CHỨNG MINH TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

KIẾN THỨC CƠ BẢN:

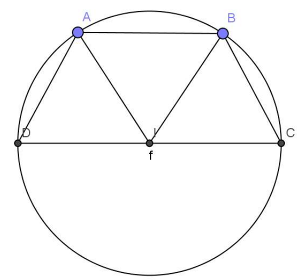
Tứ giác nội tiếp đường tròn là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn. Đường tròn đó được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

I. Phương pháp 1 chứng minh: Chứng minh bốn đỉnh của tứ giác cùng cách đều một điểm.

CÁC VÍ DỤ.

Mức độ 1: NB.

Câu 1: Cho hình thang $ABCD$ $(AB // CD,\ AB < CD)$ có $\widehat{C} = \widehat{D} = 60^0, CD = 2AD$. Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.



Hướng dẫn giải

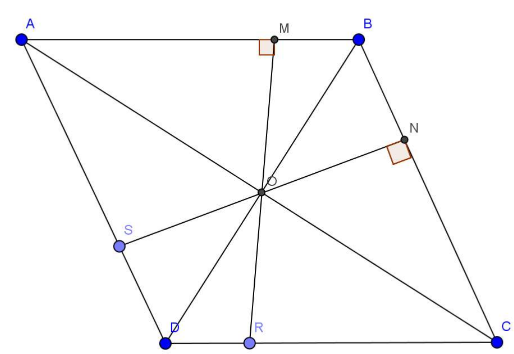
Gọi I là trung điểm CD, ta có $\begin{cases} IC = AB \\ IC // AB \end{cases} \Rightarrow ICBA$ là hình hành$\Rightarrow BC = AI$ (1)

Tương tự $AD = BI$ (2)

$ABCD$ là hình thang có $\widehat{C} = \widehat{D} = 60^0$ nên $ABCD$ là hình thang cân(3); mà

Từ (1), (2), (3) ta có hai tam giác $ICB; IAD$ đều hay $IA = IB = IC = I$D hay bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

Câu 2: Cho hình thoi $ABCD$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. M, N, R và S lần lượt là hình chiếu của O trên AB, BC, CD và DA. Chứng minh bốn điểm M, N, R và S cùng thuộc một đường tròn.

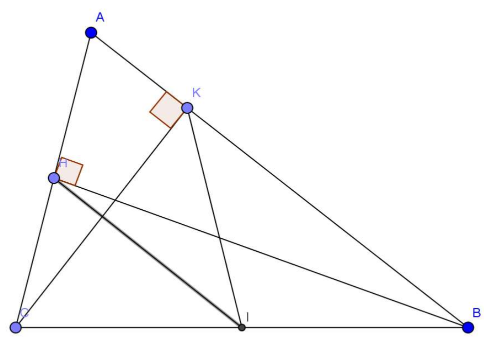


Hướng dẫn giải

Do $ABCD$ là hình thoi nên O là trung điểm của AC,BD; AC,BD là phân giác góc A,B,C,D nên $\Delta MAO=\Delta SAO=\Delta NCO=\Delta PDO \Rightarrow OM=ON=OP=OS$ hay bốn điểm M, N, R và S cùng thuộc một đường tròn.

Câu 3: Cho tam giác ABC có các đường cao BH và CK.

Chứng minh B, K, H, C cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm đường tròn đó.



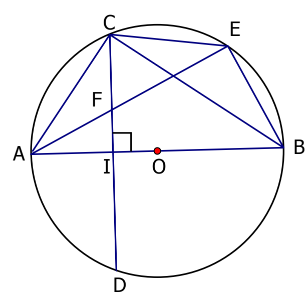
Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm CB, do $\Delta CHB;\Delta CKB$ vuông tại H,K nên $IC=IB=IK=IH$ hay B, K, H, C cùng nằm trên một đường tròn tâm I.

Mức độ 2: TH.

Câu 4: Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Vẽ dây cung CD vuông góc với AB tại I (I nằm giữa A và O). Lấy điểm E trên cung nhỏ BC (E khác B và C), AE cắt CD tại F. Chứng minh: $BEFI$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải



Tứ giác $BEFI$ có: $\widehat{\mathrm{BIF}}=90^0$ (gt)

$\widehat{\mathrm{BEF}}=\widehat{\mathrm{BEA}}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

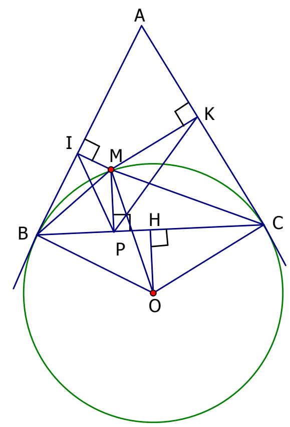
Suy ra tứ giác $BEFI$ nội tiếp đường tròn đường kính BF

Câu 5: Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ ta vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M, vẽ $MI\perp AB$, $MK\perp AC$, $\mathrm{MI}\perp\mathrm{AB}$, $\mathrm{MK}\perp\mathrm{AC}$ $(I\in AB, K\in AC)$

a) Chứng minh: $AIMK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Vẽ $MP \perp BC$ $\left(P \in BC\right)$. Chứng minh: $CPMK$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $\widehat{AIM} = \widehat{AKM} = 90^0$ (gt), suy ra tứ giác AIMK nội tiếp đường tròn đường kính AM.

b) Tứ giác CPMK có $\widehat{MPC} = \widehat{MKC} = 90^0$ (gt). Do đó CPMK là tứ giác nội tiếp

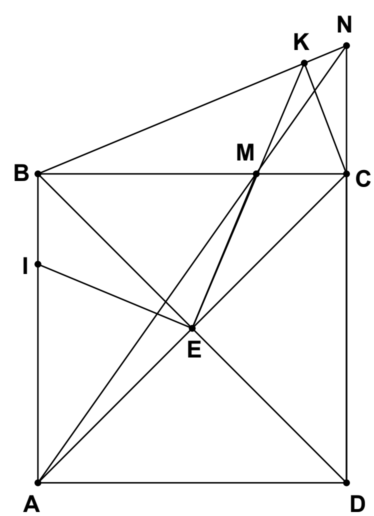
Câu 6: Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại E. Lấy I thuộc cạnh AB, M thuộc cạnh BC sao cho: $\widehat{IEM} = 90^0$ (I và M không trùng với các đỉnh của hình vuông).

a) Chứng minh rằng $BIEM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Tính số đo của góc $\widehat{IME}$

c) Gọi N là giao điểm của tia AM và tia DC; K là giao điểm của BN và tia EM. Chứng min $BKCE$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải



a)Tứ giác $BIEM$: $\widehat{IBM} = \widehat{IEM} = 90^0$ (gt);hay tứ giác $BIEM$ nội tiếp đường tròn đường kính IM .

b) Tứ giác $BIEM$ nội tiếp suy ra: $\widehat{IME} = \widehat{IBE} = 45^0$ (do $ABCD$ là hình vuông).

c) ΔEBI và ΔECM có $BE = CE$, $\widehat{BEI} = \widehat{CEM}$ (do $\widehat{IEM} = \widehat{BEC} = 90^0$)

$\Rightarrow$ $\Delta EBI = \Delta ECM$ (g-c-g)$\Rightarrow MC = IB \Rightarrow MB = IA$

Vì $CN // BA$ nên theo định lí Thalet, ta có: $\frac{MA}{MN} = \frac{MB}{MC} = \frac{IA}{IB}$. Suy ra IM song song với BN

(định lí Thalet đảo)

$\Rightarrow \widehat{BKE} = \widehat{IME} = 45^0$ (2). Lại có $\widehat{BCE} = 45^0$ (do $ABCD$ là hình vuông).

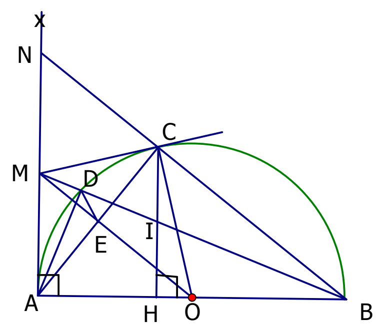
Suy ra $\widehat{BKE} = \widehat{BCE} \Rightarrow BKCE$ là tứ giác nội tiếp.

Mức độ 3: VDT.

Câu 7: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ và tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). AC cắt OM tại E; MB cắt nửa đường tròn (O) tại D (D khác B).

Chứng minh: $AMCO$ và $AMDE$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải



Vì MA, MC là tiếp tuyến nên: $\widehat{MAO} = \widehat{MCO} = 90^0 \Rightarrow AMCO$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MO.

$\widehat{ADB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)$\Rightarrow \widehat{ADM} = 90^0$ (1)

Lại có: $OA = OC = R$; $MA = MC$ (tính chất tiếp tuyến). Suy ra OM là đường trung trực của AC

$\Rightarrow \widehat{AEM} = 90^0$ (2).

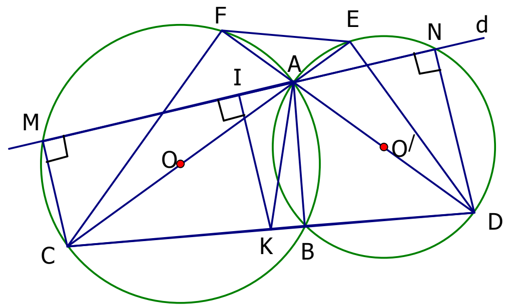
Từ (1) và (2) suy ra $AMDE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MA.

Câu 8: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ AC, AD thứ tự là đường kính của hai đường tròn (O) và (O').

a) Chứng minh ba điểm C, B, D thẳng hàng.

b) Đường thẳng AC cắt đường tròn (O') tại E; đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại F (E, F khác A). Chứng minh bốn điểm C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

Hướng dẫn giải



a) $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ABD}$ lần lượt là các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) và $(O') \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ABD} = 90^0$

Suy ra C, B, D thẳng hàng.

b) Xét tứ giác $CDEF$ có:

$\widehat{CFD} = \widehat{CFA} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\widehat{CED} = \widehat{AED} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn ($O^/$)

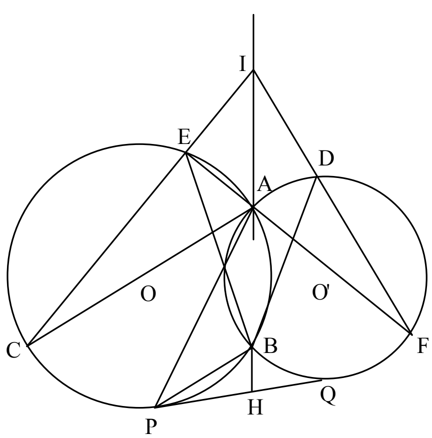
$\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{CED} = 90^0$ suy ra $CDEF$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 9: Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B phân biệt. Đường thẳng OA cắt (O), (O') lần lượt tại điểm thứ hai C và D. Đường thẳng $O'A$ cắt (O), (O') lần lượt tại điểm thứ hai E E, F.

1. Chứng minh 3 đường thẳng AB, CE và DF đồng quy tại một điểm I.

2. Chứng minh tứ giác $BEIF$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Hướng dẫn giải:



Ta có: $\widehat{ABC} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ABF} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên B, C, F thẳng hàng. AB, CE và DF là 3 đường cao của tam giác ACF nên chúng đồng quy.

2. Do $\widehat{IEF} = \widehat{IBF} = 90^0$ suy ra $BEIF$ nội tiếp đường tròn.

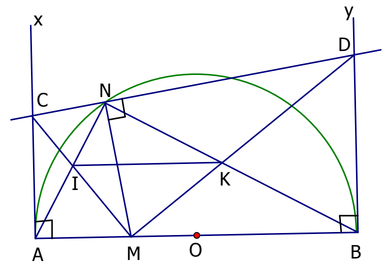
Mức độ 4: VDC.

Câu 10: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng OA, điểm N thuộc nửa đường tròn (O). Từ A và B vẽ các tiếp tuyến Ax và By. Đường thẳng qua V và vuông góc với NM cắt Ax, By thứ tự tại C và D.

a) Chứng minh $ACNM$ và $BDNM$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh ΔANB đồng dạng với ΔCMD từ đó suy ra $IMKN$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải



a)Ta có tứ giác $ACNM$ có: $\widehat{MNC} = 90^0$ (gt) $\widehat{MAC} = 90^0$ (tínhchất tiếp tuyến).

$\Rightarrow$ $ACNM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MC. Tương tự tứ giác $BDNM$ nội tiếp đường tròn đường kính. MD

b) ΔANB và ΔCMD có:

$\widehat{ABN} = \widehat{CDM}$ (do tứ giác $BDNM$ nội tiếp)

$\widehat{BAN} = \widehat{DCM}$ (do tứ giác $ACNM$ nội tiếp) nên $\Delta ANB \sim \Delta CMD$ (g.g)

c) $\Delta ANB \sim \Delta CMD \Rightarrow \widehat{CMD} = \widehat{ANB} = 90^o$ (do $\widehat{ANB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Suy ra $\widehat{IMK} = \widehat{INK} = 90^0 \Rightarrow$ $IMKN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính IK

BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Mức độ 1: NB

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của B trên các đường thẳng AC, AD. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, M, N cùng nằm trên đường tròn

HD: Chứng minh bốn điểm A, B, M, N cùng nằm trên đường tròn đường kính AB

Bài 2. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

Chứng minh rằng bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn (gọi tâm của nó là O).

HD Chứng minh bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên đường tròn đường kính AB

Bài 3. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn $(O;R)$. Các đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

Chứng minh: $AEHF$ và $BCEF$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn

Hướng dẫn giải:

Tứ giác $AEHF$ có: $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^0$ (gt). Suy ra $AEHF$ là tứ giác nội tiếp.

- Tứ giác $BCEF$ có: $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^0$ (gt). Suy ra $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.

II. ***Phương pháp 2 chứng minh*** **"**Chứng minh tứ giác có hai góc đối diện bù nhau (tổng hai góc đối diện bằng 180^0).

CÁC VÍ DỤ.

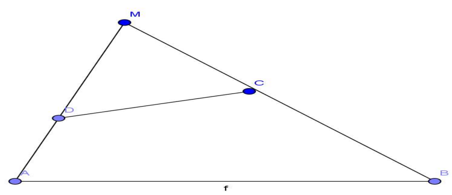
Mức độ 1: NB.

Câu 11: Hình chữ nhật; Hình thang cân; Hình bình hành. Hình nào nội tiếp được trong đường tròn? Chứng minh.

Hướng dẫn giải

Ta có hình chữ nhật và hình thang cân đều có tổng hai góc đối diện bù nhau nên chúng nội tiếp trong một đường tròn.

Câu 12: Cho tứ giác $ABCD$ sao cho: AD cắt BC tại M và $MA.MD = MB.MC$. Chứng minh tứ giác $ABCD$ nội tiếp được.



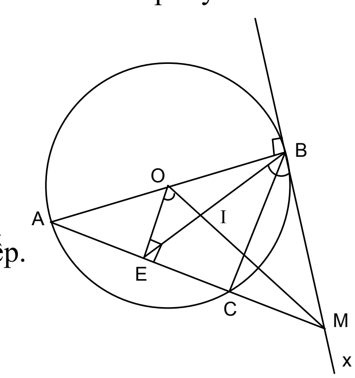
Hướng dẫn giải

Xét hai tam giác MAB, MCD

Có $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$ và $MA.MD = MB.MC \Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MC}{MD}$ hay $\Delta MAB \sim \Delta MCD$ hay $\widehat{MCD} = \widehat{MAB} \Rightarrow \widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^o$ hay tứ giác $ABCD$ nội tiếp được.

Câu 13: Cho đường tròn $(O;R)$,đường kính AB. Dây $BC = R$. Từ B kẻ tiếp tuyến Bx với đường tròn. Tia AC cắt Bx tại M. Gọi E là trung điểm của AC.

Chứng minh tứ giác $OBME$ nội tiếp đường tròn.



Hướng dẫn giải

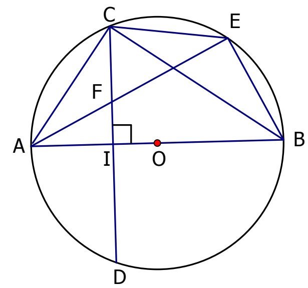
Ta có E là trung điểm của $AC \Rightarrow OE \perp AC$

Mà $Bx \perp AB \Rightarrow \widehat{ABx} = 90^o$ nên tứ giác $OBME$ nội tiếp.

Mức độ 2: TH.

Câu 14: Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Vẽ dây cung CD vuông góc với AB tại I (I nằm giữa A và O). Lấy điểm E trên cung nhỏ BC (E khác B và C), AE cắt CD tại F. Chứng minh: $BEFI$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải

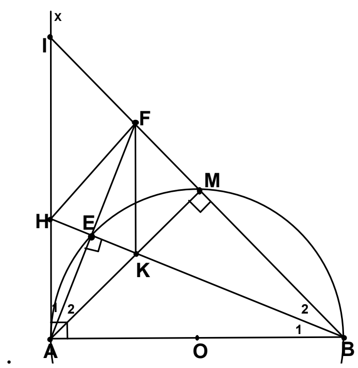


Tứ giác $BEFI$ có: $\widehat{\text{BIF}} = 90^0$ (gt) $\widehat{\text{BEF}} = \widehat{\text{BEA}} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra tứ giác $BEFI$ nội tiếp đường tròn đường kính BF.

Câu 15: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A, B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K. Chứng minh rằng: $EFMK$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải



Ta có: $\widehat{AMB} = 90^o$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{KMF} = 90^o$ (vì là hai góc kề bù).

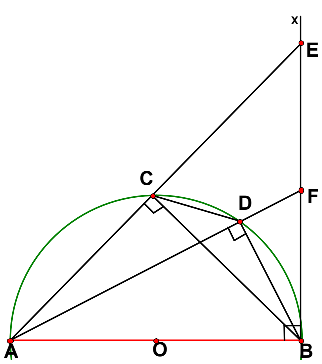
$\widehat{AEB} = 90^o$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{KEF} = 90^o$ (vì là hai góc kề bù).

$\Rightarrow \widehat{KEF} + \widehat{KMF} = 180^o$ do đó $EFMK$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 16: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB,. Kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B và E).

1. Chứng minh: $\widehat{ABD} = \widehat{DFB}$.

2. Chứng minh rằng $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.



Hướng dẫn giải:

1) ΔADB có $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ABD} + \widehat{BAD} = 90^\circ$ (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180°)(1)

ΔABF có $\widehat{ABF}=90^{\circ}$ (BF là tiếp tuyến).$\Rightarrow \widehat{AFB}+\widehat{BAF}=90^{\circ}$ (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180°) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ABD}=\widehat{DFB}$

2) Tứ giác $ACDB$ nội tiếp $(O) \Rightarrow \widehat{ABD}+\widehat{ACD}=180^{\circ}$.

$\Rightarrow \widehat{ECD}+\widehat{ACD}=180^{\circ}\angle$ (Vì là hai góc kề bù) $\Rightarrow \widehat{ECD}=\widehat{DBA}$

Theo trên $\widehat{ABD}=\widehat{DFB}, \widehat{ECD}=\widehat{DBA} \Rightarrow \widehat{ECD}=\widehat{DFB}$. Mà $\widehat{EFD}+\widehat{DFB}=180^{\circ}$ (Vì là hai góc kề bù) nên $\Rightarrow \widehat{ECD}+\widehat{AEFD}=180^{\circ}$, do đó tứ giác $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.

Mức độ 3: VDT.

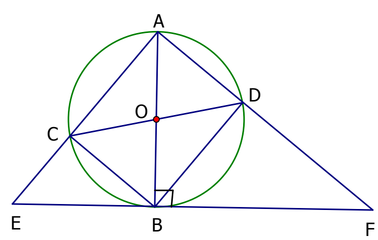
Câu 17: Cho đường tròn $(O;R)$; AB và CD là hai đường kính khác nhau của đường tròn. Tiếp tuyến tại B của đường tròn $(O;R)$ cắt các đường thẳng AC, AD thứ tự tại E và F.

a) Chứng minh tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $\Delta ACD \sim \Delta CBE$

c) Chứng minh tứ giác $CDFE$ nội tiếp được đường tròn.

Hướng dẫn giải



a) Tứ giác $ACBD$ có hai đường chéo AB và CD bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, suy ra $ACBD$ là hình chữ nhật.

b) Tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật suy ra $\widehat{\mathrm{CAD}}=\widehat{\mathrm{BCE}}=90^{0}$ (1).

Lại có $\widehat{\mathrm{CBE}}=\dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung); $\widehat{\mathrm{ACD}}=\dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ (góc nội tiếp), mà $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}=\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ (do $BC=AD$) $\Rightarrow \widehat{\mathrm{CBE}}=\widehat{\mathrm{ACD}}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta ACD \sim \Delta CBE$.

c) Vì $ACBD$ là hình chữ nhật nên CB song song với AF, suy ra: $\widehat{\mathrm{CBE}}=\widehat{\mathrm{DFE}}$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $\widehat{\mathrm{ACD}}=\widehat{\mathrm{DFE}}$ do đó tứ giác $CDFE$ nội tiếp được đường tròn.

Câu 18: Cho nửa đường tròn đường kính $BC=2R$. Từ điểm A trên nửa đường tròn vẽ $AH \perp BC$. Nửa đường tròn đường kính BH, CH lần lượt có tâm O_1; O_2 cắt AB và CA thứ tự tại D và E.

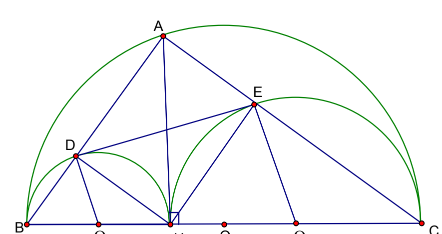
a) Chứng minh tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật, từ đó tính DE biết $R=25$ và $BH=10$.

b) Chứng minh tứ giác $BDEC$ nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\widehat{\mathrm{BAC}}=90^{\circ}$ (vì góc nội tiếpchắn nửa đường tròn)

Tương tự có $\widehat{\mathrm{BDH}}=\widehat{\mathrm{CEH}}=90^{\circ}$



Xét tứ giác $ADHE$ có $\widehat{A} = \widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 90^o$ hay $ADHE$ là hình chữ nhật.

Từ đó $DE = AH$ mà $AH^2 = BH.CH$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

hay $AH^2 = 10.40 = 20^2 \left(BH = 10; CH = 2.25 - 10 = 40\right) \Rightarrow DE = 20$

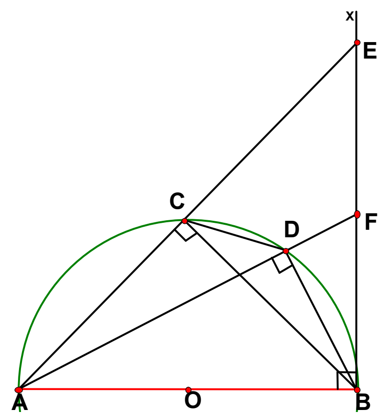
b) Ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{C}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) mà $\widehat{DAH} = \widehat{ADE}$ (1)

(Vì $ADHE$ là hình chữ nhật) => $\widehat{C} = \widehat{ADE}$ do $\widehat{C} + \widehat{BDE} = 180^o$ nên tứ giác $BDEC$ nội tiếp đường tròn.

Câu 19: Cho nửa đường tròn (O, R) đường kính AB. Các tia AC, AD cắt Bx lần lượt ở E và F (F nằm giữa B và E).

Chứng minh rằng $CEFD$ là tứ giác nội tiếp

Hướng dẫn giải



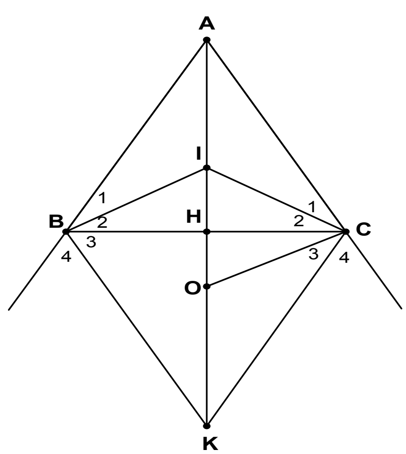
thật vậy. $\widehat{ABD} = \widehat{BFD}$ (1) (cùng phụ với $\widehat{DBF}$)

Mặt khác A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn nên $\widehat{ECD} = \widehat{ABD}$ (2)

Từ (1) và (2) $\widehat{ECD} = \widehat{BFD} \Rightarrow \widehat{ECD} + \widehat{EFD} = 180^o$ hay $CEFD$ là tứ giác nội tiếp

Mức độ 4: VDC.

Câu 20: Cho ΔABC cân tại A, I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A, O là trung điểm của IK. Chứng minh bốn điểm B, I, C, K cùng thuộc một đường tròn tâm O



Hướng dẫn giải:

Theo giả thiết ta có: $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$, $\widehat{B_3} = \widehat{B_4}$ Mà $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} + \widehat{B_3} + \widehat{B_4} = 180^0$ $\widehat{B_2} + \widehat{B_3} = 90^0$

Tương tự $\widehat{C_2}+\widehat{C_3}=90^0$

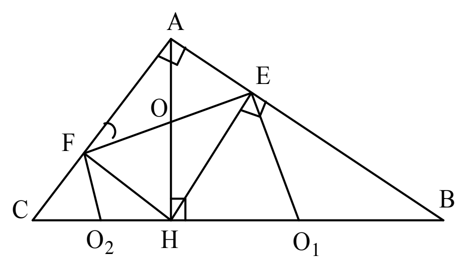
Xét tứ giác $BICK$ có $\widehat{B}+\widehat{C}=180^0 \Rightarrow$ bốn điểm B, I, C, K thuộc đường tròn tâm O đường kính IK.

Câu 21: Cho tam giác ΔABC vuông ở A $(AB > AC)$, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E, nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F. Chứng minh:

1) Tứ giác $AFHE$ là hình chữ nhật.

2) Tứ giác $BEFC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải



Từ giả thiết suy ra

$\widehat{CFH}=90^0$, $\widehat{HEB}=90^0$. (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Trong tứ giác $AFHE$ có: $\hat{A}=\hat{F}=\hat{E}=90^o \Rightarrow$ AFHE là hình chữ nhật

2) Vì $AFHE$ là hình chữ nhật $\Rightarrow$ $AFHE$ nội tiếp $\Rightarrow$ $\widehat{AFE}=\widehat{AHE}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AE}$) (1)

Ta lại có $\widehat{AHE}=\widehat{ABH}$ (góc có cạnh tương ứng $\perp$) (2)

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow \widehat{AFE}=\widehat{ABH}$ mà $\widehat{CFE}+\widehat{AFE}=180^0 \Rightarrow \widehat{CFE}+\widehat{ABH}=180^0$. Vậy tứ giác $BEFC$ nội tiếp.

Câu 22: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. C là một điểm nằm giữa O và A. Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn trên tại I. K là một điểm bất kỳ nằm trên đoạn thẳng CI (K khác C và I), tia AK cắt nửa đường tròn (O) tại M, tia BM cắt tia CI tại D

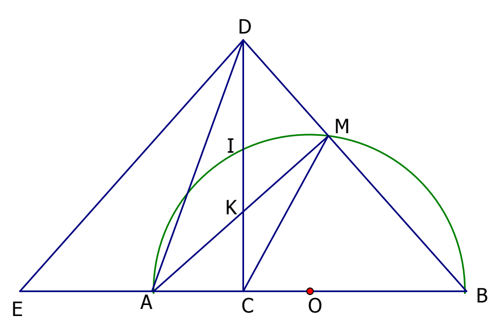
Chứng minh:

1) $ACMD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

2) $\Delta ABD \sim \Delta MBC$

3) $AKDE$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải



1) Ta có: $\widehat{AMB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{AMD}=90^0$. Tứ giác $ACMD$ có $\widehat{AMD}=\widehat{ACD}=90^0$, suy ra $ACMD$ nội tiếp đường tròn đường kính AD.

2) ΔABD và ΔMBC có: $\widehat{B}$ chung và $\widehat{BAD}=\widehat{BMC}$ (do $ACMD$ là tứ giác nội tiếp).
Suy ra: $\Delta ABD \sim \Delta MBC$ (g – g)

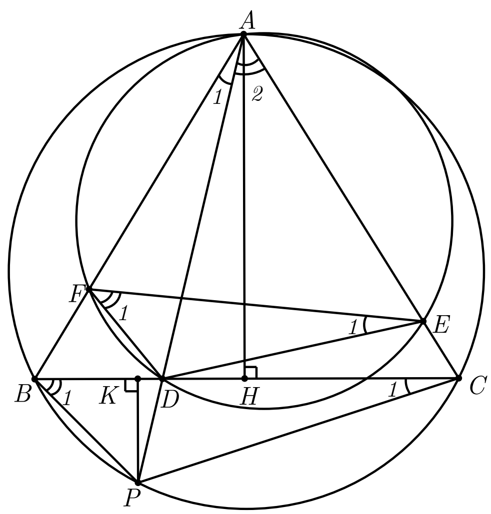
3) Lấy E đối xứng với B qua C thì E cố định và $\widehat{EDC}=\widehat{BDC}$, lại có: $\widehat{BDC}=\widehat{CAK}$ (cùng phụ với $\widehat{B}$), suy ra: $\widehat{EDC}=\widehat{CAK}$. Do đó $AKDE$ là tứ giác nội tiếp.

III. Phương pháp 3 chứng minh: **"**Chứng minh hai đỉnh cùng nhìn đoạn thẳng tạo bởi hai điểm còn lại hai góc bằng nhau".

CÁC VÍ DỤ.

Mức độ 1: NB.

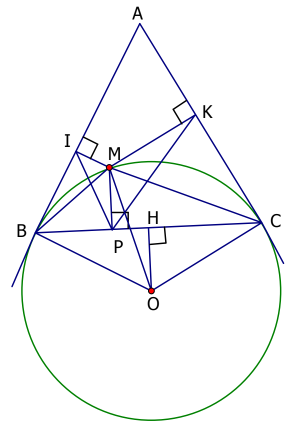
Câu 23: Cho tam giác ABC, lấy điểm D thay đổinằm trên cạnh BC $(D$ không trùng với B và $C)$. Trên tia AD lấy điểm P sao cho D nằm giữa A và P đồng thời $DA.DP = DB.DC$. Đường tròn (T) đi qua hai điểm A, D lần lượt cắt cạnh AB, AC tại F và E. Chứng minh rằng: Tứ giác $ABPC$ nội tiếp



Hướng dẫn giải:

Ta có $DA.DP = DB.DC \Rightarrow \dfrac{DA}{DB}=\dfrac{DC}{DP}$ mà $\widehat{ADB}=\widehat{CDP}$ nên hai tam giác ADB, CDP đồng dạng. Suy ra, $\widehat{DAB}=\widehat{DCP} \Rightarrow$ Tứ giác $ABPC$ nội tiếp.

Câu 24: Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ ta vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M, vẽ $MI \perp AB$, $MK \perp AC$ ($I \in AB, K \in AC$). Chứng minh: $AIMK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

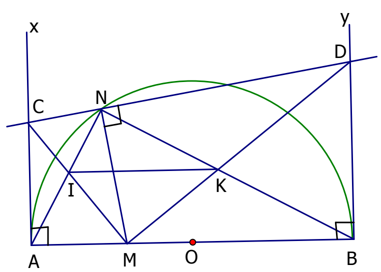


Hướng dẫn giải

Ta có: $\widehat{\mathrm{AIM}}=\widehat{\mathrm{AKM}}=90^0$ (gt), suy ra tứ giác $AIMK$ nội tiếp đường tròn đường kính AM.

Câu 25: Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng OA, điểm N thuộc nửa đường tròn (O). Từ A và B vẽ các tiếp tuyến Ax và By. Đường thẳng qua N và vuông góc với MN cắt Ax và By thứ tự tại C và D. Chứng minh $ACNM$ và $BDNM$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải:



Tứ giác $ACNM$ có: $\widehat{\mathrm{MNC}}=90^{\mathrm{o}}$ (gt) $\widehat{\mathrm{MAC}}=90^{\mathrm{o}}$ (tínhchất tiếp tuyến).

$\Rightarrow ACNM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MC. Tương tự tứ giác $BDNM$ nội tiếp đường tròn đường kính MD.

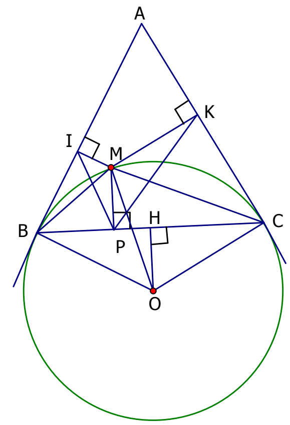
Mức độ 2: TH.

Câu 26: Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ ta vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M, vẽ $MI\perp AB$, $MK\perp AC$ ($I\in AB,K\in AC$)

a) Chứng minh: $AIMK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Vẽ $MP\perp BC$ $(P\in BC)$. Chứng minh: $\widehat{\mathrm{MPK}}=\widehat{\mathrm{MBC}}$.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $\widehat{AIM} = \widehat{AKM} = 90^0$ (gt), suy ra tứ giác $AIMK$ nội tiếp đường tròn đường kính AM.

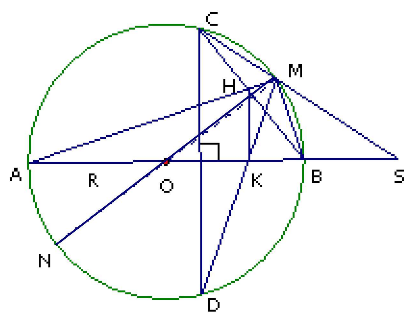
b) Tứ giác $CPMK$ có $\widehat{MPC} = \widehat{MKC} = 90^0$ (gt). Do đó $CPMK$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MPK} = \widehat{MCK}$ (1).

Vì KC là tiếp tuyến của (O) nên ta có: $\widehat{MCK} = \widehat{MBC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{MC}$) (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MPK} = \widehat{MBC}$ (3)

Chứng minh tương tự câu b ta có $BPMI$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 27: Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB. Vẽ dây cung CD vuông góc với AB (CD không đi qua tâm O). Trên tia đối của tia BA lấy điểm S; SC cắt $(O;R)$ tại điểm thứ hai là M. Gọi H là giao điểm của MA và BC; K là giao điểm của MD và AB. Chứng minh $BMHK$ là tứ giác nội tiếp.



Hướng dẫn giải:

Vì $AB \perp CD$ nên $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$.

Suy ra $\widehat{MHB} = \widehat{MKB}$ (vì cùng bằng $\frac{1}{2}(\text{sd}\overset{\frown}{AD} + \text{sd}\overset{\frown}{MB})$ $\Rightarrow$ tứ giác $BMHK$ nội tiếp được đường tròn.

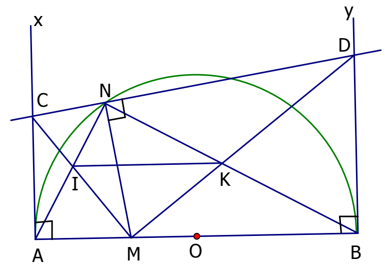
Câu 28: Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng OA, điểm N thuộc nửa đường tròn (O). Từ A và B vẽ các tiếp tuyến Ax và By. Đường thẳng qua N và vuông góc với MN cắt Ax và By thứ tự tại C và D.

a) Chứng minh $ACNM$ và $BDNM$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $\Delta ANB \sim \Delta CMD$.

c) Gọi I là giao điểm của AN và CM, K là giao điểm của BN và DM. Chứng minh $IMKN$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải:



Tứ giác $ACNM$ có: $\widehat{MNC} = 90^o$ (gt) $\widehat{MAC} = 90^o$ (tínhchất tiếp tuyến).

$\Rightarrow ACNM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MC. Tương tự tứ giác $BDNM$ nội tiếp đường tròn đường kính MD.

b) ΔANB và ΔCMD có:

$\widehat{ABN} = \widehat{CDM}$ (do tứ giác $BDNM$ nội tiếp)

$\widehat{BAN} = \widehat{DCM}$ (do tứ giác $ACNM$ nội tiếp) $\Rightarrow \Delta ANB \sim \Delta CMD$ (g.g)

c) $\Delta ANB \sim \Delta CMD \Rightarrow \widehat{CMD} = \widehat{ANB} = 90^o$ (do $\widehat{ANB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

Suy ra $\widehat{IMK} = \widehat{INK} = 90^o \Rightarrow IMKN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính IK

Mức độ 3: VDT.

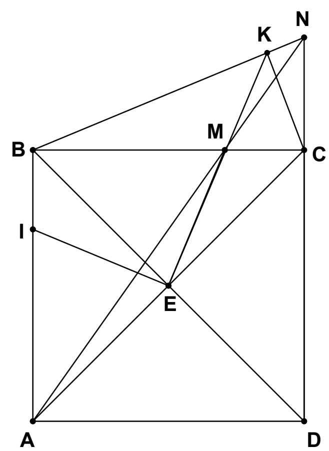
Câu 29: Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại E. Lấy I thuộc cạnh AB, M thuộc cạnh BC sao cho: $\widehat{IEM} = 90^0$ (I và M không trùng với các đỉnh của hình vuông).

a) Chứng minh rằng $BIEM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Tính số đo của góc $\widehat{IME}$

c) Gọi N là giao điểm của tia AM và tia DC; K là giao điểm của BN và tia EM. Chứng min $BKCE$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải



a)Tứ giác $BIEM$: $\widehat{IBM} = \widehat{IEM} = 90^0$ (gt);hay tứ giác $BIEM$ nội tiếp đường tròn đường kính IM.

b) Tứ giác $BIEM$ nội tiếp suy ra: $\widehat{IME} = \widehat{IBE} = 45^0$ (do $ABCD$ là hình vuông).

c) ΔEBI và ΔECM có $BE = CE$, $\widehat{BEI} = \widehat{CEM}$ (do $\widehat{IEM} = \widehat{BEC} = 90^0$)

$\Rightarrow$ $\Delta EBI = \Delta ECM$ (g-c-g) $\Rightarrow MC = IB \Rightarrow MB = IA$

Vì $CN // BA$ nên theo định lí Thalet, ta có: $\frac{MA}{MN} = \frac{MB}{MC} = \frac{IA}{IB}$. Suy ra $IM // BN$ (định lí Thalet đảo)

$\Rightarrow \widehat{BKE} = \widehat{IME} = 45^0$ (2). Lại có $\widehat{BCE} = 45^0$ (do $ABCD$ là hình vuông).

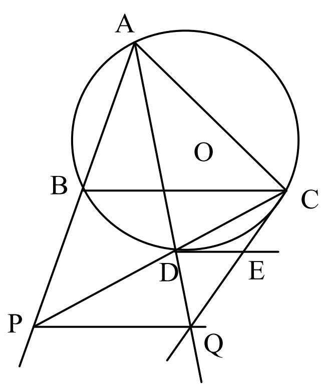
Suy ra $\widehat{BKE} = \widehat{BCE} \Rightarrow BKCE$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 30: Cho đường tròn (O) với dây BC cố định và một điểm A thay đổi trên cung lớn BC sao cho $AC > AB$ và $AC > BC$. Gọi D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Các tiếp tuyến của (O) tại D và C cắt nhau tại E. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AB với CD; AD với CE.

1) Chứng minh rằng: $DE // BC$

2) Chứng minh tứ giác $PACQ$ nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải



1) $\widehat{CDE} = \frac{1}{2} Sđ\,\overset{\frown}{DC} = \frac{1}{2} Sđ\,\overset{\frown}{BD} = \widehat{BCD}$ $\Rightarrow DE // BC$

2) $\widehat{APC} = \frac{1}{2} sđ(\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{DC}) = \widehat{AQC}$

$\Rightarrow$ $PACQ$ nội tiếp đường tròn (vì $\widehat{APC} = \widehat{AQC}$)

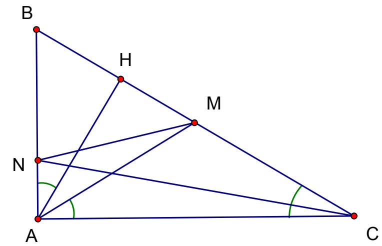
.

Câu 31: Cho tam giác ABC có $\hat{C} < \hat{B} < 90^0$, đường cao AH và trung tuyến AM.

a) Chứng minh rằng nếu $\widehat{BAC} = 90^0$ thì $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$.

b) Nếu $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$ thì tam giác ABC có vuông không, tại sao?

Hướng dẫn giải



Ta có: $\widehat{BAH}=\widehat{BCA}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$)

$\widehat{MCA}=\widehat{MAC}$ (Tam giác MAC cân tại M theo tính chất trung tuyến trong tam giác vuông)

Suy ra $\widehat{BAH}=\widehat{MAC}$

b) Giả sử tam giác ABC không phải là tam giác vuông.

Kẻ đường cao CN của tam giác ABC

Ta có $\widehat{MAC}=\widehat{BAH}$ (giả thiết)

$\widehat{BAH}=\widehat{BCN}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$)

$\widehat{MCN}=\widehat{MNC}$ (Tam giác MNC cân tại N)

Suy ra $\widehat{MAC}=\widehat{MNC}$. Do đó $ACMN$ là tứ giác nội tiếp mà

$\widehat{ANC}=90^0 \Rightarrow \widehat{AMC}=90^0 \Rightarrow H\equiv M$

Suy ra tam giác ABC cân (mâu thuẫn giả thiết)

Vậy khi $\widehat{BAH}=\widehat{MAC}$ thì tam giác ABC là tam giác vuông

Mức độ 4: VDC.

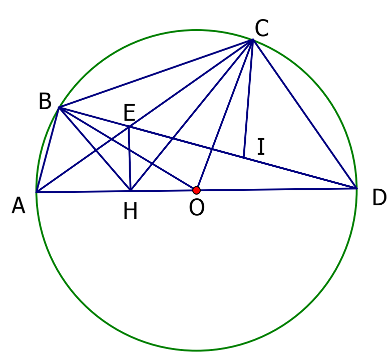
Câu 32: Cho tứ giác $ABCD$ có hai đỉnh B và C ở trên nửa đường tròn đường kính AD, tâm O. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Gọi H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD và I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng:

1) Các tứ giác $ABEH$, $DCEH$ nội tiếp được đường tròn.

2) E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCH.

3) Năm điểm $B,\ C,\ I,\ O,\ H$ cùng thuộc một đường tròn.

Hướng dẫn giải



1) Tứ giác $ABEH$ có: $\widehat{B}=90^o$ (góc nội tiếp trong nửa đường tròn); $\widehat{H}=90^o$ (giả thiết)
nên tứ giác $ABEH$ nội tiếp được.

Tương tự, tứ giác $DCEH$ có $\widehat{C} = \widehat{H} = 90^o$, nên nội tiếp được.

2) Trong tứ giác nội tiếp $ABEH$, ta có: $\widehat{EBH} = \widehat{EAH}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{EH}$)

Trong (O) ta có: $\widehat{EAH} = \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{CD}$).

Suy ra: $\widehat{EBH} = \widehat{EBC}$, nên BE là tia phân giác của góc $\widehat{HBC}$.

Tương tự, ta có: $\widehat{ECH} = \widehat{BDA} = \widehat{BCE}$, nên CE là tia phân giác của góc $\widehat{BCH}$.
Vậy E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCH.

3) Ta có I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ECD, nên $\widehat{BIC} = 2\widehat{EDC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\overset{\frown}{EC}$). Mà $\widehat{EDC} = \widehat{EHC}$, suy ra $\widehat{BIC} = \widehat{BHC}$.

+ Trong (O), $\widehat{BOC} = 2\widehat{BDC} = \widehat{BHC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\overset{\frown}{BC}$).

Hay năm điểm B, C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn.

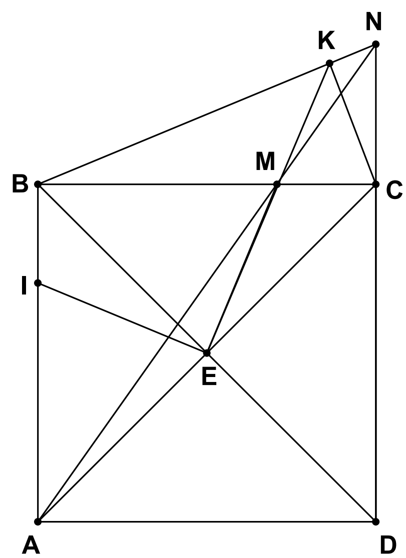
Câu 33: Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại E. Lấy I thuộc cạnh AB, M thuộc cạnh BC sao cho: $\widehat{IEM} = 90^0$ (I và M không trùng với các đỉnh của hình vuông).

a) Chứng minh rằng $BIEM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Tính số đo của góc $\widehat{IME}$

c) Gọi N là giao điểm của tia AM và tia DC; K là giao điểm của BN và tia EM. Chứng minh $BKCE$ là tứ giác nội tiếp, từ đó suy ra : $CK \perp BN$.

Hướng dẫn giải



a) Tứ giác $BIEM$ có: $\widehat{IBM} = \widehat{IEM} = 90^0$ (gt); suy ra tứ giác $BIEM$ nội tiếp đường tròn đường kính IM.

b) Tứ giác $BIEM$ nội tiếp suy ra: $\widehat{IME} = \widehat{IBE} = 45^0$ (do $ABCD$ là hình vuông).

c) ΔEBI và ΔECM có: $\widehat{IBE} = \widehat{MCE} = 45^0$, $BE = CE$, $\widehat{BEI} = \widehat{CEM}$ (do $\widehat{IEM} = \widehat{BEC} = 90^0$)

$\Rightarrow \Delta EBI = \Delta ECM\left(g.c.g\right) \Rightarrow MC = IB \Rightarrow MB = IA$. Vì $CN//BA$ nên theo định lí Thalet, ta có:

$\frac{\text{MA}}{\text{MN}} = \frac{\text{MB}}{\text{MC}} = \frac{\text{IA}}{\text{IB}}$. Suy ra $MI//BN$ (định lí Thalet đảo)

$\Rightarrow \widehat{\text{BKE}} = \widehat{\text{IME}} = 45^0$ (2). Lại có $\widehat{\text{BCE}} = 45^0$ (do $ABCD$ là hình vuông).

Suy ra $\widehat{\text{BKE}} = \widehat{\text{BCE}} \Rightarrow BKCE$ là tứ giác nội tiếp.

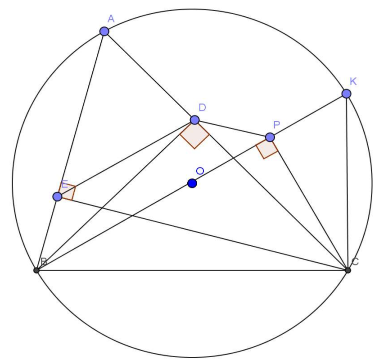
Suy ra: $\widehat{\text{BKC}} + \widehat{\text{BEC}} = 180^0$ mà $\widehat{\text{BEC}} = 90^0$; suy ra $\widehat{\text{BKC}} = 90^0$; hay $\text{CK} \perp \text{BN}$.

Câu 34: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp $\left(O\right)$, đường cao BD, CE cắt nhau tại H $\left(D \in AC; E \in AB\right)$. Kẽ đường kính BK, Kẽ $CP \perp BK$ $\left(P \in BK\right)$

a) Chứng minh rằng $BECD$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh rằng $EDPC$ là tứ giác nội tiếp, từ đó suy ra $ED = CP$

(trích HK2-Sở bắc ninh 2016-2017)



Hướng dẫn giải

Do E, D, P nhìn BC dưới một góc vuông nên B, E, D, P, C nằm trên một đường tròn đường kính BC.

Nên $BECD$, $EDPC$ là tứ giác nội tiếp.