

LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP CỘNG

A. BÀI GIẢNG

1. NHẮC LẠI VỀ THỨ TỰ TRÊN TẬP SỐ

Trên tập số thực, với hai số a và b sẽ xảy ra một trong các trường hợp sau:

- Số a bằng số b , kí hiệu là $a = b$.
- Số a nhỏ hơn số b , kí hiệu là $a < b$.
- Số a lớn hơn số b , kí hiệu là $a > b$.

Từ đó, ta có thêm nhận xét:

- Nếu a không nhỏ hơn b thì $a = b$ hoặc $a > b$, khi đó ta nói a lớn hơn hoặc bằng b , kí hiệu là $a \geq b$.
- Nếu a không lớn hơn b thì $a = b$ hoặc $a < b$, khi đó ta nói a nhỏ hơn hoặc bằng b , kí hiệu là $a \leq b$.

Ví dụ 1. Điền dấu thích hợp ($=, <, >$) vào ô vuông:

a. $1,53 \square 1,8$

b. $-2,37 \square -2,41$

c. $\frac{12}{-18} \square \frac{-2}{3}$

d. $\frac{3}{5} \square \frac{13}{20}$

Giải

Ta có ngay:

a. $1,53 < 1,8$ b. $-2,37 > -2,41$ c. $\frac{12}{-18} = \frac{-2}{3}$ d. $\frac{3}{5} < \frac{13}{20}$

2. BẤT ĐẲNG THỨC

Bất đẳng thức là hệ thức có một trong các dạng:

$$A > B, A \geq B, A < B, A \leq B.$$

3. LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP CỘNG

Ví dụ 2. a. Khi cộng -3 vào cả hai vế của bất đẳng thức $-4 < 2$ thì được bất đẳng thức nào?

b. Dự đoán kết quả khi cộng số c vào cả hai vế của bất đẳng thức $-4 < 2$ thì được bất đẳng thức nào?

Giải

Ta có ngay:

$$-3 - 4 < -3 + 2 \Leftrightarrow -7 < -1 \text{ (đúng) và dự đoán được rằng } c - 4 < c + 2$$

Tính chất: Với ba số a, b và c , ta có:

- Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$
- Nếu $a < b$ thì $a + c < b + c$
- Nếu $a \geq b$ thì $a + c \geq b + c$
- Nếu $a \leq b$ thì $a + c \leq b + c$

Khi cộng cùng một số vào cả hai vế của một bất đẳng thức ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Ví dụ 3. So sánh $-2004 + (-777)$ và $-2005 + (-777)$ mà không tính giá trị từng biểu thức.

Giải

Ta có $-2004 > -2005$ nên khi cộng cả hai vế của bất đẳng thức này với -777 , ta được $-2004 + (-777) > -2005 + (-777)$

Ví dụ 4. Dựa vào thứ tự giữa $\sqrt{2}$ và 3 hãy so sánh $\sqrt{2} + 2$ và 5.

Giải

Ta có $\sqrt{2} < 3$ nên khi cộng cả hai vế của bất đẳng thức này với 2, ta được $\sqrt{2} + 2 < 5$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

a. $(-2) + 3 \geq 2$

b. $-6 = 2 \cdot (-3)$

c. $4 + (-8) < 15 + (-8)$

d. $x^2 + 1 \geq 1$

Giải

a. Khẳng định $(-2) + 3 \geq 2$ là sai.

b. Khẳng định $-6 = 2 \cdot (-3)$ là đúng.

c. Khẳng định $4 + (-8) < 15 + (-8)$ là đúng.

d. Khẳng định $x^2 + 1 \geq 1$ là đúng vì:

$$x^2 \geq 0, \forall x \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 1, \forall x$$

Ví dụ 2. Cho $a < b$, hãy so sánh:

a. $a + 1$ và $b + 1$

b. $a - 2$ và $b - 2$

Giải

a. Ta có:

$$a < b \Leftrightarrow a + 1 < b + 1$$

b. Ta có:

$$a < b \Leftrightarrow a - 2 < b - 2$$

Ví dụ 3. Hãy so sánh a và b nếu:

a. $a - 5 \geq b - 5$

b. $15 + a \leq 15 + b$

Giải

a. Ta có:

$$a - 5 \geq b - 5 \Leftrightarrow a - 5 + 5 \geq b - 5 + 5 \Leftrightarrow a \geq b$$

b. Ta có:

$$15 + a \leq 15 + b \Leftrightarrow 15 + a - 15 \leq 15 + b - 15 \Leftrightarrow a \leq b$$

Câu 3: Biết bạn An nặng hơn bạn Huy, nếu gọi trọng lượng của bạn An là $a(\text{kg})$, trọng lượng bạn Huy là b . Khi đó ta có:

- A. $a < b$ B. $a \geq b$ C. $a > b$ D. $a \leq b$

Câu 4: Các bất đẳng thức sau đúng hay sai?

Nội dung	Đ	S
A. $(-3) + 5 \geq 3$		
B. $4 + (-7) < 13 + (-7)$		
C. $-3 > 2 \cdot (-1)$		
D. $a^2 + 2 < 2$		

Câu 5: Một bạn giải bài toán như sau:

Cộng -2006 vào cả hai vế của bất đẳng thức $2005 < 2006$ ta suy ra

$2005 + (-2006) \square 2006 + (-2006)$ phương án điền vào ô trống là:

- A. ' $<$ ' B. ' $>$ ' C. ' \leq ' D. ' \geq '

Câu 6: Cho bất đẳng thức $2007 - 2006 > -2006$. Khi đó $2007 - 2006$ gọi là

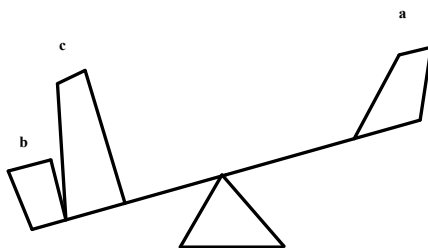
- A. Đẳng thức B. Biểu thức C. Vế trái D. Vế phải.

Câu 7: Phương án nào là bất đẳng thức

- A. $2a < b$ B. $2a = b$ C. $2a = b + 2a + b$ D. $2a : b$

Câu 8: Cho hình vẽ, coi a, b, c là khối lượng của các vật nặng. khi đó ta biểu diễn:

- A. $a > b + c$ B. $b + c > a$ C. $b + c > a$ D. Tất cả các trường hợp đều sai



LỜI GIẢI PHIẾU BÀI LUYỆN

Bài 1: a) Đúng vì $5 + (-8) = (-3) < 3$

b) Đúng vì $(-3) \cdot (-7) = 21 > (-5) \cdot (-4) = 20$

c) Đúng vì $(-7)^2 - 9 = 40 \leq (-10) \cdot (-4) = 40$

d) Đúng vì $x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$ (cùng cộng với một số)

Bài 2: HD: Ta có $a < b$

a) $a + 3 < b + 3$ (cùng cộng với 3)

b) $a - 2 < b - 2$ (cùng cộng với (-2))

c) $a + 1 < b + 1$ (cùng cộng với 1).

Vậy $a < a + 1 < b + 1 \Rightarrow a < b + 1$ (tính chất bắc cầu)

d) Tương tự có: $a - 2 < a + 1 < b + 1$

Bài 3: HD: a) $a - 4 \geq b - 4 \Leftrightarrow a \geq b$ (cùng cộng với 4)

b) $5 + a \leq 5 + b \Leftrightarrow a \leq b$ (cùng cộng với (-5))

c) $a + 9 < b + 9 \Leftrightarrow a < b$ (cùng cộng với (-9))

d) $a - 17 > b - 17 \Leftrightarrow a > b$ (cùng cộng với 17)

Bài 4: HD:

a) Thứ tự sắp xếp: 8; 3; 0; -1; -5; -7; -8 (tự biểu diễn)

b) Thứ tự sắp xếp: $\sqrt{5}; \sqrt{2}; 1; 0; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{5}$

Bài 5: HD: $x - 8 > 9 \Leftrightarrow x - 8 + 11 > 11 + 9 \Leftrightarrow x + 3 > 20$

Bài 6: HD: $x + 5 > 15 \Leftrightarrow x + 5 + (-7) > 15 + (-7) \Leftrightarrow x - 2 > 8$

Bài 7: HD: a) $x - 8 \leq -8 \Leftrightarrow x - 8 + 8 \leq (-8) + 8 \Leftrightarrow x \leq 0$

b) $|-x^2| + x > x^2 \Leftrightarrow x^2 + x > x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - x^2 > x^2 - x^2 \Leftrightarrow x > 0$

Bài 8: HD: Tính tổng: $2 + 4 + 6 + \dots + 18 + 20 = \frac{(20 + 2)}{2} \cdot [(20 - 2) : 2 + 1] = 11 \cdot 10 = 110$

$a > b \Leftrightarrow 108 + a > 108 + b \Leftrightarrow 110 + a > 108 + b.$

===== TOÁN HỌC SƠ ĐỒ =====

LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP NHÂN

A. BÀI GIẢNG

1. LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP NHÂN VỚI SỐ LƯỢNG

Ví dụ 1. a. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức $-2 < 3$ với 5091 thì được bất đẳng thức nào?

b. Dự đoán kết quả khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức $-2 < 3$ với số c dương thì được bất đẳng thức nào?

Giải

Ta có ngay:

$$-2 \cdot 5091 < 3 \cdot 5091 \Leftrightarrow -10182 < 15273 \text{ (đúng) và dự đoán được rằng } -2c < 3c \text{ với } c \text{ dương.}$$

Tính chất 1: Với ba số a, b và $c > 0$, ta có:

- Nếu $a > b$ thì $a \cdot c > b \cdot c$ và $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
- Nếu $a \geq b$ thì $a \cdot c \geq b \cdot c$ và $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$.
- Nếu $a < b$ thì $a \cdot c < b \cdot c$ và $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- Nếu $a \leq b$ thì $a \cdot c \leq b \cdot c$ và $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$.

Khi nhân hoặc chia cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Ví dụ 2. Điền dấu thích hợp ($<$, $>$) vào ô vuông:

a. $(-15,2) \cdot 3,5 \square (-15,08) \cdot 3,5$

b. $4,15 \cdot 2,2 \square (-5,3) \cdot 2,2$

Giải

a. Ta có ngay cách điền:

$$(-15,2) \cdot 3,5 < (-15,08) \cdot 3,5$$

Vì luôn có $-15,2 < -15,08$ và bất đẳng thức trên được hình thành khi nhân cả hai vế của nó với $3,5 > 0$.

b. Ta có ngay cách điền:

$$4,15 \cdot 2,2 > (-5,3) \cdot 2,2$$

Vì luôn có $4,15 > -5,3$ và bất đẳng thức trên được hình thành khi nhân cả hai vế của nó với $2,2 > 0$

2. LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP NHÂN SỐ ÂM.

Ví dụ 3. a. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức $-2 < 3$ với -345 thì được bất đẳng thức nào?

b. Dự đoán kết quả khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức $-2 < 3$ với số c âm thì được bất đẳng thức nào?

Giải

Ta có ngay: $-2 \cdot (-345) < 3 \cdot (-345) \Leftrightarrow 690 < -1035$, sai.

Tức là dấu bất đẳng thức cần đổi chiều về dạng $690 > -1035$ và dự đoán được rằng $-2c > 3c$ với c âm.

Tính chất 2.: Với ba số a, b và $c < 0$, ta có:

- Nếu $a > b$ thì $a \cdot c < b \cdot c$ và $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- Nếu $a \geq b$ thì $a \cdot c \leq b \cdot c$ và $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$.
- Nếu $a < b$ thì $a \cdot c > b \cdot c$ và $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
- Nếu $a \leq b$ thì $a \cdot c \geq b \cdot c$ và $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$.

Khi nhân hoặc chia cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.

Ví dụ 4. Cho $-4a > -4b$, hãy so sánh a và b .

Giải

Bằng cách chia hai bất đẳng thức với -4 , ta được $a < b$.

Ví dụ 5. Khi chia cả hai vế của bất đẳng thức cho cùng một số khác 0 thì sao?

Giải

Khi chia cả hai vế của bất đẳng thức cho cùng một số khác 0 thì:

- Dấu bất đẳng thức không thay đổi nếu $a > 0$.
- Dấu bất đẳng thức đổi chiều nếu $a < 0$.

3. TÍNH CHẤT BẮC CẦU CỦA THỨ TỰ

Tính chất: Với ba số a, b và c , nếu $a > b$ và $b > c$ thì $a > c$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

a. $(-6) \cdot 5 < (-5) \cdot 5$

b. $(-6) \cdot (-3) < (-5) \cdot (-3)$

c. $(-2003) \cdot (-2005) \leq (-2005) \cdot 2004$

d. $-3x^2 \leq 0$

Hướng dẫn: Sử dụng liên hệ giữa thứ tự với phép nhân.

Giải

a. Ta có bất đẳng thức

$$(-6).5 < (-5).5$$

Là **đúng** bởi nó được tạo thành khi nhân hai vế của bất đẳng thức $-6 < -5$ với $5 > 0$.

b. Ta có bất đẳng thức

$$(-6).(-3) < (-5).(-3)$$

Là **sai** bởi nó được tạo thành khi nhân hai vế của bất đẳng thức $-6 < -5$ với $-3 < 0$.

c. Ta có bất đẳng thức

$$(-2003).(-2005) \leq (-2005).2004$$

Là **sai** bởi nó được tạo thành khi nhân hai vế của bất đẳng thức $-2003 \leq 2004$ với $-2005 < 0$.

d. Ta có bất đẳng thức

$$-3x^2 \leq 0$$

Là **đúng** bởi nó được tạo thành khi nhân hai vế của bất đẳng thức $x^2 \geq 0$ với $-3 < 0$.

Ví dụ 2. a. So sánh $(-2).3$ và $-4,5$.

b. Từ kết quả câu a), hãy suy ra các bất đẳng thức sau:

$$(-2).30 < -45; (-2).3 + 4,5 < 0$$

Hướng dẫn: Lựa chọn bất đẳng thức cơ sở đúng để biến đổi.

Giải

a. Ta luôn có $-2 < -1,5$ nên bằng cách nhân cả hai vế với 3, ta được:

$$(-2).3 < -4,5. \quad (1)$$

b. Ta xây dựng:

- Bất đẳng thức $(-2).30 < -45$ được hình thành bằng cách nhân hai vế của (1) với 10.
- Bất đẳng thức $(-2).3 + 4,5 < 0$ được hình thành bằng cách cộng hai vế của (1) với 4,5

Ví dụ 3. Cho $a < b$, hãy so sánh:

$$2a \text{ và } 2b; 2a \text{ và } a + b; -a \text{ và } -b$$

Hướng dẫn: Sử dụng các phép biến đổi tương đương cho bất đẳng thức ban đầu.

Giải

Ta lần lượt thấy:

$$a < b \Leftrightarrow 2a < 2b, \text{ bằng cách nhân cả hai vế với } 2.$$

$$a < b \Leftrightarrow 2a < a + b, \text{ bằng cách cộng cả hai vế với } a.$$

$$a < b \Leftrightarrow -a > -b, \text{ bằng cách nhân cả hai vế với } -1.$$

Ví dụ 4. Số a là số âm hay dương nếu:

$$12a < 15a?$$

$$4a < 3a?$$

$$-3a > -5a?$$

Hướng dẫn: Sử dụng phép so sánh hai bất đẳng thức đầu cuối.

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} 12 < 15 \\ 12a < 15a \end{cases} \Rightarrow a > 0 \qquad \begin{cases} 4 > 3 \\ 4a < 3a \end{cases} \Rightarrow a < 0 \qquad \begin{cases} -3 > -5 \\ -3a > -5a \end{cases} \Rightarrow a > 0$$

Ví dụ 5. Hãy xác định dấu của số a , biết:

a. $6a > 3a$

b. $a \leq \frac{a}{2}$

Giải

a. Ta viết lại:

$$6a > 3a \Leftrightarrow 6.a > 3.a$$

Tức là, bất đẳng thức trên có được sau khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức đúng $6 > 3$ với a .

Vậy, từ sự cùng chiều của hai bất đẳng thức suy ra $a > 0$.

b. Ta viết lại:

$$a \leq \frac{a}{2} \Leftrightarrow 1.a \leq \frac{1}{2}.a$$

Tức là, bất đẳng thức trên có được sau khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức đúng $1 > \frac{1}{2}$ với a .

Vậy, từ sự ngược chiều của hai bất đẳng thức suy ra $a \leq 0$

Ví dụ 6. Cho $a < b$, chứng tỏ:

a. $3a + 1 < 3b + 1$

b. $-2a - 5 > -2b - 5$

Hướng dẫn: Sử dụng bất đẳng thức cơ sở để biến đổi.

Giải

Ta có:

$$a < b \Leftrightarrow 3a < 3b \Leftrightarrow 3a + 1 < 3b + 1$$

$$a < b \Leftrightarrow -2a > -2b \Leftrightarrow -2a - 5 > -2b - 5$$

Ví dụ 7. Cho bất đẳng thức $m > 0$. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với số nào thì được bất đẳng thức

$$\frac{1}{m} > 0.$$

Giải

Với bất đẳng thức giả thiết:

$m > 0$ nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $\frac{1}{m^2}$, ta được:

$$m \cdot \frac{1}{m^2} > 0 \cdot \frac{1}{m^2} \Leftrightarrow \frac{1}{m} > 0$$

Ví dụ 8. Cho $a < b$, chứng tỏ:

a. $2a - 3 < 2b - 3$

b. $2a - 3 < 2b + 5$

Hướng dẫn: Sử dụng bất đẳng thức cơ sở để biến đổi.

Giải

a. Ta có biến đổi:

$$a+5 < b+5 \Leftrightarrow a < b$$

b. Ta có biến đổi:

$$-3a > -3b \Leftrightarrow a < b$$

c. Ta có biến đổi:

$$5a-6 \geq 5b-6 \Leftrightarrow 5a \geq 5b \Leftrightarrow a \geq b$$

d. Ta có biến đổi:

$$-2a+3 \leq -2b+3 \Leftrightarrow -2a \leq -2b \Leftrightarrow a \geq b$$

Ví dụ 13. Cho $a < b$, hãy so sánh:

a. $2a+1$ và $2b+1$

b. $2a+1$ và $2b+3$

Giải

a. Ta có biến đổi:

$$a < b \Leftrightarrow 2a < 2b \Leftrightarrow 2a+1 < 2b+1 \quad (1)$$

b. Ta có:

$$1 < 3 \Leftrightarrow 2b+1 < 2b+3 \quad (2)$$

Từ (1), (2) theo tính chất bắc cầu suy ra $2a+1 < 2b+3$

Ví dụ 14. Cho $a > b > 0$, hãy chứng tỏ rằng:

a. $a^2 > ab$

b. $a^3 > b^3$

Giải

a. Với bất đẳng thức giả thiết:

$$a > b$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $a > 0$, ta được:

$$a^2 > ab, \text{ đpcm.} \quad (1)$$

b. Với bất đẳng thức giả thiết:

$$a > b \quad (*)$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức (*) với $a^2 > 0$, ta được:

$$a^3 > a^2b \quad (2)$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức (*) với $b > 0$, ta được:

$$ab > b^2 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) và (3) suy ra: } a^2 > b^2 \quad (4)$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức (4) với $b > 0$, ta được:

$$a^2b > b^3 \quad (5)$$

Từ (2) và (5) suy ra $a^3 > b^3$, đpcm.

Chú ý: Bất đẳng thức $a^2 > ab$ vẫn đúng với điều kiện:

$$a > b \text{ và } a > 0 \text{ (hoặc } a < b \text{ và } a < 0).$$

Bất đẳng thức $a^3 > b^3$ vẫn đúng với điều kiện $a > b$

Ví dụ 15. Cho $a > b > 0$, hãy chứng tỏ rằng $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Giải

Từ giả thiết $a, b > 0$ suy ra: $ab > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{ab} > 0$.

Với bất đẳng thức giả thiết: $a > b$ nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $\frac{1}{ab}$, ta được:

$$a \cdot \frac{1}{ab} > b \cdot \frac{1}{ab} \Leftrightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}, \text{ đpcm.}$$

Nhận xét: Ta có kết quả tổng quát hơn “Nếu $a > b$ thì

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \text{ nếu } a, b > 0 \\ \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \text{ nếu } a, b < 0 \end{array} \right. ”.$$

Ví dụ 16. Cho $a < b$ và $c < d$, hãy chứng tỏ rằng $a + c < b + d$.

Giải

Với bất đẳng thức giả thiết:

$$a < b$$

Cộng cả hai vế của bất đẳng thức với số c , ta được:

$$a + c < b + c \quad (1)$$

Với bất đẳng thức giả thiết:

$$c < d$$

Cộng cả hai vế của bất đẳng thức với số b , ta được:

$$b + c < b + d \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $a + c < b + d$, đpcm.

Nhận xét:

1. Bất đẳng thức trên được phát biểu “*Khi cộng theo vế của hai bất đẳng thức cùng chiều ta được một bất đẳng thức mới cùng chiều với hai bất đẳng thức đã cho*”
2. Ta còn có kết quả “*Nếu $0 < a < b$ và $0 < c < d$ thì $a \cdot c < b \cdot d$* ”.

Ví dụ 17. Cho a, b bất kì, hãy chứng tỏ rằng:

$$a. a^2 + b^2 - 2ab \geq 0.$$

$$b. \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$$

Giải

a. Biến đổi tương đương bất đẳng thức:

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

b. Với bất đẳng thức giả thiết:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab, \text{ nhân cả hai vế của bất đẳng thức với 2, ta được:}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Cộng cả hai vế của bất đẳng thức trên với $-2ab$, ta được:

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 2ab - 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Nhận xét:

1. Qua ví dụ trên, chúng ta nhận thấy ngay rằng “Để chứng minh một bất đẳng thức, ngoài việc sử dụng các tính chất thứ tự với phép cộng và phép nhân chúng ta còn có thể sử dụng các phép biến đổi tương đương để biến đổi bất đẳng thức ban đầu về một bất đẳng thức luôn đúng hoặc ngược lại (xuất phát từ một bất đẳng thức đúng biến đổi về bất đẳng thức cần chứng minh)”.

2. Xuất phát từ kết quả $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$, nếu đặt $x = a^2, y = b^2$ (khi đó $x, y \geq 0$) thì ta nhận được một bất đẳng thức dạng:

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}, \text{ với } x, y \geq 0.$$

Bất đẳng thức trên được gọi là *Bất đẳng thức Côsi*.

PHIẾU TỰ LUYỆN

Bài 1: Hãy xét xem các khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

a) $(-13).(-5) > (-13).2$;

b) $\frac{x^2}{2} \geq 0$;

c) $\left| -\frac{3}{5} \right| . 3 < 3 . \left| \frac{5}{3} \right|$;

d) $7 + (-3).5 > 7 + (-5).(-3)$.

Bài 2: Cho $a > b$, hãy so sánh:

a) $-3a + 4$ và $-3b + 4$

b) $2 + 3a$ và $2 + 3b$

c) $2a - 3$ và $2b - 3$

d) $2a - 4$ và $2b + 5$

Bài 3: Số a là âm hay dương nếu:

a) $-8a > 4a$;

b) $6a \leq 12a$;

c) $-6a \geq -12a$;

d) $-5a > 15a$

Bài 4: So sánh a và b nếu:

a) $2a + 2018 < 2b + 2018$

b) $2018a - 2019 \geq 2018b - 2019$

c) $-2018 - 5a > -2018 - 5b$

d) $(m^2 + 1)a - 9 \leq (m^2 + 1)b - 9$

Bài 5: Cho a, b, c, d, e thuộc \mathbb{R} . Chứng minh rằng:

a) $a^2 - a + 1 > 0$

b) $(a+1)(a+2)(a+3)(a+4) + 1 > 0$

c) $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

d) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$.

Bài 6: Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$

b) $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$; với $a, b \geq 0$

c) $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$

d) $a^4 + 3 \geq 4a$

Bài 7: Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ (1). Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

b) $1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$

Tự luyện

Bài 1: Số a là số âm hay dương nếu:

a) $-123a < -124a$

b) $345a > 346a$

c) $(n-67)a < (n-68)a$

d) $(n^2 + 87)a < (n^2 + 88)a$

Bài 2: Cho m bất kỳ, chứng minh :

a) $m-3 > m-4$

b) $2m-5 < 2m+1$

c) $7-3m < 3(3-m)$

Bài 3: Cho $a > b > 0$ chứng minh 1) $a^2 > ab$

2) $ab > b^2$ 3) $a^2 > b^2$

Bài 4: Cho $x < y$ hãy so sánh :

a) $2x+1$ và $2y+1$

b) $2-3x$ và $2-3y$

c) $\frac{x}{3} + 5$ và $\frac{y}{3} + 5$

Bài 5: Cho $a > b$ chứng minh :

a) $2a-3 > 2b-3$

b) $2a-5 > 2b-8$

c) $7-3a < 3(3-b)$

Bài 6: Cho a, b bất kỳ, chứng minh :

1) $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$

2) $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$

3) $a^2 + b^2 - ab \geq 0$.

LỜI GIẢI PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

Bài 1: a) Khẳng định đúng vì $65 > -26$

b) Khẳng định đúng vì $x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

c) Khẳng định đúng. vì $\frac{9}{5} < 5$

d) Khẳng định sai vì $-8 < 22$

Bài 2: a) $a > b \Leftrightarrow -3a < -3b \Leftrightarrow -3a + 4 < -3b + 4$

b) $a > b \Leftrightarrow 3a > 3b \Leftrightarrow 3a + 2 > 3b + 2$

c) $a > b \Leftrightarrow 2a > 2b \Leftrightarrow 2a - 3 > 2b - 3$

d) $2a - 4 < 2b - 4 < 2b + 5$

Bài 3: HD: a) $-8 < 4 \Rightarrow -8a > 4a$ khi và chỉ khi $a < 0$

b) $a > 0$

c) $a > 0$

d) $a < 0$

Bài 4: a) $a < b$

b) $a \geq b$

c) $a < b$

d) $a \leq b$

Bài 5: a) $(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0, \forall a$

b) $(a+1)(a+2)(a+3)(a+4) + 1 = (a^2 + 5a + 4) \cdot (a^2 + 5a + 5) + 1$

Đặt $a^2 + 5a + 4 = t$, ta được $t(t+1) + 1 = t^2 + t + 1 = (t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall t$.

c) $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

Áp dụng BĐT Bunhia ta có: $(a+b)^2 = (1 \cdot a + 1 \cdot b)^2 \leq (1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) = 2(a^2 + b^2)$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b$

d) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$.

Ta có: $a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + 1 \geq 2a$

Tương tự: $b^2 + 1 \geq 2b; c^2 + 1 \geq 2c$

Nên: $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2a + 2b + 2c = 2(a+b+c)$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$

Bài 6: HD:

a) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0; \frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0$

b) $\Leftrightarrow \frac{3}{8}(a+b)(a-b)^2 \geq 0$

c) $\Leftrightarrow (a^3 - b^3)(a-b) \geq 0$

d) $\Leftrightarrow (a-1)^2(a^2 + 2a + 3) \geq 0$

Bài 7: HD: $\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow a < b$

$\Leftrightarrow (a-b)c < 0 \Rightarrow ac < bc \Rightarrow ac + ab < bc + ab \Rightarrow a(b+c) < b(a+c) \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

a) Sử dụng (1), ta được: $\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}; \frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c};$

$$\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}.$$

Cộng các BĐT về theo về, ta được đpcm.

b) Sử dụng tính chất phân số, ta có: $\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+c}$

Tương tự: $\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c+d} < \frac{b}{b+d}; \quad \frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d+a} < \frac{c}{a+c};$

$$\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a+b} < \frac{d}{d+b}$$

Cộng các BĐT về theo về ta được đpcm.

===== TOÁN HỌC SƠ ĐỒ =====