Diễn đàn toán học VMF

Tổng hợp và LaTeX by *tthnew*

Ôn thi bất đẳng thức

THPT CHUYÊN 2021

BẤT ĐẲNG THỨC THI CHUYÊN 2021

Diễn đàn toán học

ÔN THI BẤT ĐẲNG THỨC THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2020-2021

Các thành viên VMF

Ngày 9 tháng 2 năm 2021

Tóm tắt nội dung

File này chỉ tổng hợp các bài viết trong TOPIC ÔN THI BẤT ĐẲNG THỨC THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2020-2021 của Diễn đàn Toán học và LaTeX lại các lời giải cho đẹp mắt hơn. Ngoài ra mình không thêm bớt bất kỳ thứ gì khác.

Bài toán 1. *Cho $x \geq y \geq z, x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=6$*

a) Tính $S=(x-y)^2+(x-y)(y-z)+(y-z)^2$

b) Tìm giá trị lớn nhất của $P=|(x-y)(y-z)(z-x)|$ △

Bài toán 2. *Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$. Chứng minh:*

$$\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{3}{2}$$

△

Chứng minh (1).
Ta có

$$\left(a^2+bc\right)\left(1+\frac{b}{c}\right) \geq (a+b)^2.$$

Từ đó suy ra:

$$\sum \frac{a}{a^2+bc} \leq \sum \frac{a\left(1+\frac{b}{c}\right)}{(a+b)^2}=\sum \frac{a+\frac{ab}{c}}{(a+b)^2}=\sum \frac{ac+ab}{c(a+b)^2}$$
$$\leq \sum \frac{ac+ab}{c(\sqrt{2ab})^2}=\sum \frac{ac+ab}{4abc}=\frac{2\sum ab}{4abc}=\frac{3}{2}$$

Chứng minh (2).
Từ giả thiết suy ra

$$\sum \frac{1}{a}=3$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$VT \leq \sum \frac{a}{2a\sqrt{bc}} \leq \sum \frac{1}{2a}=\frac{3}{2}$$

Xảy ra khi $a=b=c=1$ ■

Bài toán 3. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:*

$$A = 4(a^2+b^2+c^2) - (a^3+b^3+c^3) \geq 9$$

△

Chứng minh (1).
Giả sử $a \geq b \geq c$.

Theo UCT dễ dàng tìm ra được bất đẳng thức phụ sau

$$4a^2 - a^3 \geq 3 + 5(a-1) \Leftrightarrow (a-1)^2(2-a) \geq 0$$

Ta qui về chứng minh

$$\sum (a-1)^2(2-a) \geq 0 \Leftrightarrow \sum (3a-3)^2(2-a) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2a-b-c)^2(2-a) \geq 0 \Leftrightarrow \sum (12-4a-b-c)(a-b)(a-c) \geq 0$$

Mà $a \geq b \geq c$ nên

$$12-4c-a-b \geq 12-4b-a-c \geq 12-4a-b-c$$

Lại có

$$12-4a-b-c = (3-a-b-c)+(9-3a) > 0$$

Vậy theo định lý 1 của bất đẳng thức Vornicu-Schur thì bài toán đã được chứng minh.■

Chứng minh (2).

$$\rightarrow 4(a^2+b^2+c^2)(a+b+c) - 3(a^3+b^3+c^3) \geq 27$$

$$\rightarrow a^3+b^3+c^3 + \sum 4ab(a+b) \geq (a+b+c)^3$$

$$\rightarrow \sum ab(a+b) \geq 6abc$$

(đúng theo $AM-GM$) ■

Bài toán 4. *Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+xyz=4$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = x+y+z$$

△

Chứng minh.
Tìm Max:

Chứng minh (1).
Không mất tính tổng quát, giả sử x, y cùng phía với 1.
Khi đó ta có:

$$(x-1)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq x+y-1 \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$4 = x^2+y^2+z^2+xyz \geq 2xy+z^2+xyz$$

$$\Rightarrow 4 - z^2 \geq 2xy + 2xyz$$

$$\Leftrightarrow (2-z)(2+z) \geq xy(2+z)$$

$$\Leftrightarrow 2 - z \geq xy \tag{2}$$

■

Từ (1), (2) suy ra

$$2 - z \geq x + y - 1 \Leftrightarrow P = x + y + z \leq 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Chứng minh (2).
Đặt $t = \sqrt{2 - x}$.

Khi đó ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 + xyz = x^2 + 2t^2 + xt^2 \Leftrightarrow x(yz - t^2) = 2t^2 - (y^2 + z^2).$$

Ta có

$$x + 2t = x + 2\sqrt{2 - x} \leq 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0,$$

(luôn đúng).

Ta đi chứng minh $y + z \leq 2t$.

- Nếu $yz - t^2 = 0$ thì $2t^2 - (y^2 + z^2) = 0$. Từ đó $t = y = z$ hay $y + z = 2t$.
- Xét trường hợp ngược lại.

  Ta có

  $$x = \frac{2t^2 - (y^2 + z^2)}{yz - t^2} \Rightarrow x - 2 = \frac{4t^2 - (y+z)^2}{yz - t^2} \geq 0$$

  .

  Mặt khác nếu $yz - t^2 > 0$ thì $2t^2 - (y^2 + z^2) < 0$. Dễ thấy điều này không xảy ra.
  Do đó $yz - t^2 < 0$ nên $4t^2 - (y+z)^2 \geq 0$. Do đó $2t \geq y + z$.

Suy ra

$$x + y + z \leq x + 2t \leq 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.
Vậy Max P = 3 khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. ■

Tìm Min:

Giả sử $z = \min\{x, y, z\}$. Khi đó $z \leq 1$.

Khi đó ta có $2xy \geq z^2 + xyz$ nên kết hợp với giả thiết ta có

$$x^2 + y^2 + 2xy \geq 4 \Leftrightarrow x + y \geq 2 \Rightarrow P = x + y + z \geq 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 2; y = 0; z = 0$ và các hoán vị.
Vậy:

$P_{\min} = 2$ khi $x = 2; y = 0; z = 0;$

$P_{\max} = 3$ khi $x = y = z = 1.$ ■

Bài toán 5. *Với x, y là hai số thực dương và $xy \geq 6$.*

a) Chứng minh rằng: $\dfrac{9}{9+x^2} + \dfrac{4}{4+y^2} \geq \dfrac{12}{6+xy}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = \dfrac{9}{9+x^2} + \dfrac{4}{4+y^2} + \dfrac{1}{3}xy$

△

Bài toán 6. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$A = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \geq \sqrt{2}(a+b+c)$$

△

Chứng minh (1).

$$2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} \geq \frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sum \sqrt{a^2+b^2} \geq \sum \frac{a+b}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(a+b+c)$$

Chứng minh (2).
Áp dụng bất đẳng thức Minkowski

$$\sum \sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{(a+b+c)^2+(a+b+c)^2} = \sqrt{2}(a+b+c)$$

Bài toán 7. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P = \frac{9}{1-(ab+bc+ca)} + \frac{1}{4abc}$$

△

Chứng minh.

$$P = \frac{9}{1-ab-bc-ac} + \frac{1}{4abc} = \frac{9}{1-ab-bc-ac} + \sum \frac{1}{4ab}$$
$$\geq \frac{9}{2-2(ab+bc+ac)} + \frac{9}{2-2(ab+bc+ac)} + \frac{9}{4(ab+bc+ac)} \geq \frac{81}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$ ■

Bài toán 8. *Cho $a, b, c > 0 : a+b+c \geq 9$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$A = 2.\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5}} + 3.\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{9}{b} + \frac{25}{c}}$$

△

Chứng minh.
Ta có:

$$A \geq 2\sqrt{\frac{(a+b+c)^2}{9}}+3\sqrt{\frac{81}{a+b+c}} = \frac{2(a+b+c)}{3}+\frac{27}{\sqrt{a+b+c}} \geq 2\sqrt{18\sqrt{a+b+c}} \geq 6\sqrt{6}$$

Xong. ■

Bài toán 9. *Cho a, b, c không âm và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4} \geq 7$$

△

Chứng minh.
Ta đi chứng minh: $\sqrt{5a+4} \geq a+2 \Leftrightarrow a(a-1) \leq 0$ (luôn đúng)

Suy ra:

$$\sum \sqrt{5a+4} \geq \sum a+6=7$$

Đẳng thức xảy ra khi $(a, b, c)=(1,0,0)$ và các hoán vị. ■

Bài toán 10. *Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$. Chứng minh:*

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z} \leq 1$$

△

Chứng minh.
Ta có:

$$\sum \frac{1}{2x+y+z}=\frac{1}{16} \sum \frac{16}{x+x+y+z}$$
$$\leq \frac{1}{16} \sum\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{4} \sum \frac{1}{x}=1.$$

Hoàn tất chứng minh. ■

Bài toán 11. *Cho a, b, c là các số thực dương bất kỳ. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2}(a+b+c)+\frac{27}{16} \cdot \frac{(a-b)^2}{a+b+c}$$

△

Chứng minh (1).
BĐT tương đương với:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}+\frac{27(a-b)^2}{16(a+b+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a+b}+\frac{(a+b+c)(a+b+2c)}{(a+c)(b+c)}+\frac{27(a+c)(b+c)}{4(a+b+c)^2} \geq \frac{7}{2}+\frac{27(a+b+2c)^2}{16(a+b+c)^2}.$$

Áp dụng BĐT AM-GM:

$$VT \geq \frac{c}{a+b} + 3\sqrt{\frac{3(a+b+2c)}{a+b+c}}.$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{t^2-3}{6-t^2} + 3t \geq \frac{7}{2} + \frac{3t^4}{16},$$

với $t = \sqrt{\frac{3(a+b+2c)}{a+b+c}}$, hay là

$$\frac{3(t-2)^2[(t^2-3)(t^2+4t+9)+4t-5]}{16(6-t^2)} \geq 0.$$

BĐT cuối cùng đúng do $\sqrt{3} < t < \sqrt{6}$. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a = b = c$. ■

Chứng minh (2).
Nếu $c \neq \text{mid}\{a,b,c\}$ thì $(a-b)^2 \leqslant \sum_{cyc}(a-b)^2$, từ đây bất đẳng thức đưa về đối xứng dễ dàng.
Nếu $c = \text{mid}\{a,b,c\}$:
Do tính thuần nhất, chuẩn hóa $a+b=1$. Đặt $x = ab \Rightarrow 0 < x \leqslant c\,(1-c)$. Cần chứng minh

$$f(x) = 108\,x^2 + \left(16\,c^3 + 84\,c^2 + 12\,c - 83\right)x + (c+1)\left(16\,c^4 + 8\,c^3 - 16\,c^2 - 19\,c + 16\right) \geqslant 0.$$

Chú ý rằng

$$16\,c^4 + 8\,c^3 - 16\,c^2 - 19\,c + 16 = \left(4c^2 + c - 3\right)^2 + \frac{1}{28}\,(14c-13)^2 + \frac{27}{28} > 0$$

- Nếu $(16\,c^3 + 84\,c^2 + 12\,c - 83) > 0$ thì ta có điều phải chứng minh.
- Trong trường hợp ngược lại ta có

$$\Delta_x = \left[4\,c\left(16\,c^3 + 84\,c^2 + 12\,c - 83\right) - (4\,c+1)\left(332\,c^2 + 364\,c + 23\right)\right](2c-1)^2 \leqslant 0.$$

Xong. ■

Bài toán 12. *Cho $a,b,c > 0; 9ab + 18ac + 3bc \leq \frac{18}{5}$. Tìm* $\min\left(\frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{12}{c}\right)$ △

Chứng minh.
Đặt

$$(a;b;c) = \left(\frac{1}{5}x; \frac{2}{5}y; \frac{3}{5}z\right).$$

Ta có

$$9ab + 3bc + 18ca \leq \frac{18}{5} \Leftrightarrow \frac{18xy}{25} + \frac{18yz}{25} + \frac{54zx}{25} \leq \frac{18}{5} \Leftrightarrow xy + yz + 3zx \leq 5.$$

$$P = \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{12}{c} = \frac{20}{x} + \frac{10}{y} + \frac{20}{z}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$5 = xy + yz + 3zx \geq 5\sqrt[5]{xy.yz.(zx)^3} = 5\sqrt[5]{x^4y^2z^4} \Rightarrow x^2yz^2 \leq 1;$$

$$P = 10\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z}\right) \geq 50\sqrt[5]{\frac{1}{x^2yz^2}} \geq 50.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x = y = z = 1 \Leftrightarrow (a, b, c) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

Vậy $P_{\min} = 50$ khi $(a, b, c) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$. ■

Bài toán 13. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}} + \frac{1}{\sqrt{b^3+c}} + \frac{1}{\sqrt{c^3+a}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

△

Chứng minh.
Từ giả thiết ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$.
Áp dụng C-S

$$\sum \frac{1}{\sqrt{a^3+b}} \leq \sum \frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt[4]{a^3b}} \leq \sum \frac{1}{4\sqrt{2}}(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sum \frac{1}{a}) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$. ■

Bài toán 14. *Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(b+c)^2} + \frac{c}{4a}$$

△

Chứng minh (1).
Sử dụng bất đẳng thức phụ

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{1}{ab+1}$$

(Chứng minh bằng cách biến đổi tương đương)

$$P = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(b+c)^2} + \frac{c}{4a} = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{xy}{4} \geq \frac{1}{xy+1} + \frac{xy+1}{4} - \frac{1}{4} \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Với $(x, y) = \left(\frac{b}{a}, \frac{c}{b}\right)$
Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. ■

Chứng minh (2).
Áp dụng BĐT AM-GM

$$P \geq \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(b+c)^2} + \frac{c^2}{(c+a)^2}.$$

Lại theo BĐT Cauchy-Schwarz

$$PQ \geq [a(a+b) + b(b+c) + c(c+a)]^2,$$

với

$$\begin{aligned} Q &= (a+b)^2(a+c)^2 + (b+c)^2(b+a)^2 + (c+a)^2(c+b)^2 \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2+b^2+c^2)(bc+ca+ab) + 3(bc+ca+ab)^2 \\ &= (a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)^2 + 4abc(a+b+c) \\ &\leq \frac{4(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)^2}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{3}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a = b = c$. ■

Chứng minh (3).

$$P \geq \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{a^2}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^2}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\right] = \frac{3}{4} \cdot R.$$

Mà

$$R + 1 = \sum_{cyc} \left[\frac{a^2}{a^2+ab+b^2} + \frac{c^2}{c(a+b+c)}\right] \geq \sum_{cyc} \left[\frac{(a+c)^2}{a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab}\right] = 2$$

$\Rightarrow R \geq 1$
$\Rightarrow P \geq \frac{3}{4}$ (đpcm). ■

Bài toán 15. *Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $(x-y)(x-z) = 1$ và $y \neq z$. Chứng minh:*

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \geq 4$$

△

Bài toán 16. *Cho $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{1}{4x^2 - yz + 2} + \frac{1}{4y^2 - zx + 2} + \frac{1}{4z^2 - xy + 2}$$

Chứng minh.
Đặt $(xy, yz, zx) = (a, b, c)$.

Ta có $a + b + c = 1$. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$P = \sum \frac{1}{4\frac{ca}{b} - b + 2} = \sum \frac{b}{4ca - b^2 + 2b} = \sum \frac{b}{4ca - b^2 + 2b(a + b + c)}$$
$$= \sum \frac{b}{4ca + 2ab + 2bc + b^2} \geq \sum \frac{b}{(a + b + c)^2} = \frac{1}{a + b + c} = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ tức là $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy Min P $= 1$ khi $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$. ■

Bài toán 17. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 2$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{8a^2 + 1} + \frac{1}{8b^2 + 1} + \frac{1}{8c^2 + 1} \geq 1$$

△

Chứng minh.

$$\sum \frac{1}{a+1} = 2 \Leftrightarrow \sum \frac{a}{a+1} = 1$$

Từ

$$\sum \frac{1}{8a^2 + 1} \geq 1 \Leftrightarrow \sum \frac{8a^2}{8a^2 + 1} \leq 2 \Leftrightarrow \sum \frac{4a^2}{8a^2 + 1} \leq 1$$
$$\Leftrightarrow \sum \frac{4a^2}{8a^2 + 1} \leq \sum \frac{a}{a+1}$$

Xét

$$\frac{4a^2}{8a^2 + 1} \leq \frac{a}{a+1} \Leftrightarrow (2a - 1)^2 \geq 0$$

(hiển nhiên đúng) Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{2}$ ■

Bài toán 18. *Cho tam thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực, $a < b, a \neq 0; P(x) \geq 0$. Tam thức xác định với mọi x là số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T = \frac{a + b + c}{b - a}$$

△

Chứng minh.
Từ giả thiết ta có $0 < a < b$ và $b^2 - 4ac \leq 0$. Suy ra

$$T \geq \frac{a + b + \frac{b^2}{4a}}{b - a} = \frac{(2a + b)^2}{4a(b - a)} = 3 + \frac{(4a - b)^2}{4a(b - a)} \geq 3.$$

Từ đó thu được $T_{min} = 3$ khi $b = c = 4a$. ■

Bài toán 19. *Cho* $x, y, z > 0, xyz \geq 1, z \leq 1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất*

$$P = \frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} + \frac{4-z^3}{3+3xy}$$

△

Chứng minh.
Bài toán phụ: Với xy≥ 1 thì ta có

$$\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \geq \frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1}$$

Do đó
$$P = \frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} + \frac{1}{1+xy} + \frac{1-z^2}{3(1+xy)} \geq \frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1} + \frac{1}{1+xy}$$

Mặt khác
$$\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1} + \frac{1}{1+xy} \geq \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{xy}-1)^2 \geq 0$$

(hiển nhiên đúng)
Vậy $P_{\min} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$ ■

Bài toán 20. *Cho* $x, y, z > 0$ *và* $xy + yz + zx = 3$. *Chứng minh rằng:*

$$P = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1} \geq \frac{3}{2}$$

△

Chứng minh.
Không mất tính tổng quát, ta giả sử $yz \geq 1$.
$\Rightarrow P \geq \dfrac{2}{yz+1} + \dfrac{1}{x^2+1}$.
Bây giờ ta chứng minh
$$\frac{2}{yz+1} + \frac{1}{x^2+1} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{yz+1} - \frac{1}{2} \geq 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y+z)}{2(yz+1)} \geq \frac{x^2}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+z}{yz+1} \geq \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow (y+z)(x^2+1) \geq 2x(yz+1)$$

$$\Leftrightarrow x(3-yz) + y + z \geq 2x(yz+1)$$

$$\Leftrightarrow 3x - xyz + y + z \geq 2xyz + 2x$$

$$\Leftrightarrow x + y + z \geq 3xyz.$$

BĐT cuối đúng do $3(x+y+z) = (x+y+z)(yz+zx+xy) \geq 9xyz$. Ta có điều phải chứng minh. ■

Bài toán 21. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $3(a+b+c) = abc$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{b}{a^2} + \frac{c}{b^2} + \frac{a}{c^2} \geq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2$$

△

Chứng minh (1).
Ta viết bất đẳng thức đã cho lại thành:

$$\frac{3\left(a+b+c\right)}{abc} \cdot \left(\frac{b}{a^2} + \frac{c}{b^2} + \frac{a}{c^2}\right)^2 \geqslant \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^4$$

Hay tương đương với

$$\sum_{cyc} bc^2 \left[47a^2c^4 + 8b^2\left(5a+3b\right)c^3 + b^2\left(141a^2 + 25ab + 24b^2\right)c^2 + 20a^2b^3c + a^3b^2\left(74a+b\right)\right](a-b)^2 \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. ■

Chứng minh (2).
Ta có kết quả như sau

Bổ đề 1.

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq \frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}{yz+zx+xy} \quad \forall x, y, z > 0.$$

Chứng minh. Bất đẳng thức tương đương với

$$(yz+zx+xy)\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}\right) \geq (x+y+z)(x^2+y^2+z^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy^3}{z} + \frac{yz^3}{x} + \frac{zx^3}{y} \geq x^2y + y^2z + z^2x$$

$$\Leftrightarrow x^2y^4 + y^2z^4 + z^2x^4 \geq xyz(x^2y + y^2z + z^2x).$$

Áp dụng BĐT AM-GM cho từng cặp số bên VT ta có ngay đpcm.
Trở lại bài toán. Đặt $x = \dfrac{1}{a}; y = \dfrac{1}{b}; z = \dfrac{1}{c}$. Ta có $yz + zx + xy = \dfrac{1}{3}$. Áp dụng bổ đề, ta có:

$$VT = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq 3(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)$$

$$\geq (x+y+z)^3 \geq (x+y+z)^2\sqrt{3(yz+zx+xy)} = VP.$$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $x = y = z = 3$. ■

Bài toán 22. *Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:*

$$S = \frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} + \frac{9}{2(a+b+c)}$$

△

Chứng minh.
Đổi biến $(x, y, z = \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$
Ta có $xyz = 1$
Áp dụng Cauchy Schwars

$$\begin{aligned} S &= \sum \frac{y^2}{x} + \frac{9}{2(xy+yz+xz)} \\ &\geq x+y+z+\frac{9}{2\sum xy} \geq \sqrt{3(xy+yz+xz)} + \frac{9}{2\sum xy} \\ &= \frac{\sqrt{3(xy+yz+xz)}}{2} + \frac{\sqrt{3(xy+yz+xz)}}{2} + \frac{9}{2\sum xy} \geq \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Xảy ra khi $x = y = z = 1$ hay $a = b = c = 1$ ■

Bài toán 23. *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc \geq 1$. Chứng minh:*

$$\frac{1}{a^5+b^5+c^2} + \frac{1}{b^5+c^2+a^2} + \frac{1}{c^5+a^2+b^2} \leq \frac{3}{a^2+b^2+c^2}$$

△

Chứng minh.
Áp dụng bất đẳng thức bunhiacopxki.Ta có

$$(a^5+b^5+c^2)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+c^2) \geq (a^2+b^2+c^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 3c(a^5+b^5+c^2)(a+b+c) \geq 3(a^2+b^2+c^2)^2 \geq (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow a^5+b^5+c^2 \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{3c}$$

Nên

$$VT \leq \sum \frac{3c}{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)} = \frac{3}{a^2+b^2+c^2}$$

Xảy ra khi $a = b = c$. ■

Bài toán 24. *Cho các số dương x, y. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P = \frac{2}{\sqrt{(2x+y)^3+1}-1} + \frac{2}{\sqrt{(x+2y)^3+1}-1} + \frac{(2x+y)(2y+x)}{4} - \frac{8}{3(x+y)}$$

△

Chứng minh.
Đặt $(a, b) = (2x + y, 2y + x)$
$P = \dfrac{2}{\sqrt{a^3+1}-1} + \dfrac{2}{\sqrt{b^3+1}-1} + \dfrac{ab}{4} - \dfrac{8}{a+b}$
Áp dụng AM-GM

$$2\sqrt{a^3+1} = 2\sqrt{(a+1)(a^2-a+1)} \leq a+1+a^2-a+1 = a^2+2$$

Tương tự

$$2\sqrt{b^3+1} \leq b^2+2$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$P \geq \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{ab}{4} - \frac{4}{\sqrt{ab}} \geq \frac{8}{t^2} + \frac{t^2}{4} - \frac{4}{t}$$

Với $t = \sqrt{ab}$. Ta sẽ chứng minh

$$\frac{8}{t^2} + \frac{t^2}{4} - \frac{4}{t} \geq 1 \Leftrightarrow (t-2)^2(t^2+4t+8) \geq 0,$$

luôn đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 2$ hay $x = y = \dfrac{2}{3}$ ■

Bài toán 25. *Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a + b = \frac{2}{3}$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{\sqrt{a+2b}} + \frac{1}{\sqrt{2a+b}} \geq 2$$

△

Chứng minh.
Áp dụng Cauchy và Cauchy-Schwarz có

$$\frac{1}{\sqrt{a+2b}} + \frac{1}{\sqrt{b+2a}} \geq \frac{8}{1+a+2b+1+b+2a} = \frac{8}{2+3(a+b)} = 2$$

Xong. ■

Bài toán 26. *Cho x, y là hai số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{x.\sqrt{y} + y.\sqrt{x}}{x+y} - \frac{x+y}{2} \leq \frac{1}{4}$$

△

Chứng minh.

$$\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x+y}=\frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x+y}\leq\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}-\frac{x+y}{2}\leq-\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{4}$$
$$\Rightarrow VT\leq\frac{t}{2}-\frac{t^2}{4}=\frac{1-(t-1)^2}{4}\leq\frac{1}{4}$$

Với $t=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ■

Bài toán 27. *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^3+ab^2}{a^2+b+b^2}+\frac{b^3+bc^2}{c^2+c+b^2}+\frac{c^3+ca^2}{c^2+a+a^2}\geq 2$$

△

Chứng minh.

$$\frac{a^3+ab^2}{a^2+b+b^2}=a-\frac{ab}{a^2+b+b^2}\geq a-\frac{ab}{3b\sqrt[3]{a^2}}=a-\frac{3\sqrt[3]{a}}{9}\geq a-\frac{a+1+1}{9}=\frac{8a}{9}-\frac{2}{9}$$

Tương tự suy ra

$$VT\geq\frac{8}{9}(a+b+c)-\frac{2}{3}=2$$

Xảy ra khi $a=b=c=1$. ■

Bài toán 28. *Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=2021$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{a}{a+\sqrt{2021a+bc}}+\frac{b}{b+\sqrt{2021b+ac}}+\frac{c}{c+\sqrt{2021c+ab}}$$

△

Chứng minh.
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$P=\sum\frac{a}{a+\sqrt{a(a+b+c)+bc}}=\sum\frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(c+a)}}$$
$$\leq\sum\frac{a}{a+\sqrt{ac}+\sqrt{ba}}=\sum\frac{\sqrt{a}}{\sum\sqrt{a}}=1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{2021}{3}$.

Vậy Max $P=1$ khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{2021}{3}$. ■

Bài toán 29. *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{2a^2}{a+b^2}+\frac{2b^2}{b+c^2}+\frac{2c^2}{c+a^2}\geq a+b+c$$

△

Chứng minh.

$$\frac{2a^2}{a+b^2} = 2a - \frac{2ab^2}{a+b^2} \geq 2a - b\sqrt{a}$$

$$VT \geq 2(a+b+c) - (b\sqrt{a} + c\sqrt{b} + a\sqrt{c})$$

Áp dụng bài toán phụ quen thuộc

$$3(ab^2 + bc^2 + a^2c) \leq (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

$$3(\sum b\sqrt{a}) \leq (\sum \sqrt{a})(a+b+c) \leq 3(a+b+c) \Rightarrow \sum b\sqrt{a} \leq a+b+c$$

Suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. ■

Bài toán 30. *Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$Q = 14(a^2+b^2+c^2) + \frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}$$

△

Chứng minh.
Áp dụng bổ đề

$$3(a^2b + b^2c + ac^2) \leq (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) = a^2+b^2+c^2$$

Ta có

$$Q \geq 14t + \frac{3(1-t)}{2t},$$

với $t = a^2 + b^2 + c^2$.

$$Q \geq \frac{27t}{2} + \frac{3}{2t} + \frac{t}{2} - \frac{3}{2} \geq \frac{23}{3}$$

Xảy ra khi $t = \dfrac{1}{3}$ hay $x = y = z = \dfrac{1}{3}$ ■

Bài toán 31. *Cho a, b, c là ba số dương bất kì thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P = \frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2}$$

△

Chứng minh.
Sử dụng phương pháp tiếp tuyến:

$$\frac{a}{b^2+c^2} = \frac{a}{1-a^2} \geq \frac{3.\sqrt{3}}{2}a^2$$

Chứng minh bất đẳng thức này bằng cách biến đổi tương đương. ■

Bài toán 32. *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x \geq y \geq z$ và $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$B = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + 3y$$

△

Bài toán 33. *Cho hai số thực a, b đều lớn hơn 1. Chứng minh rằng:*

$$\frac{6}{a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}} + \sqrt{3ab+4} \geq \frac{11}{2}$$

△

Chứng minh.

$$a\sqrt{b-1} = \sqrt{a}\sqrt{ab-a} \leq_{AM-GM} \frac{ab}{2}$$
$$\to VT \geq \frac{6}{ab} + \sqrt{3ab+4} = \frac{6}{ab} + \frac{4(3ab+4)}{4\sqrt{3ab+4}}$$
$$\geq \frac{6}{ab} + \frac{8(3ab+4)}{20+3ab} \geq \frac{11}{2} \Leftrightarrow \frac{15ab(ab-4)^2}{2abb(20+3ab)} \geq 0$$

Bài toán 34. *Cho $x, y, z > 0$. CMR:*

$$\frac{x}{x+\sqrt{\frac{(y+z)(2x+y+z)}{2}}} + \frac{y}{y+\sqrt{\frac{(z+x)(2y+z+x)}{2}}} + \frac{z}{z+\sqrt{\frac{(x+y)(2z+x+y)}{2}}} \leq 1.$$

△

Chứng minh (1).
Chú ý rằng theo AM-GM ta có

$$\sqrt{\frac{1}{2}(y+z)(2x+y+z)} \geqslant \frac{2(y+z)(2x+z+y)}{3(y+z)+2x}$$

Ta quy về chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn

$$\sum_{cyc} \frac{x(3y+3z+2x)}{2x^2+7xy+7zx+2y^2+4yz+2z^2} \leqslant 1$$

Nhưng điều này hiển nhiên đúng vì ta có

$$\frac{x(3y+3z+2x)}{2x^2+7xy+7zx+2y^2+4yz+2z^2} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{14x^2+21xy+21zx+4yz}{7x^2+23xy+23zx+7y^2+23yz+7z^2}$$
$$\Leftrightarrow 3\left[(x-y)^2 z(2x+3z) + (x-z)^2 y(2x+3y) + (y+z-2x)^2 yz\right]$$
$$+ (x+y-2z)^2 yz + (z+x-2y)^2 yz \geqslant 0$$

và

$$\frac{1}{2}\sum_{cyc} \frac{14x^2+21xy+21zx+4yz}{7x^2+23xy+23zx+7y^2+23yz+7z^2} = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$. ■

Chứng minh (2).
Đặt $\dfrac{x}{x+\sqrt{\dfrac{(y+z)(2x+y+z)}{2}}}=a$, và tương tự.
Giả sử tồn tại $x,y,z>0$ sao cho $a+b+c>1$. Khi đó

$$\frac{x}{x+\sqrt{\dfrac{(y+z)(2x+y+z)}{2}}}>\frac{a}{a+b+c}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{\dfrac{(y+z)(2x+y+z)}{2}}}>\frac{a}{b+c}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{(x+y+z)^2-x^2}>\frac{a^2}{2(b+c)^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{(x+y+z)^2}>\frac{a^2}{a^2+2(b+c)^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+y+z}>\frac{a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}.$$

Lập hai BĐT tương tự rồi cộng theo vế, ta có

$$1>\frac{a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+2(c+a)^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+2(a+b)^2}}=P.$$

Mặt khác, theo BĐT Cauchy-Schwarz

$$P\ge \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{a^2+2(b+c)^2}+b\sqrt{b^2+2(c+a)^2}+c\sqrt{c^2+2(a+b)^2}}$$
$$\ge \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{(a+b+c)\{a[a^2+2(b+c)^2]+b[b^2+2(c+a)^2]+c[c^2+2(a+b)^2]\}}}\ge 1.$$

Mâu thuẫn nhận được cho ta điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $x=y=z$.■

Bài toán 35. *Cho a,b,c là ba số thực thỏa mãn $c\ge b\ge a\ge 0$. Chứng minh rằng:*

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a)\ge 60abc$$

△

Chứng minh (1).
Ta có

$$a+3b\ge 4a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}};\, b+4c\ge 5b^{\frac{1}{5}}c^{\frac{4}{5}};\, c+2a\ge 3c^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}$$

Nhân lại ta được

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a)\ge 60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{17}{15}}\ge 60abc$$

Chứng minh (2).
Đặt $\frac{b}{a} = x \geq 1; \frac{c}{b} = y \geq 1$.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$(1+3x)(1+4y)\left(1+\frac{2}{xy}\right) \geq 60$$

$$\Leftrightarrow (1+3x+4y+12xy)\left(1+\frac{2}{xy}\right) \geq 60$$

$$\Leftrightarrow 3x+4y+12xy+\frac{2}{xy}+\frac{6}{y}+\frac{8}{x} \geq 35.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM:

$$3x+\frac{3}{x} \geq 6; 4y+\frac{4}{y} \geq 8; 10xy+\frac{10}{x}+\frac{10}{y} \geq 30; 2xy+\frac{2}{xy} \geq 4.$$

Mặt khác ta cũng có:

$$\frac{-5}{x} \geq -5; \frac{-8}{y} \geq -8.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta có đpcm. ■

Bài toán 36. *Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c dương ta có:*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$$

△

Bài toán 37. *Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$ thì:*

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ca+2b^2+2b} \geq \frac{1}{ab+bc+ca}$$

△

Bài toán 38. *Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\frac{27a^2}{2}+4b^2+c^2 = 1-2bc$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P = 3a+2b+c$$

△

Chứng minh.
Đặt $(3a, 2b, c) = (x, y, z)$.

Giả thiết tương dương với: $\frac{3}{2}x^2+y^2+z^2+yz = 1$.

Xét hiệu

$$y^2+yz+z^2-\frac{3}{4}(y+z)^2 = \frac{1}{4}(y-z)^2 \geq 0 \forall y, z$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{3}{2}x^2 + y^2 + z^2 + yz \geq \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}(y+z)^2 \Rightarrow 2x^2 + (y+z)^2 \leq \frac{4}{3}.$$

Xét hiệu

$$2x^2+(y+z)^2-\frac{2}{3}(x+y+z)^2 = \frac{1}{3}(2x-y-z)^2 \geq 0 \Rightarrow (x+y+z)^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq P \leq \sqrt{2}.$$

$$P = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{2}}{3}; P = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{-\sqrt{2}}{3}.$$

Vậy $P_{\min} = -\sqrt{2}; P_{\max} = \sqrt{2}$. ■

Bài toán 39. *Cho $a, b, c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:*

$$M = \frac{3a^4 + 3b^4 + c^3 + 2}{(a+b+c)^3}$$

△

Chứng minh.

Áp dụng Holder và AM-GM

$$M = \frac{3a^4 + 3b^4 + c^3 + 2}{(a+b+c)^3} \geq \frac{4a^3 + 4b^3 + c^3}{(a+b+c)^3}$$

$$= \frac{(4a^3 + 4b^3 + c^3)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1)}{4(a+b+c)^3} \geq \frac{(a+b+c)^3}{4(a+b+c)^3} = \frac{1}{4}.$$

Xảy ra khi $a = b = 1, c = 2$. ■

Bài toán 40. *Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2$. Chứng minh:*

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

△

Chứng minh.

Cần chứng minh bổ đề

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{x+y+z} \Leftrightarrow \sum (x-y)^2(\frac{1}{y} - \frac{1}{x+y+z}) \geq 0,$$

luôn đúng.

Áp dụng bổ đề ta được

$$\sum \frac{x^2}{y} \geq \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{x+y+z} = \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{2}$$

Xong. ■

Bài toán 41. *Cho hai số thực $a, b \neq 0$ thỏa mãn $a(ab+1) = a^2b^2 - ab + 1$. Chứng minh rằng:*

$$a^3b^3 + 1 \leq 16a^3$$

△

Chứng minh.
$VP > 0 \to VT > 0$ xảy ra khi $a < 0ab + 1 < 0$ hoặc $a > 0ab + 1 > 0$
Ta chỉ xét trường hợp $a > 0; ab + 1 > 0$ (cái còn lại thì tương tự)

$$a^3b^3 + 1 \leq 16a^3 \Leftrightarrow (ab+1)(a^2b^2 - ab + 1) \leq 16a^3$$
$$\Leftrightarrow a(ab+1)^2 \leq 16a^3 \to ab + 1 \leq 4a$$

Mà ta có

$$a(ab+1) = a^2b^2 - ab + 1 \Rightarrow 4a(ab+1) = (ab+1)^2 + 3(ab-1)^2 \geq (ab+1)^2$$

$$\Rightarrow 4a \geq ab + 1.$$

Xong. ■

Bài toán 42. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ac + abc \leq 4$. Chứng minh rằng:*

$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \geq 2(ab + bc + ca)$$

△

Chứng minh.
Bất đẳng thức phụ: $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$.

Đây là một bất đẳng thức có nhiều ứng dụng.

Chứng minh. Giả sử a, b cùng phía với 1.

$$\Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab \geq a + b - 1 \Leftrightarrow abc \geq ac + bc - c.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2c + 1 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 + (c-1)^2 \geq 0$$

(luôn đúng)

Trở lại bài toán, ta chỉ cần chứng minh:

$$a + b + c \geq 2abc + 1.$$

Mặt khác bằng phương pháp phản chứng dễ dàng chứng minh được $VT \geq 3 \geq VP$.

Vậy ta có đpcm. ■

Bài toán 43. *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^4}{b^3(c+2a)} + \frac{b^4}{c^3(a+2b)} + \frac{c^4}{a^3(b+2c)} \geq 1$$

△

Chứng minh.
Ta có

$$VT=\sum\frac{\frac{a^4}{b^2}}{b(c+2a)}\geqslant\frac{(\sum\frac{a^2}{b})^2}{3\sum ab}\geqslant\frac{(\sum a)^2}{3\sum ab}\geqslant\frac{3\sum ab}{3\sum ab}=1=VP.$$

Xong. ■

Bài toán 44. *Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z+xyz=4$. Chứng minh:*

$$\left(1+xy+\frac{y}{z}\right)\left(1+yz+\frac{z}{x}\right)\left(1+zx+\frac{x}{y}\right)\geq 27$$

Chứng minh.
Đặt $p=x+y+z$,$q=xy+yz+xz$, $r=xyz$

$$\begin{aligned}\text{BĐT}&\Leftrightarrow(z+y+xyz)(x+y+xyz)(x+z+xyz)\geq 27xyz\\&\Leftrightarrow(4-x)(4-y)(4-z)\geq 27xyz\end{aligned}$$

Tiếp tục biến đổi

$$3p+q\geq 12=3p+3r$$

hay cần chứng minh $q\geq 3r$

$$4=x+y+z+xyz\geq 3\sqrt[3]{xyz}+xyz\Rightarrow xyz\leq 1$$

$$q=xy+yz+xz\geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\geq 3xyz=3r$$

Hoàn tất chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$ ■

Bài toán 45. *Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx+2xyz=1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{x^2y}{x+1}+\frac{y^2z}{y+1}+\frac{z^2x}{z+1}\geq 2xyz$$

Chứng minh.
Đổi biến $(a,b,c)=\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)$.

Từ giả thiết biến đổi đại số được

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1\geq\frac{9}{a+b+c+3}\Rightarrow a+b+c\geq 6$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\frac{c}{a+1}+\frac{b}{a+1}+\frac{c}{b+1}\geq 2$$

$$\frac{c}{a+1}+\frac{b}{a+1}+\frac{c}{b+1}\geq\frac{3(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ac)+3(a+b+c)}\geq\frac{3t^2}{t^2+3t}=\frac{3t}{t+3}\geq 2$$

Đúng với $t=a+b+c\geq 6$.

Xảy ra khi $a=b=c=2$ hay $x=y=z=\frac{1}{2}$ ■

BẤT ĐẲNG THỨC THI CHUYÊN 2021

Bài toán 46 (**). *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{x^4}{x^3+y^2+z^2}+\frac{y^4}{y^3+z^2+x^2}+\frac{z^4}{z^3+x^2+y^2}\geq\frac{1}{7}$$

Chứng minh.

Áp dụng BĐT C-S và BĐT AM-GM:

$$VT\geq\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^3+y^3+z^3+2(x^2+y^2+z^2)}=\frac{t^2}{\dfrac{7}{2}t-\dfrac{1}{2}+3abc}$$

$$\geq\frac{t^2}{\dfrac{7}{2}t-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{9}}=\frac{18t^2}{7(9t-1)}=\frac{1}{7}+\frac{(3t-1)(6t-1)}{7(9t-1)}\geq\frac{1}{7}$$

Đây chính là điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$. ■

Bài toán 47. *Cho $a, b, c\in\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:* $\begin{cases} a\geq b\geq c\\ a+b+c=0\\ a^2+b^2+c^2=6\end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b$. △

Chứng minh.

Tìm Max Từ giả thiết có thể dễ dàng biến đổi được

$$\begin{cases} a+b=-c\\ ab=c^2-3\end{cases}$$

Theo định lý Viète thì a, b là nghiệm của phương trình

$$X^2+cX+c^2-3=0$$

Ta có

$$\Delta=3(4-c^2)\geq 0\Rightarrow -2\leq c\leq 2\Rightarrow P\leq 2$$

Vậy Max $P=2$ khi $a=b=1, c=-2$ ■

Bài toán 48. *Cho a, b, c là các số thực dương nhỏ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng*

$$6(a^3+b^3+c^3)+1\geq 5(a^2+b^2+c^2)$$

△

Chứng minh.

Theo phương pháp UCT dễ dàng tìm ra được bài toán phụ sau

$$6a^3+\frac{1}{3}\geq 5a^2+\frac{-4}{9}(3a-1)\Leftrightarrow(3a-1)^2(6a-1)\geq 0$$

Bài toán quy về cm

$$\sum(3a-1)^2(6a-1)\geq 0\Leftrightarrow\sum 18a(a-b)(a-c)\geq 0$$

Giả sử $a\geq b\geq c$ nên bđt đúng theo định lí 1 của Vornicu Schur hay chính là Schur.
Xong. ■

Bài toán 49. *Cho 3 số thực dương a,b,c chứng minh rằng*

$$\frac{a^3b}{3a+b}+\frac{b^3c}{3b+c}+\frac{c^3a}{3c+a}\geq\frac{a^2bc}{2a+b+c}+\frac{b^2ca}{2b+c+a}+\frac{c^2ab}{2c+a+b}$$

△

Chứng minh.
Chia cả 2 vế cho abc nên bất đẳng thức tương đương

$$\sum\frac{a^2}{3ac+bc}\geq\sum\frac{a}{2a+b+c}$$

Ý tưởng tiếp theo là dùng $\frac{3}{4}$ làm trung gian

$$VT=\sum\frac{a^2}{3ac+bc}\geq\frac{(a+b+c)^2}{4(ab+bc+ac)}\geq\frac{3(a+b+c)^2}{4(a+b+c)^2}=\frac{3}{4}$$

$$VP=\sum\frac{a}{2a+b+c}=\sum\frac{3a}{3a+(a+b+c)+(a+b+c)+(a+b+c)}$$
$$\leq\frac{1}{16}\left(\sum\frac{3a}{3a}+\sum\frac{9a}{a+b+c}\right)=\frac{3}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ ■

Bài toán 50. *Cho a,b,c là các số nguyên dương thỏa mãn $a(b^2+c^2)=2b^2c$. Chứng minh rằng:*

$$2b\leq a\sqrt{a}+c$$

Bài toán 51. *Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông (c>a,b). Chứng minh rằng:*

$$3<\frac{c^3-a^3-b^3}{c(c-b)(c-a)}\leq 2+\sqrt{2}$$

△

Chứng minh.

Đặt $\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)=(x,y)$. Từ giả thiết ta có $x^2+y^2=1$.
Ta có $A=\frac{c^3-a^3-b^3}{c(c-a)(c-b)}=\frac{1-x^3-y^3}{xy-(x+y)+1}$.
Đặt x + y = t thì $xy=\frac{t^2-1}{2}$.
Khi đó $A=\frac{t^3-3t+2}{(t-1)^2}=t+2$.
Dễ dàng chứng minh được $1<t\leq\sqrt{2}$.
Từ đó ta có đpcm. ■

Bài toán 52. *Cho 3 số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$(ab+bc+ca)^2+9\geq 18abc$$

Chứng minh (1).
Xét trường hợp $abc \leq 0$ thì bất đẳng thức luôn đúng do $VP > 0 \geq VT$.
Xét trường hợp $abc > 0$.

- Nếu $a, b, c > 0$ thì áp dụng bất đẳng thức $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$ và bất đẳng thức AM - GM ta có:
  $VT = (ab+bc+ca)^2 + 9 \geq 3abc(ab+bc+ca) + 9 \geq 9abc + 9abc = 18abc = VP.$
- Nếu trong ba số a, b, c có hai số âm, một số dương: Giả sử $a > 0; b < 0; c < 0$.
  Đặt $b = -x; c = -y$. Khi đó ta có $a = 3 + x + y$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:
  $$[xy - (3+x+y)(x+y)]^2 + 9 \geq 18(3+x+y)xy.(*)$$
  Đặt $x + y = p; xy = q$.
  $$(*) \Leftrightarrow (p^2+3p-q)^2 + 9 \geq 18(3+p)q$$
  $$\Leftrightarrow p^4 + 6p^3 + 9p^2 + q^2 - 2p^2q + 9 - 54q - 24pq \geq 0$$
  $$\Leftrightarrow p^4 + 6p^3 + 9p^2 + (q-1)^2 - q(2p^2 + 24p + 52) + 8 \geq 0.$$
  Mặt khác ta có: $q \leq \dfrac{p^2}{4}$.
  Do đó:
  $$p^4 + 6p^3 + 9p^2 + (q-1)^2 - q(2p^2 + 24p + 52) + 8$$
  $$\geq p^4 + 6p^3 + 9p^2 - \frac{p^2}{4}(2p^2 + 24p + 52) + 8 = \frac{(p-2)^2(p+2)^2}{2} \geq 0.$$

Bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 1 hoặc a = 5; b = c = -1 và các hoán vị. ■

Chứng minh (2).
Đặt $a = x+1, b = y+1, c = z+1$ thì $x + y + z = 0$. Ta cần chứng minh:
$$9 + (xy + xz + yz + 2x + 2y + 2z + 3)^2 \geqslant 18(x+1)(y+1)(z+1) \qquad (1)$$
Do $x + y + z = 0$ ta có thể giả sử $z \geqslant 0$ thì $x + y \leqslant 0$. Thay thế $z = -(x+y)$, bất đẳng thức (1) tương đương với
$$\left(x^2 + xy + y^2\right)^2 + 12\,x^2 + 12\,xy + 12\,y^2 + 18\,xy\,(x+y) \geqslant 0$$
Mặt khác, có
$$x^2 + xy + y^2 \geqslant \frac{3}{4}\,(x+y)^2 \;\forall\, x, y \in \mathbb{R}$$
Do đó
$$\text{VT} \geqslant \frac{9\,(x+y)^4}{16} + 9\,(x+y)^2 + \frac{9}{2}\,(x+y)^3 = \frac{9}{16}\,(x+y)^2\,(x+y+4)^2 \geqslant 0.$$
Xong. ■

Chứng minh (3).
Viết BĐT dưới dạng thuần nhất

$$(a+b+c)^4 + 9(bc+ca+ab)^2 \geq 54abc(a+b+c).$$

Ta có BĐT hiển nhiên là

$$X^2 + Y^2 + Z^2 \geq YZ + ZX + XY. \ (*)$$

Trong $(*)$ cho

$$X = a^2 - 4bc, Y = b^2 - 4ca, Z = c^2 - 4ab$$

rồi rút gọn ta có ngay đpcm. ■

Bài toán 53. *Let a, b, c be positive and $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq a^3 + b^3 + c^3.$$

△

Bài toán 54. *Cho $x \geq 2$ và $y \geq 0$ thỏa mãn $y^2\sqrt{x-2} + \sqrt{x-2} = y$. Tìm giá trị lớn nhất của $1 + x + x^2$* △

Bài toán 55. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng*

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

△

Chứng minh (1).
Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \min\{a, b, c\}$.

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$$

Đặt vế trái của bất đẳng thức trên là M.

Ta có bất đẳng thức quen thuộc

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{x+m}{y+m} \leq \dfrac{x}{y}$ với $x, y, m > 0; x \geq y$ ta có:

$$\begin{aligned} M &\geq \frac{a^2+b^2+c^2+a^2}{ab+bc+ca+a^2} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{2a^2+b^2+c^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{(2a^2+b^2+c^2)(b+c)+8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}. \end{aligned}$$

Ta chứng minh
$$\frac{(2a^2+b^2+c^2)(b+c)+8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2(*)$$
bằng biến đổi tương đương.
Thật vậy, $(*) \Leftrightarrow (b+c-2a)(b-c)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

Vậy ta có đpcm. ■

Chứng minh (2).
Ta chứng minh bổ đề sau:
Bổ đề. Với mọi số thực dương a,b,c,x,y,z, ta có
$$x(b+c)+y(c+a)+z(a+b) \geq 2\sqrt{(bc+ca+ab)(yz+zx+xy)}.$$
Chứng minh. Theo BĐT C-S:
$$VT+ax+by+cz=(a+b+c)(x+y+z)$$
$$=\sqrt{[a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab)][x^2+y^2+z^2+2(yz+zx+xy)]} \geq ax+by+cz+VP.$$
Trở lại bài toán. Chọn
$$x=\frac{a}{b+c}, y=\frac{b}{c+a}, z=\frac{c}{a+b}$$
ta có ngay kết quả. ■

Chứng minh (3).
BĐT tương đương với
$$S=X(a-b)(a-c)+Y(b-c)(b-a)+Z(c-a)(c-b) \geq 0, \text{trong đó}$$
$$X=\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}; Y=\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}; Z=\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}.$$
Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó dễ thấy $X \geq Y \geq Z \geq 0$. Suy ra
$$S=X(a-b)^2+(X-Y)(a-b)(b-c)+Z(a-c)(b-c) \geq 0$$
Đây chính là đpcm. ■

Bài toán 56. *Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng*
$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}$$
△

Chứng minh.
Nhân VT với $abc+1$ ta được
$$VT(abc+1)=\sum\frac{a(b+1)}{a+1}+\sum\frac{a+1}{a(b+1)}-3$$
$$\geq \sum 3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}-3=\frac{3\left[\sqrt[3]{(abc)^2}-\sqrt[3]{abc}+1\right]}{\sqrt[3]{abc}}=VP$$
Xong. ■

Bài toán 57. *Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc = a + b + c + 2$. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} \geq 3\sqrt[3]{2}$$

△

Chứng minh.
Từ giả thiết ta có: $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + \dfrac{1}{c+1} = 1$.

Do đó ta có thể đặt $(a, b, c) = \left(\dfrac{y+z}{x}, \dfrac{z+x}{y}, \dfrac{x+y}{z}\right)$.

BĐT cần chứng minh trở thành:

$$\sqrt[3]{\frac{y+z}{x}} + \frac{\sqrt[3]{z+x}}{y} + \frac{\sqrt[3]{x+y}}{z} \geq 3\sqrt[3]{2}.$$

Gọi VT của bất đẳng thức trên là A.

Với $m, n > 0$ ta có bất đẳng thức: $m^3 + n^3 \geq \dfrac{(m+n)^3}{4}$.

Do đó với $m = \sqrt[3]{x}; n = \sqrt[3]{y}$ ta có

$$x + y \geq \frac{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3}{4} \Rightarrow \sqrt[3]{x+y} \geq \frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})}{2}.$$

Thiết lập các bđt tương tự ta có

$$A \geq \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\left(\sum \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{z}}\right) \geq_{Nesbitt} 3\sqrt[3]{2}$$

Xong. ■

Bài toán 58. *Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{ab}{\sqrt{(1-c)^3(1+c)}} + \frac{bc}{\sqrt{(1-a)^3(1+a)}} + \frac{ca}{\sqrt{(1-b)^3(1+b)}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

△

Chứng minh.
Áp dụng AM-GM

$$VT = \sum \frac{ab}{\sqrt{(a+b)^3(a+c+b+c)}} \leq \sum \frac{\sqrt[4]{a^4b^4}}{4\sqrt[4]{(a+c)(b+c)a^3b^3}}$$

$$= \sum \frac{\sqrt{2}}{16} \cdot 4\sqrt[4]{\frac{ab}{(a+c)(b+c)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \leq \sum \frac{\sqrt{2}}{16}(\sum \frac{a}{a+c} + \sum \frac{b}{b+c} + 3) = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$ ■

Bài toán 59. *Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c \le 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab(a+b)}+\frac{1}{bc(b+c)}+\frac{1}{ca(c+a)} \ge \frac{87}{2}$$

△

Chứng minh.
Ý tưởng bài này là chỉ ra

$$\text{Vế trái} \geqslant \frac{1}{\frac{1}{2}(a+b)^2+c^2}+\frac{4}{(a+b)^3}+\frac{8}{c(a+b)(a+b+2c)} \tag{3}$$

Cuối cùng là dùng đánh giá $a+b \leqslant 1-c$ và đi chứng minh

$$\left(29c^5-58c^4+6c^3+58c^2-43c+16\right)(3c-1)^2 \geqslant 0$$

và điều này là hiển nhiên.
Ps: Mình chưa tìm được cách chứng minh nào hay cho (3), các bạn thông cảm. ■

Bài toán 60. *Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{2x^2+y^2+z^2}{4-yz}+\frac{2y^2+x^2+z^2}{4-xz}+\frac{2z^2+y^2+x^2}{4-yx} \ge 4xyz$$

△

Chứng minh.
Áp dụng AM-GM cho 4 số trên tử sau đó chia cả 2 vế cho $4xyz$.
Đặt $(\sqrt{xy}, \sqrt{yz}, \sqrt{xz}) \to (a, b, c)$. Bất đẳng thức tương đương
$\sum \frac{1}{4a-a^3} \ge 1$
Mà sau khi đặt ta có $a+b+c \le 3$ và $a, b, c \le \sqrt{3}$
Biến đổi vế trái

$$\sum \frac{1}{4a-a^3}=\sum \frac{1}{a(2-a)(2+a)}=\sum \frac{4}{4a(2-a)(2+a)}$$
$$\ge \sum \frac{4}{(a+2-a)^2(a+2)}=\sum \frac{1}{a+2} \ge \frac{9}{a+b+c+6} \ge 1$$

Xảy ra khi $a=b=c=1$ và $x=y=z=1$ ■

Bài toán 61. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2 \le 3b$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{4}{(b+2)^2}+\frac{8}{(c+3)^2} \ge 1$$

△

Chứng minh.
Ta có

$$a^2+b^2+c^2-2a-4b-2c+6=(a-1)^2+(b-2)^2+(c-1)^2$$
$$\ge 0 \Rightarrow \sum a^2 \ge 2a+4b+2c+6 \Leftrightarrow 3b \ge 2a+4b+2c+6$$

Bài toán phụ

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\geq\frac{8}{(x+y)^2}$$
$$\Leftrightarrow(x^2+y^2)(x+y)^2\geq 8x^2y^2$$

(Cauchy)
Trở lại bài toán, áp dụng bất đẳng thức phụ

$$\Rightarrow VT\geq\frac{8}{(a+\dfrac{b}{2}+2)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}\geq\frac{16^2}{(2a+b+2c+10)^2}$$

Mặt khác

$$3b\geq 4b+2a+2c+6\Rightarrow 2a+b+2c+10\leq 16$$
$$\Rightarrow VT\geq 1$$

Xong. ■

Bài toán 62. *Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=k$ (k là 1 số thực dương không đổi). Tìm giá trị nhỏ nhất của:*

$$P=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$$

△

Chứng minh.
Rất quen thuộc, ta đặt $\sqrt{a^2+b^2}=x,\sqrt{b^2+c^2}=y,\sqrt{c^2+a^2}=z$ thì x,y,z là độ dài ba cạnh tam giác và $x+y+z=k$.

$$\text{VT}\geq\sum\frac{a^2}{b+c}\geq\sum\frac{a^2}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum\frac{x^2+z^2-y^2}{y}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sum\frac{x^2+z^2}{y}-k\right)\geq\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[2\left(x+y+z\right)-k\right]=\frac{k\sqrt{2}}{4}$$

Xong. ■

Bài toán 63. *Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:*

$$\sum\frac{1}{\sqrt{a^5-a^2+3ab+6}}\leq 1$$

△

Chứng minh.
Do $abc=1$ nên ta có tổng $\sum_{cyc}\dfrac{1}{ab+a+1}=1$.

Xét hiệu

$$a^5-a^2-3a+3=(a-1)^2(a^3+2a^2+3a+3)\geq 0$$

$$\Rightarrow a^5-a^2+3\geq 3a.$$

Thiết lập các bất đẳng thức tương tự ta có:

$$\sum \frac{1}{\sqrt{a^5 - a^2 + 3ab + 6}} \le \sum \frac{1}{\sqrt{3ab + 3a + 3}}$$
$$\le_{AM-GM} \frac{3}{2} \sum (\frac{1}{3ab + 3a + 3} + \frac{1}{9}) = 1.$$

Xong ■

Bài toán 64. *Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+4xyz = 2(xy+yz+zx)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = x(1-y)(1-z)$$

△

Chứng minh.
Từ giả thiết
$$\Leftrightarrow (y+z-x)^2 = 4yz(1-x) \Rightarrow 1-x \ge 0 \Rightarrow 1 \ge x$$
Tương tự $1 \ge y, z$.
Từ
$$(y+z-x)^2 = 4yz(1-x) \le \frac{4(1-x+y+z)^3}{27} \Leftrightarrow x-y-z \le \frac{-1}{4}$$
$$\Rightarrow P \le \frac{(x-y-z+2)^3}{27} \le \frac{27}{64}$$
Xảy ra khi $x = \frac{3}{4} y = z = \frac{1}{4}$ ■

Bài toán 65. *Cho $a, b, c \ge 0$ và không đồng thời bằng 0 thỏa mãn $ab+bc+ca = 1$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \ge \frac{5}{2}$$

△

Chứng minh.
Viết lại bất đẳng thức dưới dạng thuần nhất

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)^2 \geqslant \frac{25}{4}$$

Hay là

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{(4\,R+r)\,(4\,Rr+r^2+s^2)^2}{rR^2s^2} \geqslant \frac{25}{4}$$
Dễ thấy rằng khi s giảm thì VT $\equiv f(s)$ giảm. Do đó

$$f(s) \geqslant f\left(\sqrt{16Rr-5r^2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{r\,(65\,R^2 - 24\,Rr + 4\,r^2)}{R^2\,(16\,R - 5\,r)} + \frac{25}{4} \geqslant \frac{25}{4}$$

Xong. ■

Bài toán 66. *Cho các số x, y, z thỏa mãn $0 < x < y < z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{x^3z}{y^2(xz+y^2)} + \frac{y^4}{z^2(xz+y^2)} + \frac{z^3+15x^3}{x^2z}$$

△

Chứng minh.

$$VT = \frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{a+b} + \frac{15a^3b^3+1}{a^2b^2}$$

Với $a = \dfrac{x}{y}$ và $b = \dfrac{y}{z}$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM

$$VT = a^2 - ab + b^2 + 15ab + \frac{1}{a^2b^2} \geq 16ab + \frac{1}{a^2b^2} = 8ab + 8ab + \frac{1}{a^2b^2} \geq 12$$

Xảy ra khi $a = b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ hay $y = x\sqrt{2}$ và $z = y\sqrt{2}$ ■

Bài toán 67. *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc} + \frac{8}{(b+c)^2+4abc} + \frac{8}{(c+a)^2+4abc} + a^2+b^2+c^2 \geq \frac{8}{a+3} + \frac{8}{b+3} + \frac{8}{c+3}$$

△

Chứng minh.
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{8}{(a+b)^2+4abc} + \frac{a^2+b^2}{2} \\
&\geq \frac{8}{2(a^2+b^2)+2c(a^2+b^2)} + \frac{a^2+b^2}{2} \\
&= \frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)} + \frac{a^2+b^2}{2} \\
&\geq \frac{8}{2\sqrt{2}\sqrt{c+1}} \geq \frac{8}{c+3}
\end{aligned}$$

Bài toán 68. *Cho các số a,b,c dương có tích $abc = 1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c}$$

△

Bài toán 69. *Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z = 3$ và $xy+yz+zx \neq 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leq \frac{25}{3\sqrt[3]{4(xy+yz+zx)}}.$$

△

Chứng minh.
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM

$$3\sqrt[3]{2\cdot 2\cdot (xy+yz+xz)} \le xy+yz+xz+4 \le (x+1)(y+1)(z+1)$$

Áp dụng rồi qui đồng và thu gọn thì cần cm

$$x^2z+xy^2+yz^2 \le 4$$

Giả $y=\text{mid}\{x,y,z\}$. Ta có

$$x(y-x)(y-z)\le 0,$$

nên

$$x^2z+xy^2 \le xyz+x^2y$$

Suy ra

$$x^2z+xy^2+yz^2 \le y(x^2+xz+z^2) \le y(3-y)^2 = 4-(y-1)^2(4-y) \le 4$$

Xảy ra khi $(x,y,z)=(0,1,2)$. ■

Bài toán 70. *Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa $a+b+c=3$. Tìm GTLN của:*

$$S=(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)$$

△

Chứng minh.
Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c\ge 0$.

Khi đó

$$c(c-b)\le 0 \Leftrightarrow b^2-bc+c^2 \le b^2$$
$$c(c-a)\le 0 \Leftrightarrow c^2-ca+a^2 \le a^2$$

Do vậy cần chứng minh

$$a^2b^2(a^2-ab+b^2)\le 12$$

Thật vậy, theo AM-GM:

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{3ab}{2}\cdot\frac{3ab}{2}\cdot(a^2-ab+b^2) \le \frac{4}{9}\cdot\frac{\left(\frac{3ab}{2}+\frac{3ab}{2}+(a^2-ab+b^2)\right)^3}{3} = \frac{4(a+b)^6}{3^5} \le \frac{4(a+b+c)^6}{3^5} = 12.$$

Xong. ■

Bài toán 71. *Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c \ge 2\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})}$$

△

Chứng minh.
Không mất tính tổng quát, giả sử b nằm giữa a và c.

Áp dụng BĐT AM-GM

$$VP \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{b} + b\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) = \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+a+b+\frac{c^2}{b}+\frac{bc}{a}.$$

Do đó ta cần chứng minh

$$\frac{c^2}{a}+c \geq \frac{c^2}{b}+\frac{bc}{a},$$

hay

$$\frac{c(a-b)(b-c)}{ab} \geq 0.$$

BĐT cuối hiển nhiên đúng. Ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c$. ■

Bài toán 72. *Cho $a,b,c>0$ Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{\frac{bc}{a(3b+a)}}+\sqrt{\frac{ac}{b(3c+b)}}+\sqrt{\frac{ab}{c(3a+c)}} \geq \frac{3}{2}$$

△

Bài toán 73. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a \leq 1, b \leq 2$ và $a+b+c=6$. Chứng minh rằng*

$$(a+1)(b+1)(c+1) \geq 4abc$$

△

Chứng minh (1).
Đặt $x=1-a, y=2-b \Rightarrow c=3+x+y, 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2$. BĐT trở thành:

$$-(3x+3y+1)xy+5x^2+2y^2+10x+2y \geq 0.$$

Ta có

$$VT \geq 15x^2+3y^2-10xy = \frac{5}{3}(3x-y)^2+\frac{4}{3}y^2 \geq 0.$$

Đó là đpcm. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=1, b=2, c=3$. ■

Chứng minh (2).
BĐT tương đương:

$$ab(1-3c)+(c+1)(7-c) \geq 0$$

Từ giả thiết suy ra $c \geq 3$.

$$ab = \frac{1}{2}.2a.b \leq \frac{1}{8}(2a+b)^2 \leq \frac{1}{8}(1+a+b)^2 = \frac{(7-c)^2}{8}$$

Nên ta cần chứng minh

$$(c+1)(7-c)+\frac{1}{8}(7-c)^2(1-3c) \geq 0 \Leftrightarrow (7-c)(c-3)(3c-5) \geq 0$$

đúng với $3 \leq c \leq 6$
Đẳng thức xảy ra khi $a=1, b=2, c=3$. ■

Bài toán 74. *Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng:*

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b+b^3c+c^3a)$$

△

Chứng minh (1).
Trong BĐT $X^2+Y^2+Z^2 \geq YZ+ZX+XY$ ta cho $X=a^2-ab+bc, Y=b^2-bc+ca; Z=c^2-ca+ab$ sẽ thu được đpcm. ■

Chứng minh (2).
Đặt $b=a+x; c=a+y$. BĐT tương đương với

$$(x^2-xy+y^2)a^2+(x^3-5x^2y+4xy^2+y^3)a+(x^4-3x^3y+2x^2y^2+y^4) \geq 0.$$

BĐT này đúng vì

$$\Delta_a = -3(x^3-x^2y-2xy^2+y^3)^2 \leq 0.$$

Từ đó suy ra đpcm. ■

Bài toán 75. *Cho $x+y+z=3$; $0 \leq x; y; z \leq 2$. Tìm $GTNN; GTLN$ của :*

$$A = x^4+y^4+z^4+12(1-x)(1-y)(1-z)$$

△

Bài toán 76. *Cho các số thực dương x, y, z có tích bằng 8. Tìm giá trị nhỏ nhất*

$$S = \frac{1}{(x+1)^3}+\frac{8}{(y+2)^3}+\frac{64}{(z+4)^3}$$

△

Chứng minh.
Ý tưởng. Ta có thể đưa về đối xứng

$$\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{8}{(y+2)^3}+\frac{64}{(z+4)^3} = \frac{1}{(a+1)^3}+\frac{1}{(b+1)^3}+\frac{1}{(c+1)^3}$$

Với $(a,b,c)=\left(x,\frac{y}{2},\frac{z}{4}\right)$ ta có $abc=1$.
Đặt $\sqrt{a}=t$.
Bổ đề

$$\frac{1}{(t^2+1)^3} \geq \frac{3}{8(t^6+t^3+1)} \Leftrightarrow (t-1)^2(5t^4+10t^3+6t^2+10t+5) \geq 0$$

luôn đúng với $t>0$

Sử dụng tương tự và đưa về bđt Vasc
Nên Min $S=\frac{3}{8}$ xảy ra khi $a=b=c=1$ hay $x=1$ $y=2$ $z=4$ ■

Bài toán 77. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $b^2 \geq ca$ và $c^2 \geq ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{3c}{c+a}$$

△

Chứng minh.

Đặt $\frac{b}{a} = x; \frac{c}{b} = y$.
Theo bài ra ta có $x \geq y; xy^2 \geq 1$.
Ta chứng minh $xy \geq 1$.
Nếu $y \geq 1$ thì $x \geq 1$. Do đó $xy \geq 1$.
Nếu $y < 1$ thì $xy > xy^2 \geq 1$.
Do $xy \geq 1$ nên ta có:
$P = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{3xy}{xy+1} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}} + \frac{3xy}{xy+1} = \frac{(t-1)(t^2+6t+1)}{2(t+1)(t^2+1)} + \frac{5}{2} \geq \frac{5}{2}$
(với $t = \sqrt{xy}$).
Vậy $\boxed{P_{\min} = \frac{5}{2}}$ khi và chỉ khi $a = b = c$. ■

Bài toán 78. *Cho $a, b, c \in [1, 2]$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 \leq 5abc$.* △

Bài toán 79. *Cho $abc = 1$ và $a^3 > 36$. Chứng minh*

$$\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ac$$

△

Chứng minh.
Ta có:

$$\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \left[\frac{a^2}{4} + (b+c)^2 - a(b+c)\right] + \frac{a^2}{12} - 3bc$$
$$= \left(\frac{a}{2} - b - c\right)^2 + \frac{a^3 - 36}{12a} \geq \frac{a^3 - 36}{12a} > 0.$$

Xong. ■

Bài toán 80. *Cho 3 số thực a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Chứng minh:*

$$(a^2 - bc)(b^2 - ac)(c^2 - ab) \leq 1.$$

△

Bài toán 81. *Cho các số thực không âm a, b, c và $\frac{2}{3} \leq k \leq 2$. Chứng minh rằng*

$$\left(a^2 - kab + b^2\right)\left(b^2 - kbc + c^2\right)\left(c^2 - kca + a^2\right) \leq \frac{4}{27} \cdot \frac{(a+b+c)^6}{(k+2)^2}$$

△

Bài toán 82. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng :*

$$\frac{bc(b+c)}{a^2+bc} + \frac{ab(b+a)}{c^2+ab} + \frac{ca(a+c)}{b^2+ac} \geq a + b + c$$

△