MỘT SỐ BÀI HÌNH HỌC ÔN THI VÀO LỚP 10- NĂM 2020

Biên soạn: Nguyễn Trung Kiên- kienqb2013@gmail.com

Bài 1. Tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có 3 đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Dựng đường thẳng qua H cắt AB, AC lần lượt tại P, Q sao cho ΔAPQ cân tại A. Dựng đường kính AK của (O). Đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt HK tại S.

a. Chứng minh: $BHCK$ là hình bình hành và $\Delta AFH \backsim \Delta ACK$.

b. Chứng minh: HP là phân giác của $\widehat{FHB}$.

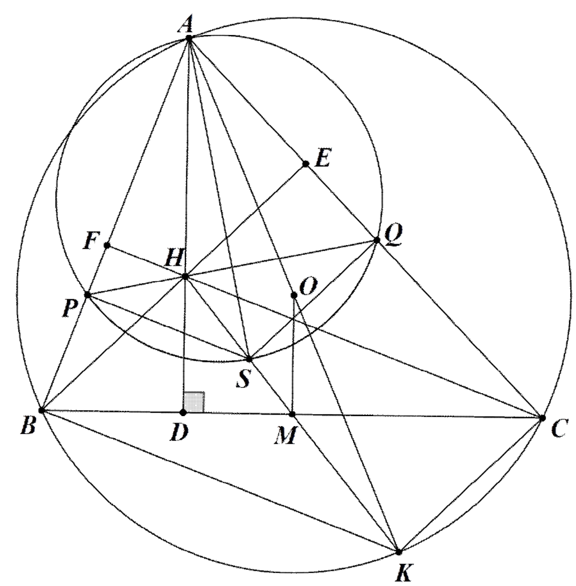
c. Chứng minh: S nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ.

Hướng dẫn:

a. Ta có $BH \perp AC, KC \perp AC \Rightarrow BH // KC$ tương tự $CH // KB$ nên $BHCK$ là hình bình hành. Dẫn đến $BH = CK$

Từ đó suy ra $\frac{DB}{CK} = \frac{DB}{BH} = \frac{AD}{AC}$ (do $\Delta BHD \backsim \Delta ADC$ (g.g))

Dẫn đến $\Delta ADB \backsim \Delta ACK$ mà $\Delta ADB \backsim \Delta AFH$ suy ra $\Delta ACK \backsim \Delta AFH$.



b. Ta có $\widehat{APQ} = \widehat{ABH} + \widehat{PHB}$ và $\widehat{AQP} = \widehat{ACH} + \widehat{QHC}$ mà $\widehat{ABH} = \widehat{ACH}$ và $\widehat{APQ} = \widehat{AQP}$ nên $\widehat{PHB} = \widehat{QHC} = \widehat{FHP}$ hay HP là phân giác của $\widehat{FHB}$.

c. Từ chứng minh ở câu b ta suy ra $\frac{PF}{PB} = \frac{HF}{HB}$ mặt khác tam giác $\Delta ACK \backsim \Delta AFH$ nên ta có: $\frac{HF}{CK} = \frac{AH}{AK}$ mà $CK = BH$ nên $\frac{HF}{CK} = \frac{HF}{HB}$ suy ra $\frac{AH}{AK} = \frac{PF}{PB}$. Vì S là giao điểm của phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ với HK mà $\widehat{BAH} = \widehat{CAK}$ nên AS cũng là phân giác của góc $\widehat{HAK}$ suy ra $\frac{AH}{AK} = \frac{SH}{SK}$ từ đó suy ra $\frac{SH}{SK} = \frac{PF}{PB}$ dẫn đến $SP // HF$ hay $\widehat{SPA} = 90^0$ tương tự $\widehat{SQA} = 90^0$ suy ra S nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ.

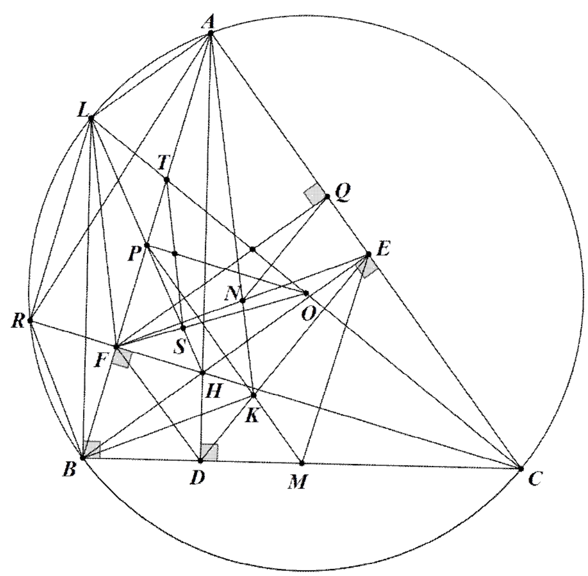
Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC. Dựng $FQ \perp AC$ tại Q, đường thẳng qua Q song song với DE cắt EF tại N .

a. Chứng minh: N là trung điểm của EF .

b. Gọi K là giao điểm của AN với DE. Tia MK cắt AB tại P, HP cắt (O) tại L. Chứng minh: C, O, L thẳng hàng.

c. Giả sử FO cắt PL tại S , CL cắt AB tại T. Chứng minh: OP chia đôi ST .

Hướng dẫn:



a. Ta định nghĩa lại N là trung điểm EF và chứng minh: $NQ//DE$.

Thật vậy ta có tam giác FQE vuông tại Q có QN là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $\widehat{NQE} = \widehat{NEQ}$ hơn nữa ta có $\cos A = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$ nên suy ra $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (c.g.c), tương tự $\Delta DEC \backsim \Delta ABC$ dẫn đến $\widehat{AEF} = \widehat{ABC} = \widehat{DEC}$ suy ra $\widehat{NQE} = \widehat{DEC}$ hay $NQ//DE$.

b. Theo định lý Thales ta có: $\dfrac{AN}{AK} = \dfrac{AQ}{AE} = \dfrac{AF}{AB}$ suy ra $NF//BK$, hai tam giác FNQ và BKE có các cạnh tương ứng song song nên đồng dạng với nhau , hơn nữa FNQ cân tại N nên ta suy ra BKE cân tại K hay $KB = KE$ dẫn đến MK là trung trực của $BE \Rightarrow MK//AC \Rightarrow P$ là trung điểm AB . Ta dựng đường kính CL của (O) thì $\widehat{LBC} = 90^0$ ta chứng minh được $AHBL$ là hình bình hành dẫn đến H, P, L thẳng hàng.

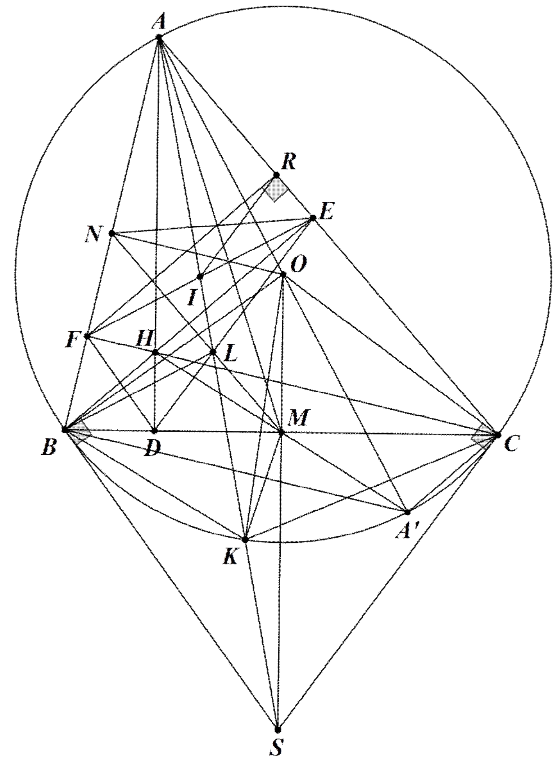
c. Gọi R là giao điểm của CF với (O) khác với C. Ta chứng minh được F là trung điểm của RH và $RL//AB$. Ta có: $\frac{TO}{TL}=\frac{OL}{TL}-1=\frac{CL}{2TL}-1=\frac{CR}{2FR}-1=\frac{CR}{HR}-1=\frac{CH}{HR}=\frac{CH}{2HF}=\frac{2PO}{2HF}$ hay $\frac{TO}{TL}=\frac{PO}{HF}=\frac{SO}{SF}$ hay $TS//LF$. Theo bổ đề hình thang ta có PO đi qua trung điểm ST.

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H. Các tiếp tuyến tại B,C của (O) cắt nhau tại S, AS cắt $EF,DE,(O)$ lần lượt tại I,L,K. Gọi M là trung điểm của BC.

a. Chứng minh: $\Delta MOA \backsim \Delta AOS$.

b. Chứng minh: I là trung điểm EF.

c. Gọi N là trung điểm AB. Chứng minh: M,L,N thẳng hàng.



Hướng dẫn:

a. Ta có: $OM.OS=OB^2=OA^2$ dẫn đến $\Delta MOA \backsim \Delta AOS$ (c.g.c) nên $\widehat{OMA}=\widehat{OAS}=\widehat{OKA}$

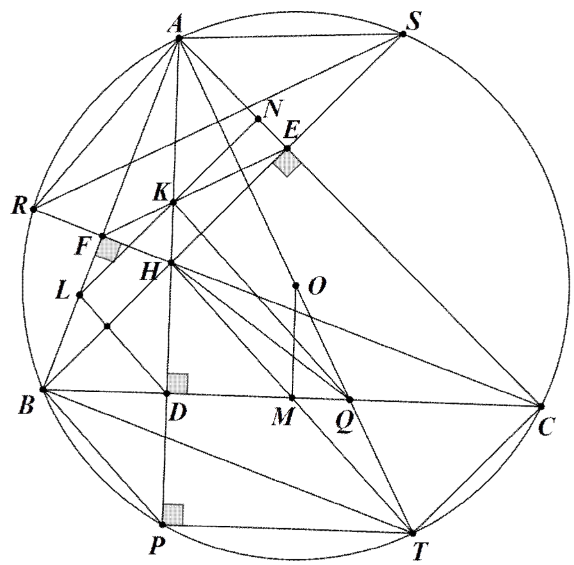
b. Dễ chứng minh được:

$SM.SO=SB^2=SC^2=SK.SA$ nên $\Delta SKM \backsim \Delta SOA$ (c.g.c)

Dựng đường kính AA' của (O) dễ chứng minh $BHCA'$ là hình bình hành,kết hợp với $\Delta BDH \backsim \Delta ADC$ (g.g) ta suy ra $\frac{BD}{A'C}=\frac{BD}{BH}=\frac{AD}{AC}$ nên $\Delta ADB \backsim \Delta ACA'$ (c.g.c) dẫn đến $\widehat{BAD}=\widehat{CAO}$. Ta có $OM//AD$ nên $\widehat{HAM}=\widehat{OMA}=\widehat{OAS}=\widehat{KAO}$ suy ra $\widehat{MAC}=\widehat{KAB}$,hơn nữa $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (quen thuộc) suy ra $\Delta AIF \backsim \Delta AMC$,tương tự $\Delta AIE \backsim \Delta AMB$ mà M là trung điểm BC nên I là trung điểm EF.

c. Dựng $FR \perp AC$ thì RIF là tam giác cân tại I nên $\widehat{IRE}=\widehat{IER}=\widehat{DEC}$ dẫn đến $IR//DE$ .Ta cũng có $FR//BE$. Theo định lý Thales ta có $\frac{AI}{AL}=\frac{AR}{AE}=\frac{AF}{AB}$ nên $BL//FE$ dẫn đến $\Delta BLE \backsim \Delta FIR$ suy ra BLE là tam giác cân tại B nên $BL=LE$, N là trung điểm AB thì $NB=NE$ nên LN là trung trực của BE hay ML chia đôi AB.

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, AD cắt EF tại K, đường thẳng qua K vuông góc với AC cắt AB tại L. Gọi P là giao điểm thứ 2 của AD với (O).



a. Chứng minh: P đối xứng với H qua BC.

b. Chứng minh: $\widehat{OAC} = \widehat{BAD}$

c. Chứng minh: LD đi qua trung điểm của BH.

Hướng dẫn:

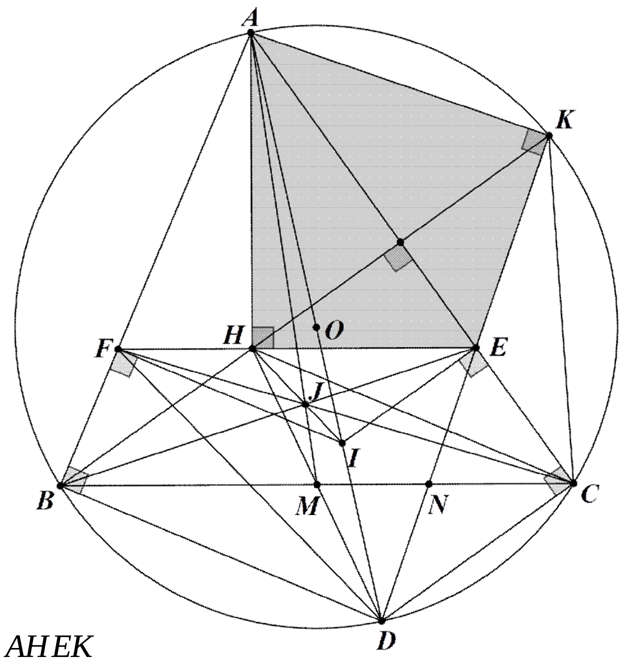
a. Dựng đường kính AT của (O) thì $BHCT$ là hình bình hành dẫn đến H, M, T thẳng hàng nên hơn nữa $\widehat{APM} = 90^0$ nên $DM // TP$ suy ra DM là đường trung bình của tam giác HPT suy ra D là trung điểm của HP.

b. Gọi R, S lần lượt là các giao điểm thứ 2 của CH, BH với (O). Tương tự như a ta suy ra R đối xứng với H qua F, S đối xứng với H qua E nên các tam giác AHR, AHS cân tại A dẫn đến $AH = AR = AS$ hay A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SHR. Suy ra $AO \perp RS$ mà EF là đường trung bình của tam giác SHR suy ra $AO \perp EF$ suy ra $\widehat{OAC} = 90^0 - \widehat{AEF}$ mà $\Delta ABC \backsim \Delta AEF$ nên $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ suy ra $\widehat{OAC} = 90^0 - \widehat{ABC} = \widehat{BAH}$.

c. Trước hết ta chứng minh: $\dfrac{AK}{AH} = \dfrac{AD}{AP}$. Gọi Q là giao điểm của BC và AT. Ta có: $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ và $\widehat{EAK} = \widehat{QAB}$ (suy ra từ b) nên $\Delta AEK \backsim \Delta ABQ$ (g.g) dẫn đến $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AK}{AQ}$, ta cũng có $\Delta AEH \backsim \Delta ABT$ (g.g) nên $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AH}{AT}$ suy ra $\dfrac{AK}{AQ} = \dfrac{AH}{AT}$ hay $\dfrac{AK}{AH} = \dfrac{AQ}{AT}$, hơn nữa $\dfrac{AQ}{AT} = \dfrac{AD}{AP}$ nên $\dfrac{AK}{AH} = \dfrac{AD}{AP}$. Từ $KL // BE$ ta có: $\dfrac{AL}{AB} = \dfrac{AK}{AH}$ suy ra $\dfrac{AD}{AP} = \dfrac{AL}{AB}$ suy ra $DL // BP$

mà D là trung điểm của HP nên DL chứa đường trung bình của tam giác HBP suy ra DL đi qua trung điểm của BH ■.

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ đường kính AD. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng qua H song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại F, E, DE cắt (O) tại K ($K \neq D$).



a. Chứng minh: $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.
b. Chứng minh: $AC.AF = 2.AH.R$
c. Chứng minh: B, H, K thẳng hàng và DA là phân giác của $\widehat{EDF}$.
d. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF. Chứng minh: IH đi qua giao điểm của BE, CF.

Hướng dẫn:

a. Vì $AH \perp BC, EF // BC \Rightarrow AH \perp EF$ tại H suy ra $\widehat{AHE} = 90^0$, lại có AD là đường kính của (O) nên $\widehat{DKA} = 90^0$. Tứ giác $AHEK$ có $\widehat{AKE} + \widehat{AHE} = 180^0$ nên $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.

b. Vì $EF // BC$ nên $\widehat{AFH} = \widehat{ABC}$ (2 góc đồng vị). Lại có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AC) suy ra $\widehat{AFH} = \widehat{ADC}$ (*). Các tam giác AHF, ACD là tam giác vuông tại H và C nên từ (*) suy ra $\Delta AHF \backsim \Delta ACD$ (g.g) dẫn đến $\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AF}{AD} \Leftrightarrow AC.AF = AD.AH$ hay $AC.AF = 2R.AH$.

c. Chứng minh tương tự câu b ta có: $\Delta AHE \backsim \Delta ABD$ kết hợp với $AHEK$ là tứ giác nội tiếp ta có biến đổi góc: $\widehat{EKH} = \widehat{EAH} = \widehat{BAD} = \widehat{BKD}$ suy ra B, H, K thẳng hàng. Ta có $\widehat{KAC} = \widehat{KBC}$ (cùng chắn cung KC của (O)), mặt khác $\widehat{KBC} = \widehat{HAC}$ (cùng phụ với $\widehat{C}$) suy ra $\widehat{KAE} = \widehat{HAE}$ hay H đối xứng với K qua AC dẫn đến $\widehat{HEA} = \widehat{KEA}$ suy ra EA là phân giác ngoài của $\widehat{DEF}$. Tương tự ta cũng có FA là phân giác ngoài của $\widehat{DEF}$ dẫn đến DA là phân giác trong của $\widehat{EDF}$.

d. Từ chứng minh ở câu c ta có: tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác DEF nằm trên AD và $IE \perp AE, IF \perp AF$ dẫn đến $IE // BH$ .Gọi J là giao điểm của IH với BE theo định lý Thales ta có: $\frac{JI}{JH} = \frac{IE}{BH}$ (*), tương tự gọi J' là giao điểm của IH với CF thì $\frac{J'I}{J'H} = \frac{IF}{CH}$ (**) mặt khác ta cũng có $\Delta EIF \backsim \Delta BHC$ (g.g) (do các cặp cạnh tương ứng song song) nên $\frac{IE}{BH} = \frac{IF}{CH}$ (***). Từ (*),(**),(***) ta suy ra $\frac{JI}{JH} = \frac{J'I}{J'H}$ mà J, J' đều nằm trong đoạn IH nên $J \equiv J'$ hay IH đi qua giao điểm của BE, CF .

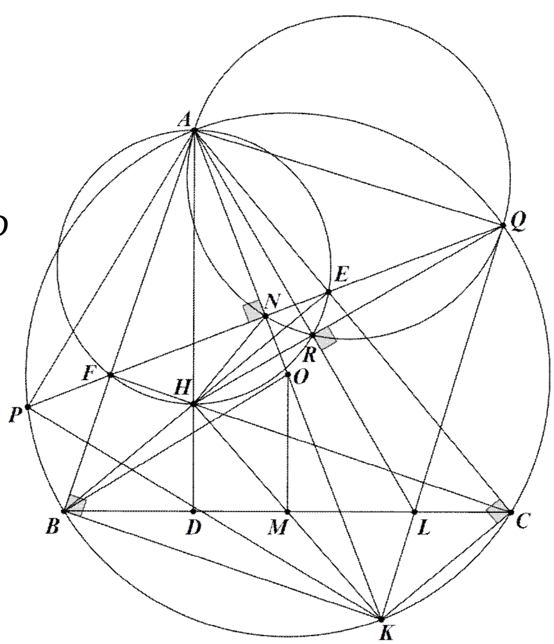
Bài 6. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) đường kính AK ,các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Đường thẳng EF cắt (O) tại P,Q (P,C nằm về 2 phía đường thẳng AB). Gọi M là trung điểm BC .

- **a.** Chứng minh: $\widehat{OAC} = \widehat{BAH}$
- **b.** Chứng minh: $AP^2 = 2AD.OM$.
- **c.** Dây KQ cắt BC tại L . Chứng minh: AL , HQ cắt nhau tại 1 điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF .

Hướng dẫn:

a. Học sinh tự chứng minh: $OA \perp EF$ để suy ra $\widehat{OAC} = \widehat{BAH}$.

b. Ta có $\Delta ANF \backsim \Delta ABK$ (g.g) dẫn đến $AP^2 = AN.AK = AF.AB$ mà $\Delta AFH \backsim \Delta ABD$ (g.g) nên $AF.AB = AD.AH$,hơn nữa $AH = 2OM$ (học sinh tự chứng minh) dẫn đến $AP^2 = 2OM.AD$.



c. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt AL tại R suy ra $\widehat{ARH} = 90^0$,ta có $AR.AL = AH.AD = AP^2 = AQ^2$

mà $\widehat{AQL} = 90^0$ suy ra $QR \perp AL$ (theo hệ thức lượng trong tam giác vuông hay H, R, Q thẳng hàng. Tức là HQ, AL cắt nhau tại 1 điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

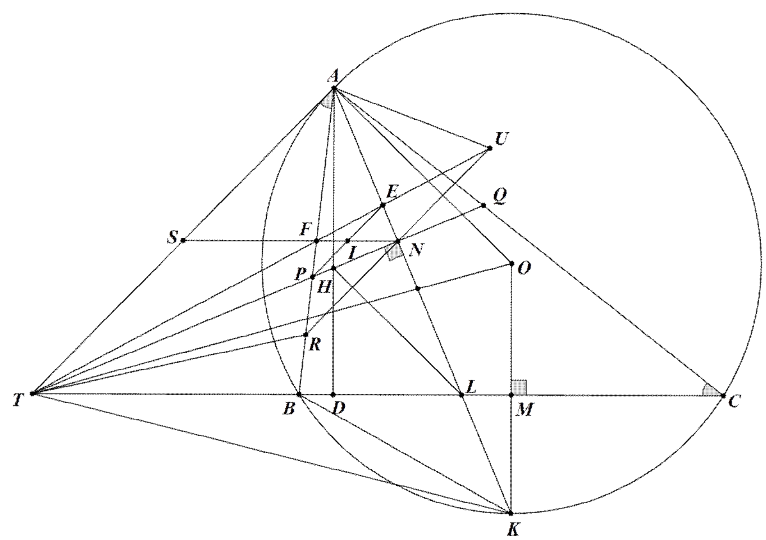
Bài 7. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có đường cao là AD, phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt BC và (O) lần lượt tại L, K ($L \neq A$). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. Gọi H là trực tâm của tam giác ATL, các điểm M, F lần lượt là trung điểm của BC, AB. Tia TH cắt AB, AC, AL lần lượt tại P, Q, N, tia TF cắt AL tại E.

a. Chứng minh: Tam giác ATL cân và tứ giác $TNMK$ nội tiếp.

b. Chứng minh: $TB.TC = TL^2$.

c. Chứng minh: $\left(\dfrac{TP}{TQ}\right)^2 = \dfrac{PB}{QC}$ và FN chia đôi PE.

Hướng dẫn giải:



a. Ta có: $\widehat{ALT} = \widehat{LCA} + \widehat{CAL} = \widehat{ACB} + \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$ (1) (góc ngoài tam giác), $\widehat{TAL} = \widehat{TAB} + \widehat{BAL}$ mà $\widehat{TAB} = \widehat{ACB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và 1 dây) nên $\widehat{TAL} = \widehat{ACB} + \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$ (2). Từ (1),(2) ta suy ra $\widehat{ALT} = \widehat{ALT}$ hay tam giác TAL cân tại T. Từ chứng minh trên ta suy ra $TN \perp AL$ tại N là trung điểm AL. Ta cũng có $OK \perp BC$ tại trung điểm M của BC nên $\widehat{TNK} = \widehat{TMK} = 90^0$ suy ra tứ giác $TNMK$ nội tiếp.

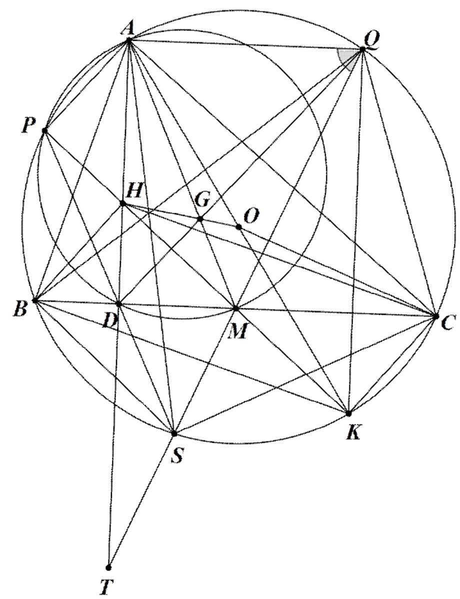
b. Xét tam giác TBA và TAC ta có: $\widehat{ATC}$ chung, $\widehat{TAB}=\widehat{ACB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và 1 dây) dẫn đến $\Delta TBA \backsim \Delta TAC$ (g.g) suy ra $\dfrac{TB}{TA}=\dfrac{TA}{TC} \Leftrightarrow TA^2=TB.TC$ mà $TA=TL$ nên $TL^2=TB.TC$.

c. Tam giác APQ có AN là phân giác cũng là đường cao nên APQ là tam giác cân tại A. Xét tam giác TPA, TQC ta có: $\widehat{TAP}=\widehat{QCT}$, $\widehat{ATP}=\widehat{CTQ}$ suy ra $\Delta TPA \backsim \Delta TQC$ (g.g) dẫn đến $\dfrac{TP}{TQ}=\dfrac{AP}{CQ}$, tương tự ta cũng có: $\Delta TPB \backsim \Delta TQA$ nên $\dfrac{TP}{TQ}=\dfrac{PB}{QA}$, kết hợp với $AP=AQ$ suy ra $\left(\dfrac{TP}{TQ}\right)^2=\dfrac{AP}{CQ}.\dfrac{BP}{AQ}=\dfrac{BP}{CQ}$. Gọi S là trung điểm của AT thì S,F,N thẳng hàng. Ta sẽ chứng minh: $PE//AT$ từ đó kết hợp với bổ đề hình thang ta sẽ có điều phải chứng minh:

Dựng đường thẳng qua N song song với TA cắt AB, TE lần lượt tại R,U thì $\dfrac{NU}{ST}=\dfrac{NR}{SA}$ mà $SA=ST$ nên $NU=NR$ hay $\dfrac{NU}{NR}=1$. Áp dụng định lý Thales ta có: $\dfrac{EN}{EA}=\dfrac{UN}{AT}$, $\dfrac{PT}{PN}=\dfrac{AT}{RN}$ từ đó suy ra $\dfrac{EN}{EA}.\dfrac{PT}{PN}=\dfrac{UN}{AT}.\dfrac{AT}{RN}=\dfrac{UN}{RN}=1$ suy ra $\dfrac{EN}{EA}=\dfrac{PN}{PT}$, theo định lý Thales đảo ta có: $EP//SA$. Gọi I là giao điểm của SN với PE thì $\dfrac{IE}{SA}=\dfrac{IN}{SN}=\dfrac{IP}{ST}$ mà $SA=ST \Rightarrow IE=IP$ hay I là trung điểm EP.

Bài 8. (Hình chuyên) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), có đường cao AD, trực tâm là H, trọng tâm là G. Gọi M là trung điểm của BC. Tia MH cắt (O) tại P, tia PD cắt lại (O) tại S, SM cắt lại (O) tại Q ($Q \neq S$). Gọi K là điểm đối xứng với A qua O.

a. Chứng minh: Tứ giác $BHCK$ là hình bình hành từ đó suy ra 4 điểm A,P,D,M cùng nằm trên một đường tròn.
b. Chứng minh: $\Delta BAS \backsim \Delta MAC$.
c. Chứng minh: $AQ//BC$ và D,G,Q thẳng hàng.



Hướng dẫn:

a. Vì K đối xứng với A qua O nên AK là đường kính của (O).Ta có $BH \perp AC, KC \perp AC$ suy ra $BH//KC$, tương tự $CH//KB$ nên tứ giác $BHCK$ là hình bình hành dẫn đến H, M, K thẳng hàng, mà $\widehat{KPA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MPA} = 90^0$. Ta có $\widehat{MPA} = \widehat{MDA} = 90^0$ nên $APDM$ là tứ giác nội tiếp.

b. Ta có $\widehat{ASB} = \widehat{ACM}$ (cùng chắn cung AB). Ngoài ra $\widehat{DAM} = \widehat{DPM} = \widehat{SPK} = \widehat{SAK}$ dẫn đến $\widehat{DAS} = \widehat{MAK}$. Từ đó suy ra $\widehat{BAS} = \widehat{BAD} + \widehat{DAS} = 90^0 - \widehat{ABC} + \widehat{DAS} = 90^0 - \widehat{AKC} + \widehat{MAK} = \widehat{CAK} + \widehat{MAK} = \widehat{MAC}$ suy ra $\Delta BAS \backsim \Delta MAC$ (g.g).

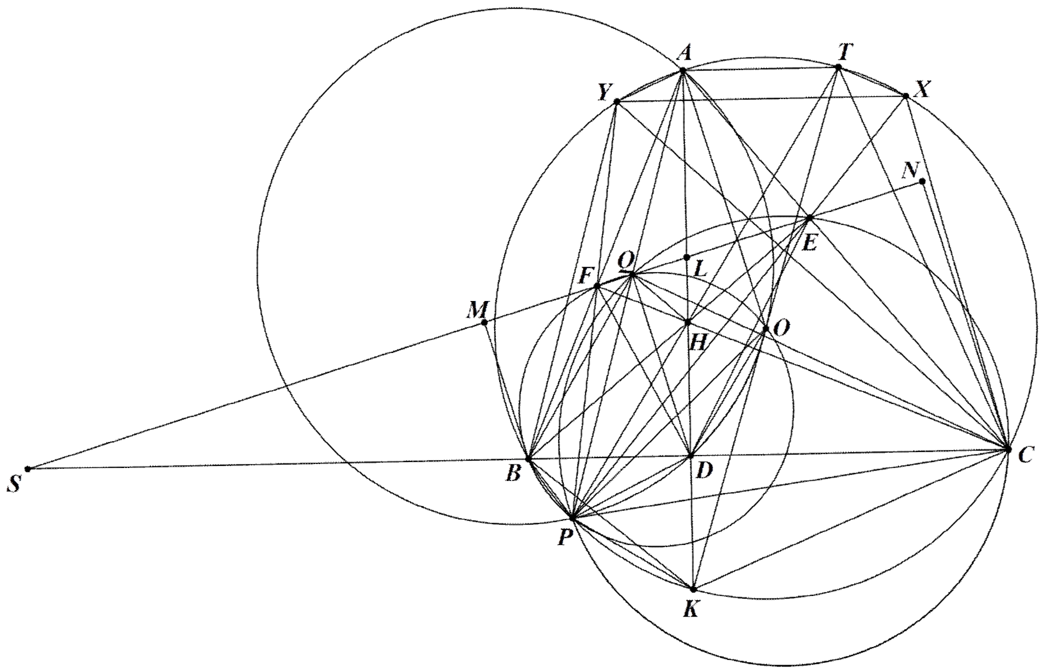
c. Từ chứng minh ở câu b ta suy ra $\frac{AB}{AM} = \frac{SB}{CM}$ hoàn toàn tương tự ta cũng có: $\frac{AC}{AM} = \frac{SC}{BM}$ kết hợp với $BM = CM$ ta suy ra $\frac{AB}{AC} = \frac{SB}{SC}$ (*). Ta có $\Delta SMB \backsim \Delta CMQ$ (g.g) dẫn đến $\frac{SB}{SM} = \frac{CQ}{CM}$ (1), $\Delta SMC \backsim \Delta BMQ$ (g.g) dẫn đến $\frac{SC}{SM} = \frac{BQ}{BM}$ (2). Từ (1),(2) kết hợp với $BM = CM$ ta suy ra $\frac{SB}{SC} = \frac{CQ}{BQ}$ (**). Từ (*),(**) ta suy ra $\frac{AB}{AC} = \frac{CQ}{BQ}$ dẫn đến $\Delta ABC \backsim \Delta QCB$ (c.g.c) nên $\widehat{AQB} = \widehat{ACB} = \widehat{QBC}$ suy ra $AQ//BC$.

Từ chứng minh trên ta suy ra $BAQC$ là hình thang cân. Điểm M là trung điểm của BC nên $MA = MQ$. Kéo dài MQ cắt AD tại T, do $AQ//BC$ nên $AQ \perp AH$ dẫn đến tam giác QAT vuông tại A. Suy ra $\widehat{MTA} = 90^0 - \widehat{MQA} = 90^0 - \widehat{MAQ} = \widehat{MAT} \Rightarrow MT = MA = MQ$ suy ra M là trung điểm của QT dẫn đến $MD \| = \frac{1}{2} AQ$. Gọi G' là giao điểm của DQ với AG thì $\frac{G'A}{G'M} = \frac{QA}{DM} = 2$ suy ra G' là trọng tâm của tam giác ABC hay $G \equiv G'$. Nói cách khác ta có: D, G, Q thẳng hàng.

Bài 9. (Hình chuyên) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có 3 đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, AH cắt lại (O) tại K. Đường thẳng qua A song song với BC cắt (O) tại T khác A. Tia TH cắt lại (O) tại P. Tia PE, PF cắt lại (O) lần lượt tại X, Y.

a. Chứng minh: $DO//HT$ và 4 điểm A, O, D, P cùng nằm trên một đường tròn.
b. Gọi Q là giao điểm của EF và PA. Chứng minh: $DQ \perp EF$.
c. Chứng minh: $BCXY$ là hình thang cân.

Hướng dẫn:



a. Ta có $\widehat{KBC}=\widehat{KAC}=\widehat{EBC}$ nên tam giác HBK cân tại B (có đường cao từ B cũng là phân giác) suy ra D là trung điểm HK. Ta cũng có $AT \parallel BC$ mà $BC \perp AH$ nên $AT \perp AH$ suy ra TK là đường kính của (O), hay O là trung điểm KT suy ra OD là đường trung bình của tam giác HTK dẫn đến $DO \parallel HT$. Ta có $\widehat{PAD}=\widehat{PAK}=\widehat{PTK}=\widehat{PTO}=\widehat{OPT}=\widehat{POD}$ dẫn đến tứ giác $AODP$ nội tiếp.

b. Ta có $\widehat{AFE}=\widehat{ACB}=\widehat{APB}$ nên $BFQP$ là tứ giác nội tiếp. Tương tự ta có $CEQP$ là tứ giác nội tiếp dẫn đến $AQ.AP=AF.AB=AH.AD$ suy ra $HDPQ$ là tứ giác nội tiếp. Ta có biến đổi góc: $\widehat{FQD}=\widehat{FQP}+\widehat{PQD}=180^0-\widehat{ABP}+\widehat{PHD}=180^0-\widehat{ABP}+\widehat{HDO}=180^0-\widehat{ABP}+\widehat{APO}=$ $180^0-\widehat{ABP}+\frac{1}{2}\left(180^0-\widehat{AOP}\right)=270^0-\left(\widehat{ABP}+\widehat{ACP}\right)=90^0$ hay $DQ \perp EF$.

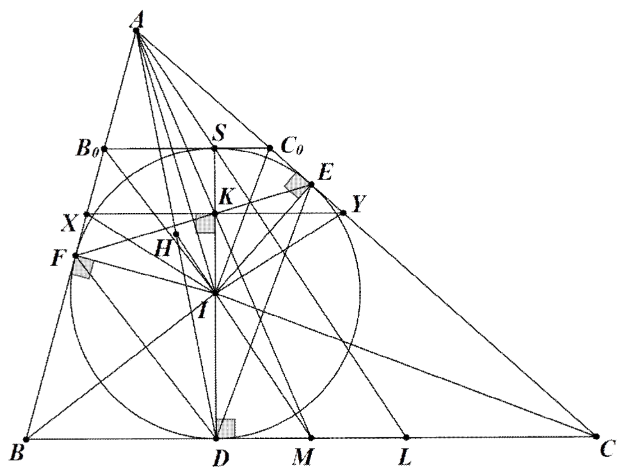
c. Gọi S là giao điểm của EF với BC. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên EF. Ta có $\widehat{SFB}=\widehat{AFE}=\widehat{ACB}=\widehat{BFD}$ nên FB là phân giác của góc $\widehat{SFD}$ dẫn đến FC là phân giác ngoài của $\widehat{SFD}$. Áp dụng tính chất phân giác ta có: $\frac{CD}{CS}=\frac{BD}{BS} \Leftrightarrow \frac{SB}{SC}=\frac{DB}{DC}$.

Áp dụng định lý Thales ta có: $\frac{SB}{SC}=\frac{BM}{CN}=\frac{QM}{QN}$ dẫn đến $\Delta BMQ \backsim \Delta CNQ$ (c.g.c) suy ra $\widehat{MQB}=\widehat{NQC}$ suy ra QD là phân giác của $\widehat{BQC}$. Từ đó ta có biến đổi góc:

$\widehat{BPY}=\widehat{BPF}=\widehat{BQF}=\widehat{EQC}=\widehat{EPC}=\widehat{XPC}$ suy ra $\widehat{YB}=\widehat{XC}$ dẫn đến $XY//BC$ hay tứ giác $BCYX$ là hình thang cân.

Bài 10. (Hình chuyên) Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC,CA,AB lần lượt tại D,E,F. Gọi K là giao điểm của DI và EF. Đường thẳng AK cắt BC tại điểm M. Tia MI cắt AD tại H. Đường thẳng qua H vuông góc với AD cắt BI,CI lần lượt tại P,Q.

- **a.** Chứng minh: M là trung điểm của BC.
- **b.** Chứng minh: PQ là trung trực của AD.
- **c.** Chứng minh: PE,QF cắt nhau trên (I).



Hướng dẫn:

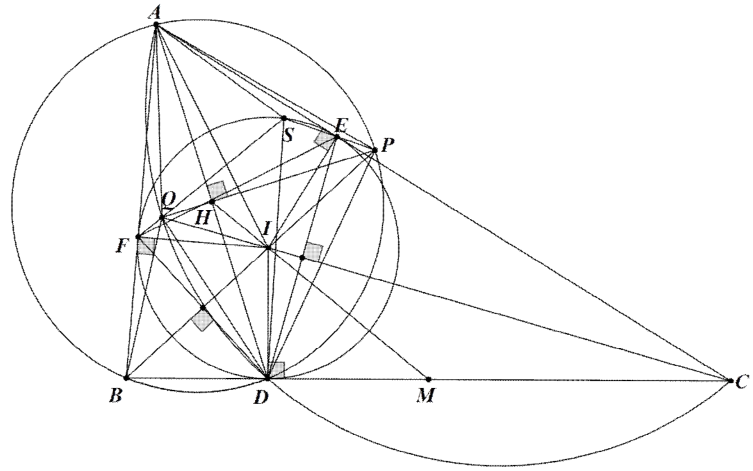
a. Giả sử DI cắt EF tại K. Từ K dựng đường thẳng song song với BC cắt AB,AC tại E,F. Ta có các tứ giác $IKXF,IKEI$ nội tiếp nên ta có biến đổi góc $\widehat{KXI}=\widehat{KFI}=\widehat{KEI}=\widehat{KYI}$ dẫn đến tam giác XIY cân tại I nên K là trung điểm của XY. Theo định lý Thales ta suy ra M là trung điểm của BC.

b. Dựng đường kính DS của (I) đường thẳng qua S song song với BC cắt AB,AC lần lượt tại A_0,B_0, AS cắt BC tại L thì $SB_0=FB_0$, $SC_0=EC_0$ và các tam giác B_0IB,C_0IC vuông tại I. Từ đó ta có: $FB_0.FB=SB_0.DB=IF^2=IE^2=EC_0.EC=SC_0.DC$ dẫn đến $\dfrac{SB_0}{DC}=\dfrac{SC_0}{DB}$.

Theo định lý Thales ta cũng có: $\dfrac{SB_0}{BL}=\dfrac{SC_0}{CL}$ suy ra $\dfrac{BL}{CD}=\dfrac{CL}{BD}=\dfrac{BL+CL}{BD+CD}=1\Rightarrow CL=BD$ dẫn đến M là trung điểm DL nên $MI//AL$ suy ra MI đi qua trung điểm H của AD.

Ta định nghĩa lại các điểm P,Q như sau:

Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt đường thẳng BI tại P thì do $ABDP$ nội tiếp có $\widehat{ABP}=\widehat{DBP}$ nên



$PA = PD$, tương tự đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt đường thẳng CI tại Q thì $QA = QD$. Hay PQ là trung trực của AD.

c. Ta có $\widehat{QAD} = \widehat{QCD} = \widehat{DIE}$ nên các tam giác cân AQD, EID đồng dạng . Tương tự APD, FID đồng dạng nên $\frac{QD}{ID} = \frac{AD}{ED}$ và $\frac{PD}{ID} = \frac{DA}{FD}$ nên $DQ.DE = DI.DA = DP.DF$ hay $\frac{DQ}{DP} = \frac{DF}{DE}$. Mặt khác ta có $\widehat{PDQ} = \widehat{PDA} + \widehat{ADQ} = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} = \widehat{EDF}$ dẫn đến tam giác DPQ đồng dạng với tam giác DEF dẫn đến DEP đồng dạng với DFQ. Gọi S là giao điểm của PE, FQ thì $\widehat{PSQ} = 360^0 - \widehat{SFD} - \widehat{SPD} - \widehat{FDP} = 360^0 - \widehat{PED} - \widehat{SPD} - \widehat{EDP} - \widehat{FDE} = 180^0 - \widehat{FDE}$ suy ra tứ giác $DESF$ nội tiếp, hay điểm S nằm trên (I) ■.

Tài liệu tham khảo:

Đề thi HSG các trường, đề chọn đội tuyển các TP của Việt Nam.

Đề thi Olympic các nước, các diễn đàn toán học của Vietnam và thế giới

Chúc các bạn học sinh may mắn và thành công.