

MỘT SỐ BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC ÔN THI VÀO LỚP 10

Bài 1. Với x là số thực không âm. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = (\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \right).$$

Hướng dẫn:

Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{3x+1}} = \sqrt{\frac{1}{(x+1)} \cdot \left(\frac{x+1}{3x+1}\right)} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{3x+1} \right), \quad \sqrt{\frac{x}{3x+1}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{3x+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2x}{3x+1} \right) \text{ suy ra}$$

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{3x+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{3x+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2x}{3x+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3}{2} \right) (*).$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{\sqrt{x+3}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{x+3} \right), \quad \sqrt{\frac{x}{x+3}} = \sqrt{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+3} \right)$$

$$\text{Suy ra: } \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{x+3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+1} + \frac{3}{2} \right) (**). \text{ Từ } (*), (**) \text{ ta suy ra:}$$

$$P = (\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+1} + \frac{3}{2} \right) = 2. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra tại } x=1.$$

Bài 2. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn: $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x+y}{1+xy}$.

Hướng dẫn:

$$\text{Ta có } P^2 = \frac{(x+y)^2}{(x^2+y^2+xy)^2} = \frac{(x+y)^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+xy)^2}. \text{ Ta chứng minh: } P^2 \geq \frac{8}{9} \text{ hay}$$

$$9(x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2) \geq 8(x^2+xy+y^2)^2 \Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 + 2xy(x^2+y^2) \geq 8x^2y^2 \Leftrightarrow$$

$$(x^2-y^2)^2 + 2xy(x-y)^2 \geq 0. \text{ Bất đẳng thức này luôn đúng, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi}$$

$$x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Vậy GTNN của } P \text{ là } \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ tại } x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bài 3. Với x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x \leq y \leq 3, x + y \leq 5$. Tìm GTLN của biểu thức: $P = x^2(x+1) + y^2(y+1)$.

Hướng dẫn:

Ta sẽ chứng minh: $x^2 + x^3 + y^2 + y^3 \leq 2^2 + 2^3 + 3^2 + 3^3$ hay

$$3^2 - y^2 + 3^3 - y^3 + 2^2 - x^2 + 2^3 - x^3 \geq 0 \text{ hay}$$

$$\Leftrightarrow (y^2 + 3y + 9)(3 - y) + (x^2 + 2x + 4)(2 - x) + (3 + y)(3 - y) + (2 + x)(2 - x) \geq 0. \text{ Sử dụng công}$$

thức khai triển Abel: $a_1b_1 + a_2b_2 = (a_1 - a_2)b_1 + a_2(b_1 + b_2)$

Ta viết lại về trái bất đẳng thức cần chứng minh thành:

$$VT = (y^2 + 3y - x^2 - 2x + 5)(3 - y) + (x^2 + 2x + 4)(5 - x - y) + (1 + y - x)(3 - y) + (2 + x)(5 - x - y)$$

hay

$$VT = (y^2 - x^2 + 3y - 2x + 5)(3 - y) + (x^2 + 2x + 4)(5 - x - y) + (1 + y - x)(3 - y) + (2 + x)(5 - x - y)$$

Chú ý rằng với điều kiện: $0 < x \leq y \leq 3, x + y \leq 5$ thì $VT \geq 0$ nên bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x = 2, y = 3$.

Bài 3. Cho các số thực $x \geq 3, y \geq -3$ thỏa mãn $x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3})$. Chứng minh rằng:

$$4(x^2 + y^2) + 15xy + 83 \geq 0.$$

Hướng dẫn: Từ giả thiết ta có

$$x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}) \Leftrightarrow (x + y)^2 = 4(x + y) + 8\sqrt{x-3}\sqrt{y+3} \geq 4(x + y) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \geq 4 \\ x + y \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}) \leq 2\sqrt{2(x+y)} \Leftrightarrow x + y \leq 8 \Rightarrow 4 \leq x + y \leq 8$$

Xét biểu thức $P = 4(x^2 + y^2) + 15xy = 4(x + y)^2 + 7xy$. Từ điều kiện xác định ta có

$$(x + 3)(y + 3) \geq 0 \Rightarrow xy \geq -3(x + y) - 9. \text{ Dẫn đến}$$

$$P = 4(x^2 + y^2) + 15xy = 4(x + y)^2 + 7xy \geq 4(x + y)^2 - 21(x + y) - 63.$$

$$\text{Ta có: } 4(x + y)^2 - 21(x + y) - 63 = 4(x + y - 4)^2 + 11(x + y) - 125 \geq 11.4 - 125 = -83$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x + y = 4$ và $(x + 3)(y + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 7, y = -3$.

Vậy GTNN của P là -83 tại $x = 7, y = -3$.

Bài 4. Cho các số thực x, y thỏa mãn: $(x + \sqrt{3 + x^2})(y + \sqrt{3 + y^2}) = 9$. Tìm GTNN của

$$P = x^2 + xy + y^2.$$

Hướng dẫn:

Giả sử $(x; y)$ là các số thực thỏa mãn $(x + \sqrt{3+x^2})(y + \sqrt{3+y^2}) = 9$.

Ta có $\sqrt{x^2+3} + x > \sqrt{x^2} + x = |x| + x \geq 0$, tương tự $\sqrt{y^2+3} + y > 0$

Đặt: $a = x + \sqrt{x^2+3}$ với $a > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+3} = a - x \Rightarrow x^2 + 3 = a^2 - 2ax + x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a^2-3}{2a}$. Tương

tự với $b = y + \sqrt{y^2+3}$ ta sẽ thu được $y = \frac{b^2-3}{2b}$. Ta có

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2 \geq \frac{3}{4}(x+y)^2$$

Nên $P \geq \frac{3}{4}(x+y)^2$. Xét $Q = x+y$ ta có: $Q = \frac{a^2-3}{2a} + \frac{b^2-3}{2b}$ với điều kiện $a, b > 0, ab = 9$. Ta

$$\text{có: } Q = \frac{a^2-3}{2a} + \frac{b^2-3}{2b} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{3}{2a} - \frac{3}{2b} = \frac{a}{3} + \frac{3}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{3} \cdot \frac{3}{a}} = 2 \Rightarrow P \geq 3.$$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $a = 3 \Leftrightarrow x = y = 1$.

Bài 5: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \sqrt{\frac{a^3}{1+bc}} + \sqrt{\frac{b^3}{1+ca}} + \sqrt{\frac{c^3}{1+ab}}.$$

Hướng dẫn:

Ta có $\sqrt{\frac{a^3}{1+bc}} = \frac{a^2}{\sqrt{a(1+bc)}} = \frac{a^2}{\sqrt{1+a}}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz ta có:

$$P \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} + \sqrt{1+c}}. \text{ Ta chứng minh: } \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} + \sqrt{1+c}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ hay}$$

$$2(a+b+c)^2 \geq 3\sqrt{2}(\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} + \sqrt{1+c}). \text{ Chú ý rằng:}$$

$$2\sqrt{2}\sqrt{1+a} = 2\sqrt{2(1+a)} \leq 2+1+a = a+3 \text{ dẫn đến}$$

$$3\sqrt{2}(\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} + \sqrt{1+c}) \leq 3(a+b+c+9). \text{ Cuối cùng ta chỉ cần chỉ ra}$$

$$4(a+b+c)^2 \geq 3(a+b+c) + 27 \Leftrightarrow (a+b+c-3)[4(a+b+c)+9] \geq 0 \text{ nhưng điều này luôn đúng}$$

do $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$. Vậy GTNN của P là $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ tại $a = b = c = 1$.

Bài 6. Cho 3 số thực không âm x, y, z . Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+3}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+3}} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{3}{8}.$$

Hướng dẫn:

Ta có $\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} \geq x+y+z$.

Nên $VT \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+3}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+3}} - \frac{3}{8}(x+y+z)$. Ta chứng minh:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+3}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+3}} - \frac{3}{8}(x+y+z) \leq \frac{3}{8}.$$

Mặt khác ta chứng minh được: $\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \leq \frac{3x+1}{8}$ (*) thật vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương

đương với

$\Leftrightarrow 64x^2 \leq (9x^2+6x+1)(x^2+3) \Leftrightarrow 3x^4+2x^3-12x^2+6x+1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(3x^2+8x+1) \geq 0$, bất đẳng thức cuối cùng đúng vậy (*) được chứng minh.

Tương tự ta cũng có: $\frac{y}{\sqrt{y^2+3}} \leq \frac{3y+1}{8}, \frac{z}{\sqrt{z^2+3}} \leq \frac{3z+1}{8}$. Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều ta có

đpcm.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 7. Cho các số thực a, b, c không đồng thời bằng 0 và $a+b+c \neq 0$. Biết

$$a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca). \text{ Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của } P = \frac{a}{a+b+c}.$$

Hướng dẫn:

Từ $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$ chia 2 vế cho $(a+b+c)^2$ ta thu được:

$$\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2 + \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^2 = 2 \left(\frac{ab}{(a+b+c)^2} + \frac{bc}{(a+b+c)^2} + \frac{ca}{(a+b+c)^2} \right) \text{ đặt}$$

$$x = \frac{a}{a+b+c}, y = \frac{b}{a+b+c}, z = \frac{c}{a+b+c} \text{ suy ra}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=2(xy+yz+zx) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=1-x \\ y^2+z^2=\frac{1}{2}-x^2 \end{cases}$$

Vì

$$2(y^2 + z^2) \geq (y + z)^2 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2} - x^2\right) \geq (1 - x)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow x(3x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow 3x(3x - 2) \leq 0$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} 3x \geq 0 \\ 3x - 2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \text{ suy ra } 0 \leq P \leq \frac{2}{3}.$$

Bài 8: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = |x^3 - y^3| + |y^3 - z^3| + |z^3 - x^3|$.

Hướng dẫn:

$$\text{Ta có } P \geq 0 \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x = y = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Do vai trò x, y, z như nhau nên ta có thể giả sử $x \geq y \geq z$ thế thì $P = 2(x^3 - z^3)$ ta có

$$P^2 = 4(x^2 - 2xz + z^2)(x^2 + xz + z^2)(x^2 + xz + z^2) \leq 4 \left(\frac{x^2 - 2xz + z^2 + x^2 + xz + z^2 + x^2 + xz + z^2}{3} \right)^3$$

$\Leftrightarrow P^2 \leq 4(x^2 + z^2)^3$ mà $(x^2 + z^2)^3 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^3 = 8^3$ nên $P \leq 32\sqrt{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 2\sqrt{2}, y = z = 0$ hoặc $x = y = 0, z = -2\sqrt{2}$.

Bài 9. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt{5a^2 + (b+c)^2}} + \frac{b}{\sqrt{5b^2 + (c+a)^2}} + \frac{c}{\sqrt{5c^2 + (a+b)^2}} \leq 1.$$

Hướng dẫn:

$$\text{Đặt: } P = \frac{a}{\sqrt{5a^2 + (b+c)^2}} + \frac{b}{\sqrt{5b^2 + (c+a)^2}} + \frac{c}{\sqrt{5c^2 + (a+b)^2}}$$

Sử dụng BDT Cauchy-Schwarz ta có:

$$\text{Ta có } P^2 \leq 3 \left(\frac{a^2}{5a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{5b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2}{5c^2 + (a+b)^2} \right)$$

$$\text{Ta chứng minh: } Q = \frac{a^2}{5a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{5b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2}{5c^2 + (a+b)^2} \leq \frac{1}{3}.$$

Chú ý rằng: $\frac{a^2}{5a^2+b^2+2bc+c^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2+2a^2+bc+2a^2+bc}.$

Ta cũng có:

$$\frac{a^2}{5a^2+b^2+2bc+c^2} = \frac{a^2}{(a^2+b^2+c^2)+(2a^2+bc)+(2a^2+bc)} \leq \frac{a^2}{9} \left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{2a^2+bc} + \frac{1}{2a^2+bc} \right)$$

Từ đó suy ra

$$Q \leq \frac{1}{9} \left(\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} \right) + \frac{2}{9} \left(\frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ca} + \frac{c^2}{2c^2+ab} \right) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9}S.$$

Ta có: $S = \frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ca} + \frac{c^2}{2c^2+ab} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{bc}{2a^2+bc} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{ca}{2b^2+ca} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{ab}{2c^2+ab} \right)$

hay $S = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}T$ với $T = \frac{bc}{2a^2+bc} + \frac{ca}{2b^2+ca} + \frac{ab}{2c^2+ab}$

Ta viết lại $T = \frac{b^2c^2}{2a^2bc+b^2c^2} + \frac{c^2a^2}{2b^2ca+c^2a^2} + \frac{a^2b^2}{2c^2ab+a^2b^2}$. Tiếp tục sử dụng BĐT Cauchy-

Schwarz ta có:

$$T = \frac{b^2c^2}{2a^2bc+b^2c^2} + \frac{c^2a^2}{2b^2ca+c^2a^2} + \frac{a^2b^2}{2c^2ab+a^2b^2} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} = \frac{(ab+bc+ca)^2}{(ab+bc+ca)^2} = 1$$

Vậy $S \leq 1$ dẫn đến $Q \leq \frac{1}{3}$ nên $P \leq 1$ đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Bài 10. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{ab}{4-a^2} + \frac{bc}{4-b^2} + \frac{ca}{4-c^2}.$$

Hướng dẫn:

Ta chứng minh: $P \leq 1$ hay $\frac{ab}{1+b^2+c^2} + \frac{bc}{1+c^2+a^2} + \frac{ca}{1+a^2+b^2} \leq 1.$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có: $(a+b+c)^2 \leq (a^2+1+1)(1+b^2+c^2)$, tương tự ta có 2 bất đẳng thức nữa và suy ra

$$\frac{ab}{1+b^2+c^2} + \frac{bc}{1+c^2+a^2} + \frac{ca}{1+a^2+b^2} \leq \frac{a^3b+b^3c+c^3a+2(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}.$$
 Cuối cùng ta sẽ chứng

minh: $(a+b+c)^2 \geq a^3b+b^3c+c^3a+2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq a^3b+b^3c+c^3a$

Hay chứng minh: $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a)$ (Đây là một bất đẳng thức nổi tiếng).

Sử dụng đánh giá: $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ với

$x = a^2 + bc - ab, y = b^2 + ca - bc, z = c^2 + ab - ca$ ta có:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3[(a^2 + bc - ab)(b^2 + ca - bc) + (b^2 + ca - bc)(c^2 + ab - ca) + (c^2 + ab - ca)(a^2 + bc - ab)]$$

Khai triển và thu gọn vế phải ta được: $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a)$ đpcm.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 11. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm GTLN, GTNN của

$$P = \frac{1}{4 - \sqrt{ab}} + \frac{1}{4 - \sqrt{bc}} + \frac{1}{4 - \sqrt{ca}}.$$

Hướng dẫn:

Ta có $P = \frac{1}{4 - \sqrt{ab}} + \frac{1}{4 - \sqrt{bc}} + \frac{1}{4 - \sqrt{ca}} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

(a, b, c) là hoán vị của bộ số $(0; 0; \sqrt{3})$.

$$\text{Chú ý rằng: } \frac{2}{4 - \sqrt{ab}} = 1 - \frac{2 - \sqrt{ab}}{4 - \sqrt{ab}} = 1 - \frac{(2 - \sqrt{ab})(2 + \sqrt{ab})}{(4 - \sqrt{ab})(2 + \sqrt{ab})} = 1 - \frac{4 - ab}{(4 - \sqrt{ab})(2 + \sqrt{ab})}$$

Do $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow ab, bc, ca \leq 3$ dẫn đến $4 - ab > 0$. Sử dụng bất đẳng thức

AM-GM ta có: $(4 - \sqrt{ab})(2 + \sqrt{ab}) \leq \left(\frac{4 - \sqrt{ab} + 2 + \sqrt{ab}}{2} \right)^2 = 9$ nên

$$\frac{4 - ab}{(4 - \sqrt{ab})(2 + \sqrt{ab})} \geq \frac{4 - ab}{9} \text{ dẫn đến } \frac{2}{4 - \sqrt{ab}} \leq 1 - \frac{4 - ab}{9} = \frac{5}{9} + \frac{ab}{9} \Rightarrow \frac{1}{4 - \sqrt{ab}} \leq \frac{5}{18} + \frac{ab}{18} \text{ tương}$$

tự ta cũng có 2 bất đẳng thức nữa và cộng lại thì thu được: $P \leq \frac{15}{18} + \frac{ab + bc + ca}{18} \leq \frac{15}{18} + \frac{3}{18} = 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 12. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $x, y, z \geq 0; z \leq 1$ và $x + y + z = 3$. Tìm GTLN, GTNN của $P = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xyz$.

Hướng dẫn:

GTLN.

Từ $z \leq 1 \Rightarrow x + y = 3 - z \geq 2$. Ta có:

$$z^2 + 2xyz - (2xy + 2yz + 2zx) = z(z - 2x - 2y) + 2xy(z - 1) \leq 0 \text{ nên suy ra}$$

$P = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xyz \leq x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 = 9$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 3; y = z = 0$ hoặc $y = 3, x = z = 0$.

GTNN.

Ta có:

$$P = (x + y)^2 + 2z^2 + 2xy(z - 1) \geq (3 - z)^2 + 2z^2 + (z - 1)\frac{(x + y)^2}{2} = (3 - z)^2 + 2z^2 + (z - 1)\frac{(3 - z)^2}{2}$$

Hay $P = \frac{1}{2}z(z^2 - z + 3) + \frac{9}{2} \geq \frac{9}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $z = 0, x = y = \frac{3}{2}$.

Bài 13. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn: $ab + a + b = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của P

$$P = \frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} + \frac{ab}{a+b} - (a^2 + b^2).$$

Giải:

Đặt $t = a + b$ suy ra $t > 0$, ta có $ab + t = 3 \Rightarrow ab = 3 - t$ nên $t < 3$ (do $a, b > 0$).

Mặt khác ta có: $(a + b)^2 \geq 4ab$ suy ra $t^2 \geq 4(3 - t) \Leftrightarrow t^2 + 4t - 12 \geq 0 \Leftrightarrow (t - 2)(t + 6) \geq 0 \Rightarrow t \geq 2$
vậy $2 \leq t < 3$

Đưa P về $f(t)$. Ta có:

$$P = \frac{3a(a+1) + 3b(b+1)}{(a+1)(b+1)} + \frac{ab}{a+b} - (a+b)^2 + 2ab = \frac{3(a+b)^2 + 3(a+b) - 6ab}{ab + a + b + 1} + \frac{ab}{a+b} - (a+b)^2 + 2ab$$

Thay $t = a + b, ab = 3 - t$ ta có:

$$P = f(t) = \frac{3t^2 + 3t - 6(3-t)}{4} + \frac{3-t}{t} - t^2 + 2(3-t) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t + \frac{1}{2} + \frac{3}{t}.$$

Ta chứng minh: $f(t) \leq f(2) = -\frac{1}{4}2^2 + \frac{1}{4}2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

Tức là chứng minh:

$$-\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t + \frac{1}{2} + \frac{3}{t} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -t^2 + t + 2 + \frac{12}{t} \leq 6 \Leftrightarrow t^3 - t^2 + 4t - 12 \geq 0 \Leftrightarrow (t - 2)(t^2 + t + 6) \geq 0$$

Bất này luôn đúng do $t \geq 2$. Vậy P max bằng $\frac{3}{2}$ tại $a = b = 1$.

Bài 14. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm GTLN, GTNN của

$$P = a + b + c + ab + bc + ca.$$

Hướng dẫn:

Ta chứng minh được: $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \Rightarrow a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} = \sqrt{3}$.

Ta chứng minh: $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Suy ra $P \leq \sqrt{3} + 1$. Tại $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ thì $P = \sqrt{3} + 1$ nên GTLN của P là $\sqrt{3} + 1$.

Cách khác:

$$P = a + b + c + \frac{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} = a + b + c + \frac{(a + b + c)^2 - 1}{2} \text{ suy ra } 2P = t^2 + 2t - 1.$$

Với $t = a + b + c$.

Ta có $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3 \Rightarrow -\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$.

Suy ra $2P = (t + 1)^2 - 2 \geq -2 \Rightarrow P \geq -1$, dấu = xảy ra khi và chỉ khi $t = -1$

$$2P \leq (\sqrt{3} + 1)^2 - 2 = 2 + 2\sqrt{3} \Rightarrow P \leq \sqrt{3} + 1 \dots\dots$$

Bài 15: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm GTLN, GTNN của

$$P = \frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca}.$$

Hướng dẫn:

Trước hết ta chứng minh: $P \leq \frac{27}{8}$.

Từ giả thiết $a + b + c = 1$ ta suy ra $abc \leq \frac{1}{27}$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(1-ab)(1-bc) + (1-bc)(1-ca) + (1-ca)(1-ab)}{(1-ab)(1-bc)(1-ca)} \leq \frac{27}{8} \quad \text{hay}$$

$$\frac{3-2(ab+bc+ca)+abc(a+b+c)}{1-(ab+bc+ca)+abc(a+b+c)-a^2b^2c^2} \leq \frac{27}{8}$$

$$\Leftrightarrow 8[3-2(ab+bc+ca)+abc] \leq 27[1-(ab+bc+ca)+abc-a^2b^2c^2]$$

Hay

$$3-11(ab+bc+ca)+19abc-27a^2b^2c^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4[3+19abc-27a^2b^2c^2] \geq 11.4(ab+bc+ca)$$

Từ bất đẳng thức quen thuộc $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$ suy ra

$$(1-2a)(1-2b)(1-2c) \leq abc \Leftrightarrow 11.4(ab+bc+ca) \leq 11(1+9abc).$$

Ta cần chứng minh $4[3+19abc-27a^2b^2c^2] \geq 11(1+9abc).$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với $(1-27abc)(1+4abc) \geq 0$. Bất đẳng thức cuối cùng đúng do $abc \leq \frac{1}{27}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a=b=c=\frac{1}{3}.$$

Tiếp theo ta chứng minh: $P \geq 3$.

Ta có $1-ab, 1-bc, 1-ca \leq 1$ nên $P \geq 3$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a;b;c)$ là hoán vị của bộ số $(0;0;1)$.

Bài 16. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm GTLN, GTNN của $P = \sqrt{a^2+abc} + \sqrt{b^2+abc} + \sqrt{c^2+abc} + 3\sqrt{abc}$.

Hướng dẫn:

Ta có $a^2+abc = a^2(a+b+c)+abc = a(a+b)(a+c)$.

$$\text{Do đó ta được } \sqrt{a^2+abc} = \sqrt{a(a+b)(a+c)} \leq \frac{\sqrt{a}(a+b+a+c)}{2} = \frac{\sqrt{a}(a+1)}{2}$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta được: } \sqrt{b^2+abc} \leq \frac{\sqrt{b}(b+1)}{2}; \quad \sqrt{c^2+abc} \leq \frac{\sqrt{c}(c+1)}{2}$$

$$\text{Do đó ta được: } \sqrt{a^2+abc} + \sqrt{b^2+abc} + \sqrt{c^2+abc} \leq \frac{\sqrt{a}(a+1)}{2} + \frac{\sqrt{b}(b+1)}{2} + \frac{\sqrt{c}(c+1)}{2}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\frac{\sqrt{a}(a+1)}{2} + \sqrt{abc} \leq \sqrt{a} \left(\frac{a+1}{2} + \frac{b+c}{2} \right) = \sqrt{a} \left(\frac{a+b+c+1}{2} \right) = \sqrt{a}$$

Chứng minh tương tự ta được: $\frac{\sqrt{b}(b+1)}{2} + \sqrt{abc} \leq \sqrt{b}; \frac{\sqrt{c}(c+1)}{2} + \sqrt{abc} \leq \sqrt{c}$

Như vậy ta có: $P = \sqrt{a^2 + abc} + \sqrt{b^2 + abc} + \sqrt{c^2 + abc} + 3\sqrt{abc} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$

Mà ta có $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3(a+b+c)} = \sqrt{3}$. Nên ta suy ra $P \leq \sqrt{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Dễ thấy $P \geq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + \sqrt{c^2} = a + b + c = 1$ dấu đẳng thức xảy ra khi (a, b, c) là hoán vị của bộ số $(1; 0; 0)$

Bài 17. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $ab + bc + ca = 3$. Tìm GTNN của biểu thức $P = (a^3 - a + 5)(b^5 - b^3 + 5)(c^7 - c^5 + 5)$.

Hướng dẫn:

Nhận xét: Với mọi số thực dương x thì $x - 1, x^2 - 1, x^3 - 1, x^5 - 1$ luôn cùng bằng 0 hoặc cùng dấu.

Ta có: $(a-1)(a^2-1) = (a-1)^2(a+1) \geq 0 \Rightarrow a^3 - a^2 - a + 1 \geq 0 \Rightarrow a^3 - a + 5 \geq a^2 + 4$.

$(b^2-1)(b^3-1) = (b-1)^2(b+1)(b^2+b+1) \geq 0 \Rightarrow b^5 - b^3 + 5 \geq b^2 + 4$, tương tự ta có

$(c^2-1)(c^5-1) \geq 0 \Rightarrow c^7 - c^5 + 5 \geq c^2 + 4$

Dẫn đến $P = (a^3 - a + 5)(b^5 - b^3 + 5)(c^7 - c^5 + 5) \geq (a^2 + 4)(b^2 + 4)(c^2 + 4)$.

Trước hết ta chứng minh: $(a^2 + 4)(b^2 + 4)(c^2 + 4) \geq 5(a + b + c + 2)^2 (*)$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz ta có:

$$(a + b + c + 2)^2 = \left[a + \left(\frac{b+c+2}{2} \right) \cdot 2 \right]^2 \leq (a^2 + 4) \left[1 + \frac{(b+c+2)^2}{4} \right]$$

Ta quy bài toán về chứng minh: $5(a^2 + 4) \left[1 + \frac{(b+c+2)^2}{4} \right] \leq (a^2 + 4)(b^2 + 4)(c^2 + 4)$

Hãy

$$5\left[4+(b+c+2)^2\right] \leq 4(b^2+4)(c^2+4) \Leftrightarrow 40+5b^2+5c^2+10bc+20(b+c) \leq 4(b^2c^2+4b^2+4c^2+16)$$

Hãy

$$4b^2c^2-10bc+11b^2+11c^2-20(b+c)+24 \geq 0 \Leftrightarrow (2bc-2)^2+(b-c)^2+10(b-1)^2+10(c-1)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng (*) được chứng minh.

Bây giờ ta có: $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) = 9 \Rightarrow a+b+c \geq 3$ dẫn đến $5(a+b+c+2)^2 \geq 125$
vậy $P \geq 125$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy GTNN của P là 125 tại $a=b=c=1$.

Bài 18. Với x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn: $5(x^2+y^2+z^2) = 6(xy+yz+zx)$

Chứng minh: $2\sqrt{2(x+y+z)} - 2(y^2+z^2) \leq 3$.

Hướng dẫn:

Sử dụng bất đẳng thức: $(A+B)^2 \leq 2(A^2+B^2)$ ta có:

$$5x^2 + \frac{5}{2}(y+z)^2 \leq 5x^2 + 5(y^2+z^2) = 6x(y+z) + 6yz \leq 6x(y+z) + \frac{6}{4}(y+z)^2$$

$$\text{Suy ra } 5x^2 - 6x(y+z) + (y+z)^2 \leq 0 \Leftrightarrow [5x - (y+z)][x - (y+z)] \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{y+z}{5} \leq x \leq y+z \Rightarrow x+y+z \leq 2(y+z).$$

Suy ra $2\sqrt{2(x+y+z)} - 2(y^2+z^2) \leq 2\sqrt{4(y+z)} - (y+z)^2$ đặt $\sqrt{y+z} = t \geq 0$. Ta chứng minh:

$$4t - t^4 \leq 3 \Leftrightarrow t^4 - 4t + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)^2(t^2+2t+3) \geq 0 \text{ bất đẳng thức này luôn đúng. Dấu '=' xảy}$$

$$\text{ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x = y+z \\ y = z \\ y+z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1, y=z=\frac{1}{2}.$$

Bài 19. Cho các số thực dương x, y, z sao cho $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = (x+y+z)^2 - \left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \right).$$

Hướng dẫn:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} &= \left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \right) (xy + yz + zx) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x^3z}{y} + \frac{y^3x}{z} \right) + \left(\frac{y^3x}{z} + \frac{z^3y}{x} \right) + \left(\frac{z^3y}{x} + \frac{x^3z}{y} \right) \right] + x^2z + y^2x + z^2y + x^3 + y^3 + z^3. \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác ta có: } \left(\frac{x^3z}{y} + \frac{y^3x}{z} \right) + \left(\frac{y^3x}{z} + \frac{z^3y}{x} \right) + \left(\frac{z^3y}{x} + \frac{x^3z}{y} \right) \geq 2x^2y + 2y^2z + 2z^2x.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x^2y + y^2z + z^2x + x^2z + y^2x + z^2y + x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2).$$

$$\text{Hay } \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq (x + y + z) \left[(x + y + z)^2 - 2 \right]. \text{ Dẫn đến:}$$

$$P \leq (x + y + z)^2 - (x + y + z) \left[(x + y + z)^2 - 2 \right]. \text{ Đặt } t = x + y + z \text{ ta có } P \leq -t^3 + t^2 + 2t \text{ do}$$

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) = 3 \Rightarrow t \geq \sqrt{3}.$$

Ta chứng minh:

$$-t^3 + t^2 + 2t \leq 3 - \sqrt{3} \Leftrightarrow t^3 - t^2 - 2t + 3 - \sqrt{3} \geq 0 \Leftrightarrow (t - \sqrt{3}) \left[t^2 + (\sqrt{3} - 1)t + 1 - \sqrt{3} \right] \geq 0. \text{ Bất đẳng}$$

thức cuối cùng luôn đúng do $t \geq \sqrt{3}$. Vậy GTLN của P là $3 - \sqrt{3}$ tại $x = y = z = 1$.

Bài 20. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 1$. Tìm GTLN, GTNN của

$$P = (x + y)\sqrt{1 + z} + (y + z)\sqrt{1 + x} + (z + x)\sqrt{1 + y}.$$

Hướng dẫn:

$$\text{Sử dụng bất đẳng thức } (Ax + By + Cz)^2 \leq (A^2 + B^2 + C^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P^2 &= \left[(x + y)\sqrt{1 + z} + (y + z)\sqrt{1 + x} + (z + x)\sqrt{1 + y} \right]^2 \\ &\leq (x + y + y + z + z + x) \left[(x + y)(1 + z) + (y + z)(1 + x) + (z + x)(1 + y) \right] = 4(1 + xy + yz + zx) \end{aligned}$$

$$\text{Lại có } 3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2 = 1 \Rightarrow xy + yz + zx \leq \frac{1}{3} \text{ suy ra } P \leq \frac{4}{3}\sqrt{3} \text{ dấu đẳng thức xảy ra}$$

$$\text{tại } x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Ta cũng có: $P = (x+y)\sqrt{1+z} + (y+z)\sqrt{1+x} + (z+x)\sqrt{1+y} \geq (x+y) + (y+z) + (z+x) = 2$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x; y; z)$ là hoán vị của bộ số $(1; 0; 0)$.

Bài 21. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn: $0 < y < x \leq 4, x + y \leq 7$. Chứng minh:

$$x^2 + y^2 \leq 25$$

Hướng dẫn:

Cách 1: Do $x \leq 4$ suy ra $x(x-y) \leq 4(x-y)$ (tạo x^2). Ta có $y(x+y) \leq 7y$

Cộng 2 bất đẳng thức suy ra

$$x(x-y) + y(x+y) \leq 4(x-y) + 7y \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4x + 3y = 3(x+y) + x \leq 3 \cdot 7 + 4 = 25$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 4, x + y = 7 \Leftrightarrow x = 4, y = 3$.

Cách 2: Ta chứng minh: $x^2 + y^2 \leq 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow (4+x)(4-x) + (3+y)(3-y) \geq 0$. Sử dụng công thức khai triển Abel: $a_1b_1 + a_2b_2 = (a_1 - a_2)b_1 + a_2(b_1 + b_2)$.

Ta có: $(4+x)(4-x) + (3+y)(3-y) = (1+x-y)(4-x) + (3+y)(7-x-y)$. Rõ ràng với điều kiện đề bài thì $(1+x-y)(4-x) + (3+y)(7-x-y) \geq 0$ ddpcm.

Bài 22. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm GTLN của

$$P = \sqrt{4a + (b-c)^2} + \sqrt{4b + (a-c)^2} + \sqrt{4c + (a-b)^2}.$$

Hướng dẫn:

Ta có

$$P = \sqrt{4a + (b-c)^2} + \sqrt{4b + (a-c)^2} + \sqrt{4c + (a-b)^2} \leq \sqrt{4a + (b+c)^2} + \sqrt{4b + (a+c)^2} + \sqrt{4c + (a+b)^2}$$

Hay $P \leq \sqrt{4a + (1-a)^2} + \sqrt{4b + (1-b)^2} + \sqrt{4c + (1-c)^2} = a + 1 + b + 1 + c + 1 = 4$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $(a; b; c)$ là hoán vị của bộ số $(1; 0; 0)$.

Bài 23. Cho các số thực $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn: $\sqrt{x+2y+1} + \sqrt{x+2z+1} = 4$. Tìm GTLN, GTNN của $P = x + y + z + xy + yz + zx$.

Hướng dẫn:

Tìm GTNN.

Cách 1: Từ giả thiết ta suy ra

$$16 = \left(\sqrt{x+2y+1} + \sqrt{x+2z+1} \right)^2 \leq (1+1)(2x+2y+2z+2) = 4(x+y+z+1) \text{ suy ra } x+y+z \geq 3$$

Ta có $P \geq x+y+z \geq 3$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=3, y=z=0$.

Cách 2:

$$\text{Đặt } a+2 = \sqrt{x+2y+1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+2z+1} = 2-a \text{ do } x, y, z \geq 0 \text{ nên } -1 \leq a \leq 1.$$

$$\text{Ta có: } 2(x+y+z+1) = 2(a^2+4) \Rightarrow x+y+z = a^2+3 \text{ và } y-z = 4a.$$

Do $a^2 \geq 0$ nên $x+y+z \geq 3$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=3, y=z=0$.

Tìm GTLN:

$$\text{Chú ý rằng: } 4(x+y+z)^2 - 3(y-z)^2 = 12(xy+yz+zx) + (2x-y-z)^2 \geq 12(xy+yz+zx)$$

$$\text{Suy ra } xy+yz+zx \leq \frac{1}{3}(x+y+z)^2 - \frac{1}{4}(y-z)^2. \text{ Dẫn đến } P \leq x+y+z + \frac{1}{3}(x+y+z)^2 - \frac{1}{4}(y-z)^2$$

$$\text{hay } P \leq a^2+3 + \frac{1}{3}(a^2+3)^2 - 4a^2 = \frac{a^2(a^2-3)}{3} + 6 \leq 6. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } x=y=z=1.$$

Bài 24. Cho a, b, c là 3 số thực dương thỏa mãn: $(a+c)(b+c) = 4c^2$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$A = \frac{a}{b+3c} + \frac{b}{a+3c} + \frac{ab}{bc+ca}.$$

Bằng cách: $a = xc, b = yc$. Giả thiết trở thành:

$$(xc+c)(yc+c) = 4c^2 \Rightarrow (x+1)(y+1) = 4 \Leftrightarrow x+y+xy = 3.$$

$$\text{Biểu thức } A \text{ trở thành: } A = \frac{xc}{yc+3c} + \frac{yc}{xc+3c} + \frac{xc \cdot yc}{yc^2+xc^2} = \frac{x}{y+3} + \frac{y}{x+3} + \frac{xy}{x+y}$$

$$\text{Bài toán trở thành: Cho } x, y > 0, x+y+xy = 3. \text{ Tìm GTLN } A = \frac{x}{y+3} + \frac{y}{x+3} + \frac{xy}{x+y}.$$

$$\text{Đặt } t = x+y \text{ suy ra } xy = 3-t \text{ do } x, y > 0 \Rightarrow 0 < t < 3. \text{ Lại có } (x+y)^2 \geq 4xy \text{ suy ra } t^2 \geq 4(3-t)$$

$$\text{hay } t^2 + 4t - 12 \geq 0 \Leftrightarrow (t+2)^2 \geq 16 \Rightarrow t+2 \geq 4 \Rightarrow t \geq 2 \text{ vậy } 2 \leq t < 3.$$

$$\text{Ta có } A = \frac{x^2 + 3x + y^2 + 3y}{(x+3)(y+3)} + \frac{xy}{x+y} = \frac{(x+y)^2 - 2xy + 3(x+y)}{xy + 3(x+y) + 9} + \frac{xy}{x+y} = \frac{t^2 - 2(3-t) + 3t}{3t + (3-t) + 9} + \frac{3-t}{t}$$

$$A = \frac{t^2 - 2(3-t) + 3t}{3t + (3-t) + 9} + \frac{3-t}{t} = \frac{t^2 + 5t - 6}{2t + 12} + \frac{3-t}{t} - 1 = \frac{(t-1)(t+6)}{2(t+6)} + \frac{3}{t} - 1 = \frac{t}{2} + \frac{3}{t} - \frac{3}{2} = f(t).$$

Ta chứng minh: $A \leq f(2) = 1$ hay

$$\frac{t}{2} + \frac{3}{t} - \frac{3}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{t}{2} + \frac{3}{t} - \frac{5}{2} \leq 0 \Leftrightarrow t^2 + 6 - 5t \leq 0 \Leftrightarrow (t-2)(t-3) \leq 0 \text{ luôn đúng do } 2 \leq t < 3.$$

Dấu bằng xảy ra tại $t = 2 \Leftrightarrow x = y = 1 \Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 25. Cho các số thực a, b, c thay đổi luôn thỏa mãn: $a + b + c = 4$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 6$.

- Tính giá trị biểu thức $M = ab + bc + ca$
- Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3$.

Hướng dẫn:

$$\text{a. Từ giả thiết ta có: } 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 16 - 6 = 10$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = 5.$$

$$\text{b. Ta có } \begin{cases} a + b + c = 4 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 6 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} b + c = 4 - a \\ b^2 + c^2 = 6 - a^2 \end{cases} \text{ mà } 2(b^2 + c^2) \geq (b + c)^2 \forall b, c \text{ suy ra}$$

$$2(6 - a^2) \geq (4 - a)^2 \Leftrightarrow (3a - 2)(a - 2) \leq 0 \Rightarrow (3a - 2)(3a - 6) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2 \geq 0 \\ 3a - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq a \leq 2$$

Tương tự ta cũng có $\frac{2}{3} \leq b, c \leq 2$.

Sử dụng đẳng thức $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ Ta có

$$\begin{aligned} P &= a^3 + b^3 + c^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 = (4 - c)^3 - 3ab(4 - c) + c^3 \\ &= (4 - c)^3 + c^3 - 12ab + 3abc \quad P = (4 - c)^3 + c^3 - 12ab + 3abc = 64 - 48c + 12c^2 - 12ab + 3abc \\ &= -12c(4 - c) - 12ab + 3abc + 64 \end{aligned}$$

Hay $P = -12c(a+b) - 12ab + 3abc + 64 = 64 - 12(ab+bc+ca) + 3abc = 3abc + 4$ Vì

$$\frac{2}{3} \leq a, b, c \leq 2 \text{ suy ra } \begin{cases} (a-2)(b-2)(c-2) \leq 0 \\ \left(a - \frac{2}{3}\right)\left(b - \frac{2}{3}\right)\left(c - \frac{2}{3}\right) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} abc + 4(a+b+c) - 2(ab+bc+ca) - 8 \leq 0 \\ abc + \frac{4}{9}(a+b+c) - \frac{2}{3}(ab+bc+ca) - \frac{8}{27} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{50}{27} \leq abc \leq 2 \text{ suy ra } \frac{86}{9} \leq P \leq 10.$$

Khi $a = 2, b = 1, c = 1$ thì $P = 10$, $a = \frac{2}{3}, b = c = \frac{5}{3}$ thì $P = \frac{86}{9}$.

Vậy GTLN của P là 10, giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{86}{9}$.