TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

THƯ VIỆN TOÁN

ĐỀ KIỂM TRA KIẾN THỨC LỚP 9

Môn Toán (Vòng 2 – Đợt 1)

Ngày 29 tháng 3 năm 2021

Thời gian 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (3,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^8\left(1+x^2\right)+y^8\left(1+y^2\right)=4 \end{cases}.$

2. Chứng minh rằng $7\cdot 5^{2n}+12\cdot 6^n$ chia hết cho 19 với mọi n nguyên dương.

Câu 2. (3,0 điểm)

1. Tìm $x,\ y,\ z$ nguyên dương thỏa mãn:

$$x+y+1=xyz.$$

2. Với $x,\ y,\ z>0$ thỏa mãn $xy+yz+zx=1,$ tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{1-y^2}{1+y^2}+\frac{2}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh $BC,\ CA,\ AB$ lần lượt tại các điểm $D,\ E,\ F.$

Các đường thẳng $IB,\ IC$ theo thứ tự cắt EF tại $M,\ N.$

1. Chứng minh rằng tứ giác $BCMN$ nội tiếp.

2. Giao điểm của hai đường thẳng $DM,\ DN$ với (I) là $Q,\ P$ khác $D.$ Chứng minh rằng $PQ \parallel BC.$

3. Gọi giao điểm của CP và BQ là $J.$ Gọi K là hình chiếu vuông góc của D trên $EF.$ Chứng minh rằng DJ và AK cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC.$

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho dãy số thực $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n$ thuộc đoạn $[-1;1].$ Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\sum_{1\le i\le j\le n} x_i x_i.$$

---**HẾT**---

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. (3,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^8\left(1+x^2\right)+y^8\left(1+y^2\right)=4 \end{cases}.$

2. Chứng minh rằng $7\cdot 5^{2n}+12\cdot 6^n$ chia hết cho 19 với mọi n nguyên dương.

Lời giải

1. Với mọi $x,\ y>0$ và $n\in\mathbb{N}^*$, ta có: $\dfrac{x^n+y^n}{2}\ge\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$.

Với $n=1,$ bất đẳng thức đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k,$ ta có: $\dfrac{x^k+y^k}{2}\ge\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^k$.

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng $n=k+1,$ tức là: $\dfrac{x^{k+1}+y^{k+1}}{2}\ge\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^{k+1}$.

Thật vậy, ta có:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{k+1}=\left(\frac{x+y}{2}\right)^k\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{x^k+y^k}{2}\cdot\frac{x+y}{2}=\frac{x^{k+1}+y^{k+1}+xy\left(x^{k-1}+y^{k-1}\right)}{4}.$$

Mà

$$\frac{x^{k+1}+y^{k+1}+xy\left(x^{k-1}+y^{k-1}\right)}{4}-\frac{x^{k+1}+y^{k+1}}{2}$$
$$=\frac{xy\left(x^{k-1}+y^{k-1}\right)-\left(x^{k+1}+y^{k+1}\right)}{4}=-\frac{(x-y)^2\left(x^{k-1}+x^{k-2}y+...+xy^{k-2}+y^{k-1}\right)}{4}\le 0.$$

Từ đây suy ra: $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^{k+1}\le\dfrac{x^{k+1}+y^{k+1}}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức trên với $n=4,\ n=5,$ ta có:

$$x^8\left(1+x^2\right)+y^8\left(1+y^2\right)=x^8+y^8+x^{10}+y^{10}\ge 2\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^4+2\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^5=4.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x^2=y^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=-1 \\ x=1,\ y=-1 \\ x=-1,\ y=1 \end{array}\right.$.

Vậy hệ cho có bốn nghiệm: $(x;y)=(1;1),\ (-1;-1),\ (1;-1),\ (-1;1)$.

2. Ta có $7\cdot 5^{2n}=7\cdot 25^{n}\equiv 7\cdot 6^{n}\ (\bmod 19)$.

Suy ra: $7\cdot 5^{2n}+12\cdot 6^{n}\equiv 7\cdot 6^{n}+12\cdot 6^{n}\equiv 19\cdot 6^{n}\equiv 0\ (\bmod 19)$.

Ta có điều phải chứng minh.

Câu 2. (3,0 điểm)

1. Tìm $x,\ y,\ z$ nguyên dương thỏa mãn:

$$x+y+1=xyz.$$

2. Với $x,\ y,\ z>0$ thỏa mãn $xy+yz+zx=1,$ tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{1-y^2}{1+y^2}+\frac{2}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Lời giải

1. Do $x,\ y$ có vai trò như nên không mất tính tổng quát giả sử $1\le x\le y$.

Nếu $x=y$ thì $2y+1=y^2z\Rightarrow 2y+1\,\vdots\, y^2$.

Ta có: $2y+1\,\vdots\, y^2\Rightarrow 2y^2+y\,\vdots\, y^2\Rightarrow 1\,\vdots\, y\Rightarrow y=1$.

Với $y=1\Rightarrow x=1,\ z=3$.

Nếu $x<y$ thì $2y+1>x+y+1=xyz\Rightarrow 2y\ge xyz\Leftrightarrow 2\ge xz\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xz=1\\ xz=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=z=1\\ x=2,\ z=1\\ x=1,\ z=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=2,\ y=3,\ z=1\\ x=1,\ y=2,\ z=2\end{array}\right.$.

Tóm lại phương trình đã cho có năm nghiệm $(x;y;z)=(1;1;3),\ (2;3;1),\ (3;2;1),\ (1;2;2),\ (2;1;2)$.

2. Nhận xét: $x^2+1=xy+yz+zx=(x+y)(x+z),$ ta có:

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{1-y^2}{1+y^2}=\frac{2\left(1-x^2y^2\right)}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}=\frac{2(1-xy)(1+xy)}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}=\frac{2(yz+zx)(1+xy)}{(x+y)^2(y+z)(z+x)}$$
$$=\frac{2z(1+xy)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{2z(1+xy)}{\sqrt{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2}}=\frac{2z(1+xy)}{\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}}$$

Mặt khác $\dfrac{1+xy}{\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}}=\dfrac{1\cdot 1+x\cdot y}{\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}}\le\dfrac{\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}}{\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}}=1.$

Suy ra: $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}+\dfrac{1-y^2}{1+y^2}\le\dfrac{2z}{\sqrt{1+z^2}}$.

Do đó: $P \le \frac{2(1+z)}{\sqrt{1+z^2}} \le \frac{2\sqrt{2(1+z^2)}}{\sqrt{1+z^2}} = 2\sqrt{2}.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{y},\ z = 1.$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $2\sqrt{2}.$

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm $D, E, F.$

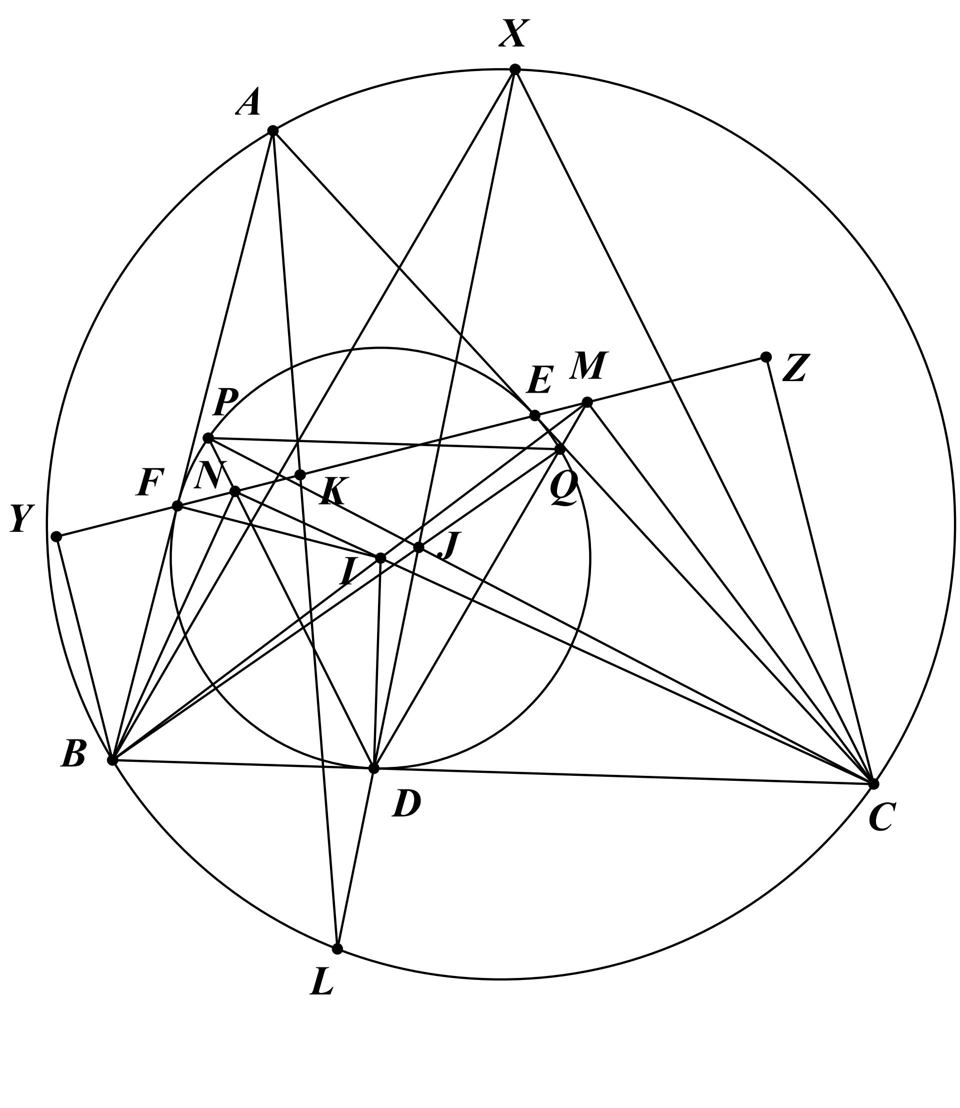
Các đường thẳng IB, IC theo thứ tự cắt EF tại $M, N.$

1. Chứng minh rằng tứ giác $BCMN$ nội tiếp.

2. Giao điểm của hai đường thẳng DM, DN với (I) là Q, P khác $D.$ Chứng minh rằng $PQ \parallel BC.$

3. Gọi giao điểm của CP và BQ là $J.$ Gọi K là hình chiếu vuông góc của D trên $EF.$ Chứng minh rằng DJ và AK cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC.$

Lời giải



1. Ta có $\angle NIB = 180^0 - \angle BIC = 90^0 - \dfrac{\angle BAC}{2} = \angle AFE \Rightarrow BINF$ nội tiếp.

Suy ra $\angle BNI = \angle BFI = 90^0.$

Tương tự $\angle CMI = 90^0.$

Vậy tứ giác $BCNM$ nội tiếp.

2. Do D, E đối xứng qua IC và CI đi qua tâm I của đường tròn (I) nên theo tính chất đối xứng của đường tròn thì F và P đối xứng qua $IC.$ Từ đó $DP = EF.$

Chứng minh tương tự $DQ = EF.$

Suy ra $DP = DQ \Rightarrow \Delta DPQ$ cận tại D nên $PQ \perp ID.$

Mà $ID \perp BC$ do đó $PQ \parallel BC.$

3. Gọi Y, Z là hình chiếu của B, C lên $EF.$ Dễ thấy hai tam giác vuông BYF và CZE đồng dạng, do đó:

$$\frac{BY}{CZ} = \frac{BF}{CE} = \frac{DB}{DC} = \frac{KY}{KZ}.$$

Suy ra hai tam giác vuông KYB và KZC đồng dạng. Do đó $\angle BKY = \angle CKZ.$

Mặt khác ΔAEF cân tại $A \Rightarrow \angle BFK = CEK.$

Suy ra hai tam giác KFB và KEC đồng dạng.

Gọi L giao điểm của AK với đường troàn ngoại tiếp tam giác (ABC) khác $A.$ X là trung điểm của cung BC chứa A của $(ABC).$ Do hai tam giác KFB và KEC đồng dạng nên

$$\frac{KF}{KE} = \frac{BF}{CE} = \frac{DB}{DC}.$$

Vậy K và D chia FE và BC cùng tỷ số, mà hai tam giác cân AEF và XBC đồng dạng nên $\Delta AFK \sim \Delta XBD.$

Do đó $\angle BXD = \angle FAK = \angle BAL = \angle BXL.$

Hay X, D, L thẳng hàng (1).

Lại có ΔDPQ cận tại $D,$ mà $DP = EF = DQ,$ do đó:

$$\angle PQD = \angle EDF = 90^0 - \frac{\angle BAC}{2} = 90^0 - \frac{\angle BXC}{2} = \angle XBC.$$

Mặt khác $PQ \parallel BC \Rightarrow \angle QDC = \angle PQD = \angle XBC \Rightarrow XB \parallel DQ.$

Chứng minh tương tự $DP \parallel XC.$

Vậy hai tam giác DPQ và XBC có các cạnh tương ứng song song nên XD, BQ, CP đồng quy tại $J.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra L, D, J, X thẳng hàng hay DJ và AK cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC.$

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho dãy số thực $x_1,\ x_2,...,\ x_n$ thuộc đoạn $\left[-1;1\right]$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\sum_{1\le i\le j\le n} x_i x_i.$$

Lời giải

Xét S là hàm số của một biến x_i thì S là hàm số bậc nhất trên $\left[-1;1\right]$.

Do đó S đạt giá trị nhỏ nhất khi $x_i=1$ hoặc $x_i=-1$.

Giả sử có p giá trị $x_i=1$ và q giá trị $x_i=-1$ với $p+q=n$.

Suy ra có $\dfrac{p\left(p-1\right)}{2}$ cách chọn một cặp $x_i,\ x_j$ bằng 1 và có $\dfrac{q\left(q-1\right)}{2}$ cách chọn một cặp $x_i,\ x_j$ bằng -1.

Do đó $S=\dfrac{p\left(p-1\right)}{2}+\dfrac{q\left(q-1\right)}{2}-pq$ do có p giá trị $x_i=1$ và q giá trị $x_i=-1$ nên có pq cặp bằng -1.

Hay $S=\dfrac{\left(p-q\right)^2}{2}-\dfrac{p+q}{2}\ge-\dfrac{p+q}{2}=-\dfrac{n}{2}$.

Mặt khác $S\in\mathbb{Z}\Rightarrow \min S=\begin{cases}\dfrac{n}{2},\ n=2k\\ \left[\dfrac{n}{2}\right],\ n=2k+1\end{cases},\ k\in\mathbb{N}^*.$