 2, \quad S_{ABC} = 12.$

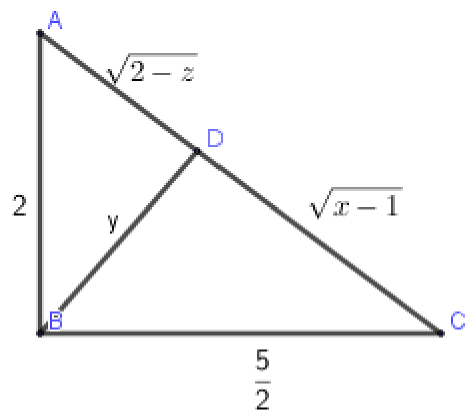
Vậy $G = 12.$

Thí dụ 7. Cho các số x, y, z với $y > 0$ thoả mãn

$$\begin{cases} x + y^2 = \dfrac{29}{4} \\ y^2 - z = 2 \\ y^2 = \sqrt{x-1}.\sqrt{2-z} \end{cases} \qquad (7)$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $H = y.\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{2-z}\right)$.

Lời giải (h.1.2)



Hình 1.2

Từ (7) suy ra $x > 1, z < 2.$

Ta viết hệ (7) dưới dạng $\begin{cases} \left(\sqrt{x-1}\right)^2 + y^2 = \dfrac{25}{4} \\ y^2 + \left(\sqrt{2-z}\right)^2 = 4 \\ y^2 = \sqrt{x-1}.\sqrt{2-z} \end{cases}$

Xét tam giác ABC vuông tại B, và đường cao BD, $AB=\frac{5}{2}$, $BC=2$.Đặt $BD=y$, $DA=\sqrt{x-1}$ và $DC=\sqrt{2-z}$.

Ta thấy x,y,z hoàn toàn thoả mãn điều kiện trên. Khi đó

$$H=y.\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2-z}\right)=2S_{ABC}=2.\frac{1}{2}.\frac{5}{2}.2.=5.$$

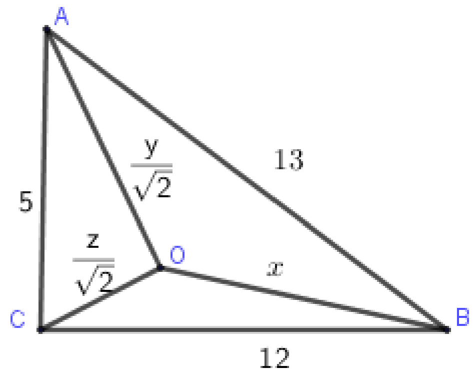
Vậy $H=5.$

Thí dụ 8. Cho các số thực dương x,y,z thoả mãn

$$\begin{cases} y^2+z^2=50 \\ x^2+xy+\frac{y^2}{2}=169 \\ x^2+xz+\frac{z^2}{2}=144 \end{cases} \qquad (8)$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $K=xy+yz+zx.$

Lời giải (h.1.3)



Hình 1.3

Ta viết hệ (8) dưới dạng $\begin{cases} \frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}=5^2 \\ x^2+xy+\frac{y^2}{2}=13^2 \\ x^2+xz+\frac{z^2}{2}=12^2 \end{cases}$

Xét tam giác ABC vuông tại C, $AC=5$, $AB=13$, $BC=12$. Gọi O là điểm nằm trong tam giác ABC thoả mãn, $\widehat{AOC}=90°$, $\widehat{BOC}=135°$. Đặt $OB=x$,

$OA = \frac{y}{\sqrt{2}}$, $OC = \frac{z}{\sqrt{2}}$. Ta dễ dàng kiểm tra được x, y, z hoàn toàn thoả mãn các điều kiện trên. Ta có

$$S_{AOB} = \frac{1}{4}xy\,;\ S_{AOC} = \frac{1}{4}yz\,;S_{BOC} = \frac{1}{4}zx\,.$$

Từ đó suy ra $K = xy + yz + zx = 4\left(S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC}\right) = 4S_{ABC} = 4.\frac{1}{2}.5.124 = 120.$

Vậy $K = 120.$

BÀI TẬP

1. Cho các số thực dương x, y, z và $x > y$ thoả mãn

$$\begin{cases} \frac{z}{x} + \frac{z}{y} = 6 \\ \frac{z}{x+y} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $M = \frac{z}{x-y}$.

2. Cho các số thực dương $x, y = z, t, s$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} \frac{s}{x+y+z} = \frac{1}{4} \\ \frac{2s}{x+2y-t} = \frac{1}{3} \\ \frac{s}{2x-y-z+t} = 1 \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $N = \frac{7x-4z+t}{s}$

3. Cho ba số thực x, y, z thõa mãn

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^3}{3} = 25 \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 9 \\ z^2 + xz + x^2 = 16 \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $P = xy + 2y = +3xz$

Chuyên đề 12.

TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ BIỂU THỨC ĐẠI SỐ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Sau khi rút gọn biểu thức, đề thi có thể yêu cầu thêm

- Tìm điều kiện để biểu thức nhận giá trị là số nguyên.
- Chứng minh giá trị của biểu thức không là số nguyên.
- Tìm điều kiện để biểu thức không âm (hoặc tương đương) hoặc thỏa mãn một bất đẳng thức, một đẳng thức nào đó.
- Tìm điều kiện để biểu thức có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Dạng 1. ***Tìm điều kiện để biểu thức nhận giá trị là số nguyên.***

Phương pháp. Biến đổi biểu thức về dạng phân thức hoặc tổng của đa thức với hệ số nguyên và một phân thức có dạng $\frac{a}{A}$ ($a \in \mathbb{Z}$, A là đa thức hệ số nguyên).

Để biểu thức nhận giá trị là số nguyên thì A nhận giá trị là ước số của a.

Trong trường hợp cần tìm giá trị của biến số thực để biểu thức nhận giá trị nguyên thì nên tìm trước các giá trị nguyên có thể có của biểu thức, từ đó suy ra giá trị của biến số.

★ **Ví dụ.** *Cho biểu thức* $A = \frac{a^4 - 16}{a^4 - 4a^3 + 8a^2 - 16a + 16}$

Tìm các giá trị nguyên của a để A có giá trị nguyên.

Lời giải. Trước hết rút gọn biểu thức A. Ta có

$$A = \frac{\left(a^2+4\right)(a+2)(a-2)}{\left(a^2+4\right)(a-2)^2} = \frac{a+2}{a-2} = 1 + \frac{4}{a-2} \text{ (với điều kiện } a \neq 2\text{)}$$

A nhận giá trị nguyên khi $a-2$ là ước số của 4, tức là $a - 2 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$.

Suy ra $u \in \{-2:0;1;3;4;6\}$

★**Ví dụ 2.** *Cho biểu thức* $B = \dfrac{\sqrt{m+4\sqrt{m-4}}+\sqrt{m-4\sqrt{m-4}}}{\sqrt{1-\dfrac{8}{m}+\dfrac{16}{m^2}}}$

Tìm các giá trị nguyên của m để B có giá trị nguyên.

Lời giải. Trước hết rút gọn biểu thức B. Ta có

$$B = \frac{\sqrt{(\sqrt{m-4}+2)^2}+\sqrt{(\sqrt{m-4}-2)^2}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{4}{m}\right)^2}} = \frac{\sqrt{m-4}+2+|\sqrt{m-4}-2|}{\left|1-\dfrac{4}{m}\right|}$$

Nhận thấy $|\sqrt{m-4}-2| = \begin{cases} \sqrt{m-4}-2 & \text{khi } m > 8 \\ 2-\sqrt{m-4} & \text{khi } 4 \le m \le 8 \end{cases}$

$$\left|1-\frac{4}{m}\right| = \begin{cases} 1-\dfrac{4}{m} & \text{khi } m \ge 4 \text{ hoác } m < 0 \\ \dfrac{4}{m}-1 & \text{khi } 0 < m < 4 \end{cases}$$

- Nếu $4 \le m \le 8$ thì $B = \dfrac{4ml}{m-4} = 4 + \dfrac{16}{m-4}$

  Với m nguyên, để B nguyên thì $m-4$ là ước số của 16, nhưng $4 \le m \le 8$ nên $m \in \{5;6;8\}$.

- Nếu $m > 8$ thì $B = \dfrac{2m}{\sqrt{m-4}}$

  Với m nguyên, để B nguyên thì $\sqrt{m-4} = k\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$. Suy ra $m = k^2 + 4$

  Do đó $B = \dfrac{2\left(k^2+4\right)}{k} = 2k + \dfrac{8}{k}$

  B nguyên thì k là ước của 8, mà $k > 2$ (vì $m > 8$) nên $k \in \{4;8\}$

  Suy ra $m \in \{20;68\}$

  Vậy với $m \in \{5;6;8;20:68\}$ thì B nhận giá trị nguyên.

★ **Ví dụ 3.** Cho $C = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{2}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}\right) : \left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$

Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải. Điều kiện $x \ge 0, x \ne 1$

Ta có $C=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}\right)\cdot\frac{x+1}{x-\sqrt{x}+1}$

$=\frac{x-1}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}\cdot\frac{x+1}{x-\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1}$

Đặt $\sqrt{x}=a\ \left(a\ge 0,a\ne 1\right)$. Nếu tồn tại x để P có giá trị nguyên thì phương trình $C=\frac{a+1}{a^2-a+1}$ (ẩn a, tham số C) có nghiệm. Tức là

$Cu^2-(C+1)u+(C-1)=0$ có nghiệm.

$\Leftrightarrow \Delta=-3C^2+6C+1\ge 0\Leftrightarrow 3(C-1)^2\le 4\Leftrightarrow 1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\le C\le 1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Dễ thấy $C>0$ và C nguyên nên $C\in\left\{1;2\right\}$

Với $C=1$ thì $\frac{\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1}=1\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=4$ (thỏa đk).

Với $C=2$ thì $\frac{\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1}=2\Leftrightarrow 2x-3\sqrt{x}+1=0\Leftrightarrow x=0,25$ (do $x\ne 1$)

Vậy $x\in\{0;0,25:4\}$ thì C nhận giá trị nguyên

Dạng 2. ***Chứng minh giá trị biểu thức không là số nguyên.***

Phương pháp. Ta thường sử dụng một trong các cách sau

- Chỉ ra giá trị của biểu thức nằm giữa hai số nguyên liên tiếp.
- Hoặc biến đổi biểu thức về dạng phân thức hoặc tổng của một đa thức với hệ số nguyên và một phân thức, rồi chứng minh rằng tử thức không chia hết cho mẫu thức.
- Hoặc chỉ ra giá trị của biểu thức là một số vô tỉ.

Thí dụ 4. Cho a,b,c là các số dương và $C=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$.

Chứng minh rằng giá trị của C không là số nguyên.

Lời giải

Ta có

$$C>\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1.$$

Lại có

$$C=\left(1-\frac{b}{a+b}\right)+\left(1-\frac{c}{b+c}\right)+\left(1-\frac{a}{c+a}\right)<3-\left(\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}\right)=3-1=2.$$

Do đó $1 < C < 2$. Vậy giá trị của C không là số nguyên.

Thí dụ 5. Chứng minh rằng giá trị của $D = \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{36x^2 + 10x + 3}}}$ (với x là số tự nhiên) không là số nguyên.

Lời giải

Do $x \in \mathbb{N}$ nên

$$(4x+1)^2 < 36x^2 + 10x + 3 < (6x+2)^2$$

$\Rightarrow 4x + 1 < \sqrt{36x^2 + 10x + 3} < 6x + 2$

$\Rightarrow (2x+1)^2 < 4x^2 + \sqrt{36x^2 + 10x + 3} < 4x^2 + 6x + 2 < (2x+2)^2$

$\Rightarrow 2x + 1 < \sqrt{4x^2 + \sqrt{36x^2 + 10x + 3}} < 2x + 2$

$\Rightarrow (x+1)^2 < x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{36x^2 + 10x + 3}} < x^2 + 2x + 2 < (x+2)^2$

$\Rightarrow x + 1 < D < x + 2.$

Giá trị của D nằm giữa hai số tự nhiên liên tiếp nên không là số nguyên.

Thí dụ 6. Cho biểu thức $E = \dfrac{3n^2}{2n^2 + n - 1} + \dfrac{1}{n+1}$ (với n nguyên và $n \neq \pm 1, n \neq 0$).

Chứng minh rằng giá trị của E không là số nguyên.

Lời giải

Rút gọn biểu thức

$$E = \frac{3n^2}{(2n-1)(n+1)} + \frac{1}{n+1} = \frac{(3n-1)(n+1)}{(2n-1)(n+1)} = \frac{3n-1}{2n-1} = 1 + \frac{n}{2n-1}.$$

Gọi $d = \text{ƯCLN}(n; 2n-1)$ thì $n \vdots d, (2n-1) \vdots d$, suy ra $1 \vdots d$ hay $d = 1$.

Lại có $n \neq 0, n \neq 1$ nên $2n - 1 \pm 1$.

Vì vậy $n \not\vdots (2n-1)$. Do đó E không là số nguyên với mọi số n nguyên và $n \neq 0, n \neq \pm 1$.

Thí dụ 7. Cho p là tích của n số nguyên tố đầu tiên $(n > 1)$. Chứng minh rằng $\sqrt{p+1}$ không là số nguyên.

Lời giải

Giả sử $\sqrt{p+1} = k \ (k \in \mathbb{N})$ thì $p = k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$.

Vì p là tích của n số nguyên tố đầu tiên nên $p \vdots 2$, suy ra $k-1$ và $k+1$ đều chẵn nên $p \vdots 4$ (điều này vô lí vì $p \vdots 2$ và $p \not\vdots 4$).

Vì vậy $\sqrt{p+1}$ phải là số vô tỉ. Suy ra đpcm.

DẠNG 3. Tìm điều kiện để biểu thức thoả mãn một bất đẳng thức hoặc một đẳng thức

Phương pháp. Trước hết rút gọn biểu thức, rồi từ điều kiện đã cho dẫn đến giải phương trình hoặc bất phương trình (ẩn là biến số đã cho)

Thí dụ 8. Cho biểu thức

$$F=\frac{3}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+1}.$$

a) Tìm x sao cho $F=6$.

b) Tìm x sao cho $F>2$.

c) So sánh F với $1,5$.

Lời giải

F có nghĩa khi $\begin{cases} x-3\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 3.$

Khi đó $F=\frac{3\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{x}\right)+3\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x}\right)}{x-3-x}+x=\frac{6\sqrt{x-3}}{-3}+x=x-2\sqrt{x-3}.$

a) $F=6\Leftrightarrow x-2\sqrt{x-3}=6\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-3}-1\right)^2=4\Leftrightarrow \sqrt{x-3}=3\Leftrightarrow x=12.$

b) $F>2\Leftrightarrow x-2\sqrt{x-3}>2\Leftrightarrow (x-3)-2\sqrt{x-3}+1>0\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-3}-1\right)^2>0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3\ge 0 \\ \sqrt{x-3}\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ x\ne 4 \end{cases}.$

c) Xét hiệu $F-1,5=x-2\sqrt{x-3}-1,5=\left(\sqrt{x-3}-1\right)^2+0,5>0.$

Vậy $F>1,5.$

Thí dụ 9. Tìm các số thực x,y,z thoả mãn điều kiện

$$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z).$$

Lời giải

Biến đổi đẳng thức đã cho thành dạng

$$\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{z-2}-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}-1=0\\ \sqrt{y-1}-1=0\\ \sqrt{z-2}-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=3\end{cases}.$$

DẠNG 4. Tìm điều kiện để biểu thức có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Thí dụ 10. Tìm x để biểu thức $G=\sqrt{(x-2010)^2}+\sqrt{(x-2011)^2}+\sqrt{(x-2012)^2}$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Áp dụng công thức $\sqrt{A^2}=|A|$, ta có

$$G=|x-2010|+|x-2011|+|x-2012|.$$

Nhận thấy

$$|x-2010|+|x-2012|=|x-2010|+|-x+2012|\ge|x-2010-x+2012|=2$$

Và $|x-2011|\ge 0$ với mọi x. Suy ra $G\ge 2$.

$$G=2 \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases}(x-2010)(-x+2012)\ge 0\\ x-2011=0\end{cases} \Leftrightarrow x=2011.$$

Vậy khi $x=2011$ thì G có giá trị nhỏ nhất bằng 2.

Thí dụ 11. Tìm x để biểu thức $H=\sqrt{6-x}+\sqrt{x+2}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

Điều kiện xác định H là $\begin{cases}6-x\ge 0\\ x+2\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow -2\le x\le 6.$

Nhận thấy $H>0$ nên H lớn nhất khi H^2 lớn nhất. Ta có

$$H^2=8+2\sqrt{12+4x-x^2}=8+2\sqrt{16-(x-2)^2}.$$

Do đó $H^2\le 8+2\sqrt{16}=16.$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=2.$

Vậy H có giá trị lớn nhất là 4 khi $x=2.$

2. Sử dụng hằng đẳng thức quen biết

Thí dụ 5. Cho a,b,c khác 0, thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2; a+b+c=abc$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=2$.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)$

$=4-2.\frac{a+b+c}{abc}=2$.

Thí dụ 6. Cho các số dương a,b,c với $b\neq c$:
$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{c};a+b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2$.

Chứng minh rằng: $\frac{a+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2}{b+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$.

Lời giải

Ta có:

$a=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2-b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2-\sqrt{b^2}$

$=\left(\sqrt{a}+2\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)$.

$b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2-a=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)-\sqrt{a^2}$

$=\left(2\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)$.

Do đó: $\frac{a+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2}{b+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}=\frac{\left(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)}{\left(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$.

Thí dụ 7. Cho ba số a,b,c thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh rằng:
$2\left(a^5+b^5+c^5\right)=5abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Lời giải

Ta có: $a^3+b^3+c^3-3abc=\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$

$\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)$

Từ $a+b+c=0$ suy ra $a^3+b^3+c^3=3bca$ và $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}=-\left(ab+bc+ac\right)$.

Ta có: $\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)=3abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$\Leftrightarrow a^5+b^5+c^5+a^2b^2\left(a+b\right)+b^2c^2\left(b+c\right)+c^2a^2\left(c+a\right)=3abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$\Leftrightarrow a^5+b^5+c^5-abc\left(ab+bc+ca\right)=3abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$\Leftrightarrow a^5+b^5+c^5+abc.\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}=3abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$\Leftrightarrow 2\left(a^5+b^5+c^5\right)=5abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$ (đpcm).

II – PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

Thí dụ 8. Cho ba số a,b,c khác không thỏa mãn $ab+bc+ca=0$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{bc}{a^2}+\dfrac{ca}{b^2}+\dfrac{ab}{c^2}=3$.

Lời giải

Đặt $x=ab, y=bc, z=ca$ thì $x+y+z=0$ và $xyz\neq 0$. Ta có:

$$\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}=\frac{b^3c^3+c^3a^3+b^3a^3}{a^2b^2c^2}=\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}$$

$$=\frac{\left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)}{xyz}=\frac{3xyz}{xyz}=3$$

Thí dụ 9. Cho ba số a,b,c đôi một khác nhau thỏa mãn

$\left(b-c\right)\sqrt[3]{1-a^3}+\left(c-a\right)\sqrt[3]{1-b^3}+\left(a-b\right)\sqrt[3]{1-c^3}=0$.

Chứng minh rằng: $\left(1-a^3\right)\left(1-b^3\right)\left(1-c^3\right)=\left(1-abc\right)^3$.

Lời giải

Đặt $x=\left(b-c\right)\sqrt[3]{1-a^3}$, $y=\left(c-a\right)\sqrt[3]{1-b^3}$, $z=\left(a-b\right)\sqrt[3]{1-c^3}$ thì $x+y+z=0$, suy ra: $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

Do đó: $\left(b-c\right)^3\left(1-a^3\right)+\left(c-a\right)^3\left(1-b^3\right)+\left(a-b\right)^3\left(1-c^3\right)$

$=3\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)\sqrt[3]{\left(1-a^3\right)\left(1-b^3\right)\left(1-c^3\right)}$

$\Rightarrow 1-abc=\sqrt[3]{\left(1-a^3\right)\left(1-b^3\right)\left(1-c^3\right)}$

$\Leftrightarrow \left(1-a^3\right)\left(1-b^3\right)\left(1-c^3\right)=\left(1-abc\right)^3$.(đpcm).

Thí dụ 10. Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=2$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{\sqrt{a}}{1+a}+\dfrac{\sqrt{b}}{1+b}+\dfrac{\sqrt{c}}{1+c}=\dfrac{2}{\sqrt{\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)}}$.

Lời giải

Đặt $x=\sqrt{a},y=\sqrt{b},z=\sqrt{c}$ thì $x^2+y^2+z^2=x+y+z=2$.

Suy ra: $2\left(xy+yz+zx\right)=\left(x+y+z\right)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)=2^2-2=2$

$\Rightarrow xy+yz+zx=1$.

Do đó:

$1+a=xy+yz+zx+x^2=\left(x+y\right)\left(x+z\right)$

$1+b=xy+yz+zx+y^2=\left(y+z\right)\left(y+x\right)$

$1+c=xy+yz+zx+z^2=\left(x+z\right)\left(y+z\right)$

Vì vậy

$$\frac{\sqrt{a}}{1+a}+\frac{\sqrt{b}}{1+b}+\frac{\sqrt{c}}{1+c}=\frac{x}{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}+\frac{y}{\left(y+z\right)\left(y+x\right)}+\frac{z}{\left(z+x\right)\left(z+y\right)}$$

$$=\frac{x\left(y+z\right)+y\left(z+x\right)+z\left(x+y\right)}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}$$

$$=\frac{2\left(xy+yz+zx\right)}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}=\frac{2}{\sqrt{\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)}}.$$

Thí dụ 11. Cho các số thực x,y,a,b thỏa mãn $x+y=a+b;x^4+y^4=a^4+b^4$.

Chứng minh rằng: $x^n+y^n=a^n+b^n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử: $x\ge a\ge b\ge y$.

Đặt: $x=a+k$ với $k\ge 0$ thế thì $y=b-k$. Khi đó: $x^4+y^4=a^4+b^4$ trở thành

$(a+k)^4+(b-k)^4=a^4+b^4$

$\Leftrightarrow a^4+4a^3k+6a^2k^2+4ak^3+k^4+b^4-4b^3k+6b^2k^2-4bk^3+k^4=a^4+b^4$

$\Leftrightarrow 4\left(a^3-b^3\right)k+4(a-b)k^3+6\left(a^2+b^2\right)k^2+2k^4=0\ (*)$.

Nếu $k>0$ thì vế trái của (*) luôn dương, điều này mâu thuẫn. Vậy $k=0$, từ đó suy ra $x=a$, $y=b$. Do đó $x^n+y^n=a^n+b^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

III – PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC

***Thí dụ 12.** *Cho* a, b, c, x, y, z *thỏa mãn*

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$$

Chứng minh rằng $x^{2012}+y^{2012}+z^{2012}=0$

Lời giải. Ta có

$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{z^2}{a^2+b^2+c^2}=0$

$\Leftrightarrow x^2\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}\right)+y^2\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}\right)+z^2\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=y=z=0$ (Do mỗi số hạng không âm).

Vì vậy $x^{2012}+y^{2012}+z^{2012}=0$.

***Thí dụ 13.** Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn

$$a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-c^2}+c\sqrt{1-a^2}=\frac{3}{2}\ .$$

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2=\frac{3}{2}$.

Lời giải. *Áp dụng bất đẳng thức* Cauchy cho hai số không âm ta có

$$a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-c^2}+c\sqrt{1-a^2}\le\frac{a^2+1-b^2}{2}+\frac{b^2+1-c^2}{2}+\frac{c^2+1-a^2}{2}=\frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}a=\sqrt{1-b^2}\\b=\sqrt{1-c^2}\\c=\sqrt{1-a^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=1-b^2\\b^2=1-c^2\\c^2=1-a^2\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2+c^2=\frac{3}{2}$$

BÀI TẬP

1. Cho ba số thực a, b, c khác không thỏa mãn

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-2 \text{ và } a^3+b^3+c^3=1$$

Chứng minh rằng $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

2. Cho $a, b, c\neq 1,\ d$ thỏa mãn $ac-a-c=b^2-2b,\ bd-b-d=c^2-2c$

Chứng minh rằng $ad+b+c=bc+a+d$.

3. Cho các số thực a, b, c, x, y thỏa mãn $x^2+y^2=1, \frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{1}{a+b}$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^{2n}}{a^n}=\frac{y^{2n}}{b^n}=\frac{2}{(a+b)^n},\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

4. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0$ và $abc\neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2+c^2}=0.$$

5. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$ và $abc\neq 0$.

Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\left(b-c\right)^{2}}+\frac{b}{\left(c-a\right)^{2}}+\frac{c}{\left(a-b\right)^{2}}=0.$$

6. Giả sử a, b, c là ba số thực thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^{n}}+\frac{1}{b^{n}}+\frac{1}{c^{n}}=\frac{1}{a^{n}+b^{n}+c^{n}}, \forall n\in\mathbb{N}.$$

7. Cho a, b, c là ba số thực khác nhau. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{a-b}.\frac{b+c}{b-c}+\frac{b+c}{b-c}.\frac{c+a}{c-a}+\frac{c+a}{c-a}.\frac{a+b}{a-b}=-1$$

8. Giả sử $ax+by+cz=0$. Chứng minh rằng

$$\frac{ax^{2}+by^{2}+cz^{2}}{bc\left(y-z\right)^{2}+ca\left(z-x\right)^{2}+ab\left(x-y\right)^{2}}=\frac{1}{a+b+c}.$$

9. Chứng minh rằng nếu $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ và $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ thì $\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}+\frac{z^{2}}{c^{2}}=1$.

10. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh rằng

a) $2\left(a^{4}+b^{4}+c^{4}\right)=\left(a^{2}+b^{2}+c^{2}\right)^{2}$.

b) $\frac{a^{5}+b^{5}+c^{5}}{5}=abc.\frac{a^{2}+b^{2}+c^{2}}{2}$.

c) $\frac{a^{3}+b^{3}+c^{3}}{3}.\frac{a^{2}+b^{2}+c^{2}}{2}=\frac{a^{5}+b^{5}+c^{5}}{5}$.

d) $\frac{a^{7}+b^{7}+c^{7}}{7}=\frac{a^{2}+b^{2}+c^{2}}{2}.\frac{a^{5}+b^{5}+c^{5}}{5}$.

e) $\frac{a^{7}+b^{7}+c^{7}}{7}=\frac{a^{3}+b^{3}+c^{3}}{3}.\frac{a^{4}+b^{4}+c^{4}}{4}$

11. Cho ba số thực a, b, c khác không và thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^{2}}+\frac{1}{b^{2}}+\frac{1}{c^{2}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{2}.$$

12. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $(ab)^3+(bc)^3+(ac)^3=3(abc)^2$. Chứng minh rằng

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)=8.$$

13. Cho các số thực dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn $ax^3=by^3=cz^3$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}.$$

14. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=6$. Chứng minh rằng

$$a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}=3\ .$$

15. Cho ba số hữu tỉ a, b, c thỏa mãn $abc=1$ và $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}=\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}$. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba số a, b, c là bình phương của một số hữ tỉ.

16. Cho a, b, c là ba số nguyên khác không thỏa mãn $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3$. Chứng minh rằng tích abc là lập phương của một số nguyên

TÌM HỆ THỨC KHÔNG PHỤ THUỘC VÀO THAM SỐ

Có những hệ phương trình hoặc các đẳng thức mà từ đó ta có thể tìm được một hệ thức giữa các ẩn hoặc các chữ không phụ thuộc vào các tham số. Để tìm hệ thức đó ta thường sử dụng các phương pháp sau đây.

1. Sử dụng hằng đẳng thức.

*** Thí dụ 1.** *Cho* $a = a + b$, $y = a^2 + b^2$, $z = a^3 + b^3$. *Tìm hệ thức liên hệ giữa* x, y, z *không phụ thuộc vào* a, b, c.

Lời giải.

Ta có $z = a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)\left[(a^2+b^2) - \dfrac{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}{2}\right]$.

Suy ra $z = x\left(y - \dfrac{x^2 - y}{2}\right) \Leftrightarrow x^3 + 2z = 3xy$ (Không phụ thuộc vào a, b, c).

2. Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

*** Thí dụ 2.** *Cho* $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$ *và* $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 1$. *Tìm hệ thức liên hệ giữa* x, y, z *không phụ thuộc vào* a, b, c.

Lời giải.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} = \dfrac{x+y+z}{a+b+c} = x + y + z$ (Do $a + b + c = 1$) $\Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} = (x+y+z)^2$.

Mặt khác $\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = x^2 + y^2 + z^2$ (Do $a^2 + b^2 + c^2 = 1$).

Do đó $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 0$ (Không phụ thuộc vào a, b, c).

3. Tính mỗi biến hoặc biểu thức chứa mỗi biến theo các tham số rồi tìm quan hệ giữa các biến

*** Thí dụ 3.** *Cho* $by + cz = a$, $ax + cz = b$, $ax + by = c$. *Tìm hệ thức liên hệ giữa* x, y, z *không phụ thuộc vào* a, b, c.

Lời giải.

Cộng ba đẳng thức trên theo vế ta được

$a + b + c = 2(ax + by + c) = 2(c + cz)\ 2c(1+z) \Rightarrow \dfrac{1}{1+z} = \dfrac{2c}{a+b+c}$.

Tương tự $\frac{1}{1+x}=\frac{2a}{a+b+c}$; $\frac{1}{1+y}=\frac{2b}{a+b+c}$.

Do đó $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=\frac{2\left(a+b+c\right)}{a+b+c}=1.$

4. Sử dụng phương pháp thế

*** Thí dụ 4.** *Cho phương trình* $x^2-\left(2m-3\right)x+m^2-3m=0$. *Tìm hệ thức giữa hai nghiệm* x_1 *và* x_2 *không phụ thuộc* m.

Lời giải.

Theo định lí Viète ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m-3 & \left(1\right) \\ x_1x_2=m^2-3m & \left(2\right) \end{cases}$

Từ $\left(1\right)$ suy ra $m=\frac{x_1+x_2+3}{2}$, rồi thay vào $\left(2\right)$ ta được

$$x_1x_2=\left(\frac{x_1+x_2+3}{2}\right)^2-3\left(\frac{x_1+x_2+3}{2}\right)\Leftrightarrow\left(x_1-x_2\right)^2=9.$$

4. Sử dụng phương pháp thế

*** Thí dụ 5.** Xét phương trình $\left(m-1\right)x^2+2\left(m+1\right)x-m=0\ \left(m\neq 1\right)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm là $m\neq 1$.

Theo định lí Viète ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-2\left(m+1\right)}{m-1}=-2-\dfrac{4}{m-1} \\ x_1x_2=\dfrac{-m}{m-1}=-1-\dfrac{1}{m-1} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-2\left(m+1\right)}{m-1}=-2-\dfrac{4}{m-1} & \left(1\right) \\ -4x_1x_2=4+\dfrac{4}{m-1} & \left(2\right) \end{cases}$$

Cộng theo từng của $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ ta có $x_1+x_2-4x_1x_2=2$.

*** Thí dụ 6.** *Cho* $x=\frac{a-b}{a+b}$, $y=\frac{b-c}{b+c}$. $z=\frac{c-a}{c+a}$. *Tìm hệ thức liên hệ giữa* x, y, z *không phụ thuộc vào* a, b, c.

Lời giải.

Cộng ba đẳng thức trên theo vế ta có

$$x+y+z=\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}$$
$$\frac{ab\left(a-b\right)+bc\left(b-c\right)+ca\left(c-a\right)}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}=-\frac{\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}=-xyz.$$

Vậy $x+y+z=-xyz$.

6. Sử dụng phương pháp thế

*** Thí dụ 7.** Cho $ax+by=z$, $ay+bz=x$, $az+bx=y$. *Tìm hệ thức liên hệ giữa* x, y, z *không phụ thuộc vào* a, b, c.

Lời giải.

Cộng ba đẳng thức đã cho theo vế ta có

$$a\left(x+y+z\right)+b\left(x+y+z\right)=x+y+z \Leftrightarrow \left(x+y+z\right)\left(a+b-1\right)=0. \left[\begin{array}{l}x+y+z=0\\ a+b-1=0\end{array}\right..$$

Xét $a+b=1$

Khử x từ hai đẳng thức đầu ta được $\left(a^2+b\right)y=\left(1-ab\right)z$.

Khử z từ hai đẳng thức đầu ta được $\left(a+b^2\right)y=\left(1-ab\right)x$.

Vì $a+b=1$ nên $a^2+b=a+b^2$ và $1-ab\neq 0$.

Do đó $\left(1-ab\right)z=\left(1-ab\right)x \Rightarrow x=z$.

Tương tự $x=y$. Suy ra $x=y=z$.

Vậy $\left[\begin{array}{l}x+y+z=0\\ x=y=z\end{array}\right. \Leftrightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$.

*** Thí dụ 8.** *Cho* $x^3=a^2\left(b+c\right)$, $y^3=b^2\left(c+a\right)$, $z^3=c^2\left(a+b\right)$ *và* $xyz=abc\neq 0$. *Tìm hệ thức liên hệ giữa* x, y, z *không phụ thuộc vào* a, b, c.

Lời giải.

Nhân ba đẳng thức đầu theo vế ta được

$x^3y^3z^3 = a^2b^2c^2\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$.

Kết hợp $xyz = abc \neq 0$ suy ra

$xyz = \left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right) = a^2\left(b+c\right)+b^2\left(c+a\right)+c^2\left(a+b\right)+2abc$.

$= x^3+y^3+z^3+2xyz$.

Do đó $x^3+y^3+z^3+xyz=0$.

BÀI TẬP

1. Cho $a+b=1$, $a^3+b^3=x$, $a^5+b^5=y$. Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc a, b.

2. Tìm hệ thức liên hệ giữa x, y, z không phụ thuộc vào a, b, c thỏa mãn các đẳng thức sau

a) $\frac{b}{c}-\frac{c}{b}=x$, $\frac{c}{a}-\frac{a}{c}=y$, $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=z$.

b) $b^2+c^2-2abx=c^2+a^2-2cay=a^2+b^2-2abz=0$

c) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=x$; $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}=y$ và $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)=z$

9. Chứng minh rằng nếu $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ và $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ thì $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

10. Cho 3 số thực a,b,c thỏa mãn a+b+c = 0. Chứng minh rằng:

a. $2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2$

b. $\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=abc.\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$

c. $\frac{a^3+b^3+c^3}{3}.\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}$

d. $\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.\frac{a^5+b^5+c^5}{5}$

e. $\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}.\frac{a^4+b^4+c^4}{4}$

11. Cho a,b,c, là ba số thực khác không thỏa mãn a+b+c = 0 .Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2$$

12.Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn $\left(ab\right)^3+\left(bc\right)^3+\left(ca\right)^3=3\left(abc\right)^3$

Chứng minh rằng: $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)=8$

13. Cho a,b,c,x,y,z thỏa mãn $\text{ax}^3=by^3=cz^3$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{\text{ax}^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$

14. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $\text{a}^2+b^2+c^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=6$

Chứng minh rằng $\text{a}^{2012}+b^{2012}+c^{2012}=3$

15. Cho a,b,c là ba số hữu tỉ ,thỏa mãn abc=1 và $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}=\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}$

Chứng minh rằng ít nhất một trong ba số a,b,c là bình phương của một số hữu tỉ.

16. Cho a,b,c là ba số nguyên khác không thỏa mãn $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3$

Chứng minh rằng tích abc là lập phương của một số nguyên.

TÌM HỆ THỨC KHÔNG PHỤ THUỘC VÀO THAM SỐ

Có những hệ phương trình hoặc các hằng đẳng thức mà từ đó ta có thể tìm được một hệ thức giữa các ẩn hoặc các chữ không phụ thuộc vào các tham số .Để tìm hệ thức đó ta thường sử dụng những phương pháp sau đây

1. **Sử dụng hằng đẳng thức**

   ∗**Thí dụ 1.**Cho $x=a+b,y=a^2+b^2,z=a^3+b^3$.Tìm hệ thức giữa x,y,z không phụ thuộc a,b,c.

   Lời giải : Ta có

   $$z=a^3+b^3=\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)=\left(a+b\right)\left(\left(a^2+b^2\right)-\frac{\left(a+b\right)^2-\left(a^2+b^2\right)}{2}\right)$$

   Suy ra: $z=x\left(y-\frac{x^2-y}{2}\right)\Leftrightarrow x^3+2z=3xy$ (không phụ thuộc vào a,b,c)

2. **Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau**

   ∗**Thí dụ 2.** Cho $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ và $a+b+c=a^2+b^2+c^2=1$.Tìm hệ thức giữa x,y,z không phụ thuộc vào a,b,c.

Lời giải: Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=x+y+z$ (do a + b + c = 1) $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=\left(x+y+z\right)^2$.

Mặt khác $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=x^2+y^2+z^2$ (do $a^2+b^2+c^2=1$)

Do đó $\left(x+y+z\right)^2=x^2+y^2+z^2 \Leftrightarrow xy+yz+zx=0$ (không phụ thuộc vào a,b,c).

3. **Tính mỗi biến hoặc biểu thức chứa mỗi biến theo các tham số rồi tìm quan hệ giữa các biến**

   ***Thí dụ 3.** Cho $by+cz=a$, ax+cz=b,ax+by =c. Tìm hệ thức giữa x,y,z không phụ thuộc a,b,c với a+b+c ≠0.

   Lời giải. Cộng ba đẳng thức trên theo vế ta được

$$a+b+c=2\left(\text{ax+by+cz}\right)=2(\text{c+ cz})=2\,\text{c}(1+\text{z})\Rightarrow \frac{1}{1+z}=\frac{2c}{a+b+c}$$

Tương tự $\frac{1}{1+x}=\frac{2a}{a+b+c};\frac{1}{1+y}=\frac{2b}{a+b+c}$

Do đó : $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=\frac{2a+2b+2c}{a+b+c}=2$

4. **Sử dụng phương pháp thế**

   *** Thí dụ 4.** Cho phương trình $x^2-(2m-3)x+m^2-3=0$ .Tìm hệ thức giữa hai nghiệm x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m.

   Lời giải. Theo định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m-3(1) \\ x_1.x_2=m^2-3m(2) \end{cases}$

   Từ (1) suy ra $m=\frac{x_1+x_2+x_3}{2}$ rồi thay vào (2) ta được

$$x_1.x_2=\left(\frac{x_1+x_2+3}{2}\right)^2-3\left(\frac{x_1+x_2+3}{2}\right)\Leftrightarrow \left(x_1-x_2\right)^2=9.$$

5. **Sử dụng phương pháp cộng đại số**

   ***Thí dụ 5.**Xét phương trình $\left(m-1\right)x^2+2(m+1)x-m=0(m\neq 1)$.

   Tìm hệ thức giữa hai nghiệm x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m.

   Lời giải. Điều kiện để phương trình có hai nghiệm là m ≠ 1.

   Theo định lí VI-ét ta có

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{-2(m+1)}{m-1}=-2-\frac{4}{m-1} \\ x_1.x_2=\frac{-m}{m-1}=-1-\frac{1}{m-1} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-2-\frac{4}{m-1}(1) \\ -4x_1.x_2=4+\frac{4}{m-1}(2) \end{cases}$$

Cộng theo vế của (1) và (2) ta có $x_1+x_2-4x_1.x_2=2$.

*** Thí dụ 6.** Cho $x=\frac{a-b}{a+b},y=\frac{b-c}{b+c},z=\frac{c-a}{c+a}$. Tìm hệ thức giữa x,y,z không phụ thuộc vào a,b,c.

Lời giải.Cộng ba đẳng thức trên theo vế ta có

$$x+y+z=\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}=\frac{ab(a-b)+\mathrm{bc}(\mathrm{b}-\mathrm{c})+\mathrm{ca}(\mathrm{c}-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{(a-b)(\mathrm{b}-\mathrm{c})(\mathrm{c}-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=-xyz$$

Vậy $x+y+z=-xyz.$

File cần word hóa cho đợt 3 trang 37, 38,39 được phân công đẩy lên đánh 41,42,43

Lại có $x^2+y^2\ge 2xy$ .Với mọi x,y nên ta có

$x^2+y^2+x+y\ge\frac{1}{2}(x^2+y^2)+xy+x+y\ge 0$ (đúng vì $x+y+xy\ge 0$).

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=0$ hay $a=b=1$.

BÀI TẬP

1. Cho $a+b+c\ge 3$. Chứng minh rằng $a^4+b^4+c^4\ge a^3+b^3+c^3$
2. Cho x,y là các số dương thõa mãn $x+y=1$. Chứng minh rằng $\frac{2}{xy}+\frac{3}{x^2+y^2}\ge 14$.
3. Cho $a+b+c+d=1$. Chứng minh rằng $(a+c)(b+d)+2ac+2bd\le\frac{1}{2}$.
4. Cho $a+b>8$ và $b\ge 3$. Chứng minh rằng $27a^2+10b^3>945$.

ÁP DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY HAI SỐ ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Trước hết ta nhắc lại các dạng bất đẳng thức (BĐT) Cauchy hai số thường gặp :

DẠNG 1. $ab\le\frac{a^2+b^2}{2}$ (1)

Đẳng thức xảy ra khi $a=b$

DẠNG 2 . $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ (2)

Đẳng thức xảy ra khi $a=b$

Bây giờ ta áp dụng bất đẳng thức CAUCHY hai số để giải các bài toán sau

Thí dụ 1 . Cho a,b,c là các số thực dương sao cho $a\ge c,b\ge c$. Chứng minh rằng $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}$.

Lời giải. BĐT cần chứng $\sqrt{\frac{c}{b}.\frac{a-c}{a}}+\sqrt{\frac{c}{a}.\frac{b-c}{b}}\le 1$.

Áp dụng bất đẳng thức (2) ta có :

$$\sqrt{\frac{c}{b}.\frac{a-c}{a}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+\frac{a-c}{a}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{c}{b}-\frac{c}{a}\right).$$

$$\sqrt{\frac{c}{a}.\frac{b-c}{b}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{b-c}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right).$$

Cộng theo vế của hai bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{c}{b}=\frac{a-c}{a}$ và $\frac{c}{a}=\frac{b-c}{b}$. Tức $c=\frac{ab}{a+b}$.

Thí dụ 2 Cho a,b là các số thực dương . Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\ge\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với $a^3+b^3\ge ab\sqrt{2(a^2+b^2)}$, hay $(a+b)(a^2+b^2-ab)\ge\sqrt{ab}.\sqrt{2ab(a^2+b^2)}$.

Áp dụng các bất đẳng thức (1) và (2) ta có $0<\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$

Và $0<\sqrt{2ab(a^2+b^2)}\le\frac{2ab+(a^2+b^2)}{2}\le a^2+b^2\le 2(a^2+b^2-ab)$.

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

Thí dụ 3. Cho a,b là các số thực dương . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+7(a+b)\ge 8\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

Lời giải . BĐT cần chứng minh tương đương với

$$a^3+b^3+7ab(a+b)\ge 8ab\sqrt{2(a^2+b^2)}$$

Hay $\quad (a+b)(a^2+b^2+6ab)\ge 8\sqrt{ab}\sqrt{2ab(a^2+b^2)}$ (3)

Áp dụng bất đẳng thức (2) ta có

$$0<\sqrt{2ab(a^2+b^2)}\le\frac{2ab+(a^2+b^2)}{2}=\frac{(a+b)^2}{2}$$

Từ đó suy ra

$8\sqrt{ab}\sqrt{2ab(a^2+b^2)} \le 4\sqrt{ab}(a+b)^2$ (*)

Lại áp dụng bất đẳng thức (2) ta có

$(a+b)(a^2+b^2+6ab) = (a+b)\left((a+b)^2+4ab\right) \ge 4\sqrt{ab}(a+b)^2$ (**)

Từ (*) và (**) ta có BĐT (3).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2ab = a^2+b^2 \\ (a+b)^2 = 4ab \end{cases}$. Tức là $a=b$.

Thí dụ 4. Cho a,b,c là các số thực dương . Chứng minh rằng :

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2} \ge \frac{a+b+c}{2}.$$

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\left(a-\frac{a^3}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b^3}{b^2+c^2}\right)+\left(c-\frac{c^3}{c^2+a^2}\right) \le \frac{a+b+c}{2}.$$

Hay $\frac{ab^2}{a^2+b^2}+\frac{bc^2}{b^2+c^2}+\frac{ca^2}{c^2+a^2} \le \frac{a+b+c}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có :

$\frac{ab^2}{a^2+b^2} = b.\frac{ab}{a^2+b^2} \le b.\frac{a^2+b^2}{2(a^2+b^2)} = \frac{b}{2}$ nên $\frac{ab^2}{a^2+b^2} \le \frac{b}{2}$.

Tương tự ta được

$\frac{bc^2}{b^2+c^2} \le \frac{c}{2}$ và $\frac{ca^2}{c^2+a^2} \le \frac{a}{2}$

Cộng theo vế của ba bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi

$a=b=c$.

Thí dụ 5. Cho a,b,c là các số thực dương sao cho $abc \ge 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^5-a^2}{a^5+b^2+c^2}+\frac{b^5-b^2}{b^5+c^2+a^2}+\frac{c^5-c^2}{c^5+a^2+b^2} \ge 0.$$

(Thi Olimpic toán quốc tế lần thứ 46 – năm 2005)

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\left(1-\frac{a^5-a^2}{a^5+b^2+c^2}\right)+\left(1-\frac{b^5-b^2}{b^5+c^2+a^2}\right)+\left(1-\frac{c^5-c^2}{c^5+a^2+b^2}\right) \le 3$$

hay $\dfrac{1}{a^5+b^2+c^2}+\dfrac{1}{b^5+c^2+a^2}+\dfrac{1}{c^5+a^2+b^2}\le\dfrac{3}{a^2+b^2+c^2}$ (4)

Từ $abc\ge 1$ và áp dụng BĐT (1) ta có

$$\frac{1}{a^5+b^2+c^2}\le\frac{1}{\dfrac{a^5}{abc}+b^2+c^2}=\frac{1}{\dfrac{a^4}{bc}+b^2+c^2}\le\frac{1}{\dfrac{2a^4}{b^2+c^2}+b^2+c^2}=\frac{b^2+c^2}{2a^4+\left(b^2+c^2\right)^2}.$$

Do $4u^2+v^2\ge 4uv\Leftrightarrow 2u^2+v^2\ge\dfrac{2}{3}\left(u+v\right)^2$ nên

$$2a^4+\left(b^2+c^2\right)^2\ge\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2.$$

Suy ra $\dfrac{1}{a^5+b^2+c^2}\le\dfrac{b^2+c^2}{2a^4+\left(b^2+c^2\right)^2}\le\dfrac{3\left(b^2+c^2\right)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$.

Tương tự $\dfrac{1}{b^5+c^2+a^2}\le\dfrac{3\left(c^2+a^2\right)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{c^5+a^2+b^2}\le\dfrac{3\left(a^2+b^2\right)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$.

Cộng theo vế ba BDDT trên, ta được BDDT (4).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

BÀI TẬP

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

1. Nếu $a+b+c=1$ thì $\sqrt{\dfrac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\dfrac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\dfrac{ca}{b+ca}}\le\dfrac{3}{2}$.

2. $\left(ab+c^2\right)\left(bc+a^2\right)\left(ca+b^2\right)\ge abc\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$.

3. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\ge\dfrac{a+b}{b+c}+\dfrac{b+c}{a+b}+1$.

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH
BẤT ĐẲNG THỨC CÓ CHỨA BIẾN Ở MẪU

Trong kì thi vào lớp 10 THPT chuyên trong cả nước và các kì thi học sinh giỏi, ta gặp rất nhiều bài toan chứng minh bất đẳng thức (BĐT) có chứa biến ở mẫu. Trong bài viết này, tác giả xin giới thiệu một số kĩ năng giải bài toán dạng đó.

1. Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản

Với a,b,c là ba số thực dương tùy ý, ta có

- $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ (1) đẳng thức xảy ra khi $a=b$.
- $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$ (2) đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

★**Thí dụ 1.** *Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng* $\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\ge 16$.

Lời giải. Áp dụng BĐT (1) ta có

$$\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=\frac{1}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge\frac{4}{c\left(a+b\right)}\ge\frac{4}{\left(\frac{c+a+b}{2}\right)^2}=16.$$

Đẳng thức xảy ra khi $c=\frac{1}{2},a=b=\frac{1}{4}$.

★**Thí dụ 2.** Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c\le 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2012}{ab+bc+ca}\ge 671.$$

Lời giải. Áp dụng BĐT (2) ta có

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}$$

$$\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)}=\frac{9}{\left(a+b+c\right)^2}\ge 1 \qquad (3)$$

Mặt khác, ta có $3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2$, suy ra:

$$\frac{2010}{ab+bc+ca} \ge \frac{3.2010}{(a+b+c)^2} \ge 670 \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. ❒

2. Đặt mẫu là các biến mới

★ **Thí dụ 3.** *Cho 3 số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng*

$$\frac{25x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{9z}{z+y} > 12 \qquad (5)$$

Lời giải. Đặt $a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y$ (với $a>0,\ b>0,\ c>0$). Suy ra

$$x=\frac{b+c-a}{2}, y=\frac{c+a-b}{2}, z=\frac{a+b-c}{2}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{25x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{9z}{x+y} &= \frac{25(b+c-a)}{2a}+\frac{4(c+a-b)}{2b}+\frac{9(a+b-c)}{2c}\\ &=\left(\frac{25b}{2a}+\frac{4a}{2b}\right)+\left(\frac{25c}{2a}+\frac{9a}{2c}\right)+\left(\frac{4c}{2b}+\frac{9b}{2c}\right)-19\\ &\ge 10+15+6-19=12.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}5b=2a\\ 5c=3a\end{cases} \Rightarrow 5b+5c=5a \Rightarrow x=0 \text{ (vô lí).}$$

Vậy BĐT (5) đúng. ❒

3. Đánh giá nghịch đảo

★ **Thí dụ 4.** *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác . Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a-b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \ge 3$$

Lời giải. Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$2\sqrt{\frac{b+c-a}{a}} \le \frac{b+c-a}{a}+1=\frac{b+c}{a} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c-a}} \ge \frac{2a}{b+c}.$$