TỔNG HỢP CÁC CÂU HỎI NÂNG CAO CHO ĐỀ THI TOÁN VÀO 10 KHÔNG CHUYÊN

Câu 1. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{6-8x}{x^2+1}$$

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$A = \frac{6-8x}{x^2+1} <=> Ax^2 + 8x + A - 6 = 0 \qquad (1)$$

Để tồn tại giá trị lớn nhất và giá tị nhỏ nhất A thì (1) phải có nghiệm. Do đó:

$$\Delta' = 16 - A(A-6) \geq 0 => -2 \leq A \leq 8$$

MaxA = 8 $<=> x = \frac{-1}{2}$

MinA = -2 $<=> x = 2$

Câu 2. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)\ \forall a, b \geq 0$

Áp dụng kết quả trên, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3+b^3+1} + \frac{1}{b^3+c^3+1} + \frac{1}{c^3+a^3+1} \leq 1$$

Với điều kiện: $\forall a, b \geq 0, abc = 1$

Hướng dẫn giải:

* Chứng minh: $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)\ \forall a, b \geq 0$

Ta có:

$$a^3 + b^3 - ab(a+b) = (a+b)(a-b)^2 \geq 0 => a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \qquad \forall a, b \geq 0$$

Áp dụng ta có:

$$a^3 + b^3 + 1 \geq ab(a+b) + 1\frac{a+b}{c} + 1 = \frac{a+b+c}{c}$$

$$\frac{1}{a^3+b^3+1} \leq \frac{c}{a+b+c}$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$\frac{1}{a^3+b^3+1} + \frac{1}{b^3+c^3+1} + \frac{1}{c^3+a^3+1} \leq \frac{c}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{a}{a+b+c} = 1$$

Câu 3.

a) Cho a, b là các số dương. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$

b) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{2x+3y+3z}$

Hướng dẫn giải:

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số a, b dương, ta có:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}; \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$$

$$=> (a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geq 4 <=> \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} <=> \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$$

Dấu bằng xảy ra khi: $a = b$

b) Theo câu a), ta có:

$$\frac{1}{3x+3y+2z} = \frac{1}{[(x+z)+(y+z)]+2(x+y)} \leq \frac{1}{4}(\frac{1}{(x+z)+(y+z)}+\frac{1}{2(x+y)})$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{(x+z)+(y+z)}+\frac{1}{8(x+y)} \leq \frac{1}{16}(\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z})+\frac{1}{8(x+y)}$$

Hoàn toàn tương tự, ta có:

$$\frac{1}{3x+2y+3z} \leq \frac{1}{16}(\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z})+\frac{1}{8(x+z)}$$

$$\frac{1}{2x+3y+3z} \leq \frac{1}{16}(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z})+\frac{1}{8(y+z)}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức, ta được:

$$P = \frac{1}{3x+3y+2z}+\frac{1}{3x+2y+3z}+\frac{1}{2x+3y+3z} \leq 2.\frac{1}{16}/.(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z})+\frac{1}{8}(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}) = \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi: $x = y = z = \frac{1}{4}$

Vậy GTLN của biểu thức P là $\frac{3}{2}$ khi $x = y = z = \frac{1}{4}$

Câu 4. Cho x, y, z là ba số nguyên dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x+\sqrt{3x+yz}}+\frac{y}{y+\sqrt{3y+zx}}+\frac{z}{z+\sqrt{3z+xy}} \leq 1$$

Hướng dẫn giải:

Từ $(x-\sqrt{yz})^2 \geq 0 <=> x^2+yz \geq 2x\sqrt{yz}(*)$

Dấu bằng xảy ra khi $x^2 = yz$

Ta có: $3x+yz = (x+y+z)x+yz = x^2+yz+x(y+z) \geq x(y+z)2x\sqrt{yz}$

Suy ra $\sqrt{3x+yz} \geq \sqrt{x(y+z)+2x\sqrt{yz}} = \sqrt{x}(\sqrt{y}+\sqrt{z})$ (Áp dụng (*))

$$x+\sqrt{3x+yz} \geq \sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}) => \frac{x}{x+\sqrt{3x+yz}} \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} \qquad (1)$$

Tương tự ta có: $\frac{y}{y+\sqrt{3y+zx}} \leq \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$ (2), $\frac{z}{z+\sqrt{3z+xy}} \leq \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có: $\frac{x}{x+\sqrt{3x+yz}}+\frac{y}{y+\sqrt{3y+zx}}+\frac{z}{z+\sqrt{3z+xy}} \leq 1$

Dấu bằng xảy ra khi: $x = y = z$

Câu 5. Với $x > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = 4x^2 - 3x + \frac{1}{4x} + 2011$

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$M = 4x^2 - 3x + \frac{1}{4x} + 2011 = 4x^2 - 4x + 1 + x + \frac{1}{4x} + 2010 = (2x-1)^2 + (x + \frac{1}{4}) + 2010 \geq 0 + 2\sqrt{x\frac{1}{4}} + 2010 = 2011$$

Dấu bằng xảy ra khi: $x = \frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 2011 khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$

Câu 6. Cho a, b, c là ba số thực thỏa mãn dương thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b+ca}}.$$

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$a + b + c = 1 => c = (a+b+c)c = ac + bc + c^2 => c + ab = ac + bc + c^2 + ab = (c+a)(c+b)$$

$$=> \sqrt{\frac{ab}{c+ab}} = \sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{1}{2}(\frac{a}{c+a} + \frac{b}{c+b})$$

Tương tự ta chứng minh được:

$$\sqrt{\frac{bc}{a+bc}} = \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{1}{2}(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c})$$

$$\sqrt{\frac{ca}{b+ca}} = \sqrt{\frac{ca}{(b+c)(a+c)}} \leq \frac{1}{2}(\frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+b})$$

Cộng vế theo vế, ta suy ra được:

$$P \leq \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi: $a = b = c = \frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$ khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Câu 7. Cho $x > 0, y > 0$ và $x + y \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}$

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = (\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y) + (\frac{3}{2}x + \frac{6}{x}) + (\frac{y}{2} + \frac{8}{y}) \geq \frac{3}{2}.6 + 2\sqrt{\frac{3x}{2}\frac{6}{x}} + 2\sqrt{\frac{y}{2}\frac{8}{y}} = 9 + 6 + 4 = 19$$

Dấu bằng xảy ra khi: $x = 2; y = 4$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 19 khi và chỉ khi $x = 2; y = 4$.

Câu 8. Cho a, b, c là độ dài của ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng: $A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$

Hướng dẫn giải:

Đặt $x = b + c - a; y = c + a - b; z = a + b - c$

$$=> a = \frac{y+x}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$$

Khi đó: $A = \frac{1}{2}(\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z})$

Ta có:

$$\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}=(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})+(\frac{y}{z}+\frac{z}{y})+(\frac{x}{z}+\frac{z}{x})\geq 6$$

$$=> A\geq \frac{1}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi: $a=b=c$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 3 khi và chỉ cho $a=b=c$

Câu 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=(1+x)(1+\frac{1}{y})+(1+y)(1+\frac{1}{x})$ với $x>0, y>0$ thỏa mãn $x^2+y^2=1$.

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$A=(1+x)(1+\frac{1}{y})+(1+y)(1+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{2x})+(y+\frac{1}{2y})+(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})+\frac{1}{2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})+2\geq 2\sqrt{x\frac{1}{2x}}+2\sqrt{y\frac{1}{2y}}+2\sqrt{\frac{x}{y}\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{2}{x^2+y^2}}=4+3\sqrt{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi: $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $4+3\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 10. Cho hai số dương a, b thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q=\frac{1}{a^4+b^2+2ab^2}+\frac{1}{b^4+a^2+2ba^2}$$

Hướng dẫn giải:

Với $a>0; b>0$ ta có: $a^4+b^2\geq 2a^2b <=> a^4+b^2+2ab^2\geq 2a^b+2ab^2 <=> \frac{1}{a^4+b^2+2ab^2}\leq\frac{1}{2ab(a+b)}$ (1)

Tương tự ta có: $\frac{1}{b^4+a^2+2a^2b}\leq\frac{1}{2ab(a+b)}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra: $Q\leq\frac{1}{ab(a+b)}$

Vì $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2 <=> a+b=2ab$

mà $a+b\geq 2\sqrt{ab} <=> ab\geq 1$

Do đó: $Q\leq\frac{1}{2(ab)^2}\leq\frac{1}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi: $a=b=1$

Vậy giá trị lớn nhất của Q là $\frac{1}{2}$ khi và chỉ khi$a=b=1$

Câu 11. Cho các số thực $a; b; c$ khác 0 thỏa mãn: $a+b+c=abc$ và $a^2=bc$. Chứng minh rằng: $a^2\geq 3$

Hướng dẫn giải:

Từ giả thiết $a+b+c=abc$ và $a^2=bc => b+c=a^3-a$

Do đó: b và c là nghiệm của phương trình sau

$$x^2-(a^3-a)x+a^2=0$$

$$\Delta=(a^2-a)^2-4a^2=a^2(a^2+1)(a^2-3)$$

Mà phương trình có nghiệm nên $\Delta\geq 0$

Do đó: $a^2-3\geq 0 <=> a^2\geq 3$

Câu 12. Cho x, y là các số không âm thỏa mãn $\sqrt{x}+\sqrt{y}\geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{2x+8\sqrt{x}+17}{\sqrt{x}+2}+\frac{3y+6\sqrt{y}+5}{\sqrt{y}+1}$$

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$P = \frac{2x+8\sqrt{x}+17}{\sqrt{x}+2} + \frac{3y+6\sqrt{y}+5}{\sqrt{y}+1} = \frac{2(\sqrt{x}+2)^2+9}{\sqrt{x}+2} + \frac{3(\sqrt{y}+1)^2+2}{\sqrt{y}+1}$$

Đặt $a = \sqrt{x}+2; b = \sqrt{y}+1$ $(a \geq 2; b \geq 1$

Khi đó: $P = \frac{2a^2+9}{a} + \frac{3b^2+2}{b} = (a+b) + (a+\frac{9}{a}) + (2b+\frac{2}{b} \geq (a+b) + 2\sqrt{a\frac{9}{a}} + 2\sqrt{2b\frac{2}{b}} = 4+6+4 = 14$

Dấu bằng xảy ra khi: $x = 1; y = 0$

Vậy giá tị nhỏ nhất của P là 14 khi và chỉ khi $x = 1; y = 0$

Câu 13. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y \leq z$. Chứng minh rằng:

$$(x^2+y^2+z^2)(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}) \geq \frac{27}{2}$$

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$VT = (x^2+y^2+z^2)(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}) = 3 + (\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^x}{x^2}) + (\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{16x^2}) + (\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{16y^2}) + \frac{15z^2}{16}(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2})$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y^2}\frac{y^x}{x^2}} + 2\sqrt{\frac{x^2}{z^2}\frac{z^2}{16x^2}} + 2\sqrt{\frac{y^2}{z^2}\frac{z^2}{16y^2}} + \frac{15}{2}(\frac{z}{x+y})^2 \geq 5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{15}{2} = \frac{27}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi: $x = y = \frac{z}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $\frac{27}{2}$ khi và chỉ khi$x = y = \frac{z}{2}$

Câu 14. Cho a, b, c là các số dương có tích bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+1)} + \frac{1}{c^2(a+b)}$$

.

Hướng dẫn giải:

Ta có bổ đề sau:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$$

(bổ đề trên dễ dàng chứng minh được bằng phương pháp biến đổi tương đương)

Ta có:

$$Q = \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+1)} + \frac{1}{c^2(a+b)}$$

$$=> Q = \frac{b^2c^2}{a(b+c)} + \frac{a^2c^2}{b(c+a)} + \frac{a^2b^2}{c(a+b)} \geq \frac{(bc+ca+ab)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{bc+ca+ab}{2} \geq \frac{1}{2}.3\sqrt[3]{(abc)^2} = \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi: $a = b = c = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{3}{2}$ khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Câu 15. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2a+4b+6c+\frac{4}{a}+\frac{12}{b}+\frac{20}{c}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$P = 2a+4b+6c+\frac{4}{a}+\frac{12}{b}+\frac{20}{c} = (a+b+c)+(a+\frac{4}{a})+(3b+\frac{12}{b})+(5c+\frac{20}{c}) \geq 2\sqrt{a\frac{4}{a}}+2\sqrt{3b\frac{12}{b}}+2\sqrt{5c\frac{20}{c}} \geq 6+4+12+20 = 42$$

Dấu bằng xảy ra khi: $a = b = c = 2$

Vậy giá tị nhỏ nhất của A là 42 khi và chỉ khi $a = b = c = 2$

Câu 16. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Áp dụng BĐT Cô-si cho các số thực dương, ta có:

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\geq a$$

$$\frac{b^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\geq b$$

$$\frac{c^2}{c+a}+\frac{c+a}{4}\geq c$$

Suy ra: $\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq (a+b+c)-(\frac{a+b}{4}+\frac{b+c}{4}+\frac{c+a}{4})=\frac{a+b+c}{2}=\frac{1}{2}$

Vậy $\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq\frac{1}{2}$

Câu 17. Cho hai số dương a,b có tổng bằng 2. Tìm giá tị nhỏ nhất của biểu thức: $S=(1-\frac{4}{a^2})(1-\frac{4}{b^2})$

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$S=(1-\frac{4}{a^2})(1-\frac{4}{b^2})=(1-\frac{2}{a})(1-\frac{2}{b})(1+\frac{2}{a})(1+\frac{2}{b})=1+\frac{8}{ab}$$

Mà ta lại có: $ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}=1$

Do đó: $A\geq 9$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $a=b=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 9 khi và chỉ khi $a=b=1$

Câu 18. Cho x,y,z thỏa mãn $0<x,y,z\leq 1$ và $x+y+z=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=\frac{(x-1)^2}{z}+\frac{(y-1)^2}{x}+\frac{(z-1)^2}{y}$$

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$\frac{(x-1)^2}{y}+\frac{y}{4}\geq 1-x$$

$$\frac{(y-1)^2}{z}+\frac{z}{4}\geq 1-y$$

$$\frac{(z-1)^2}{x}+\frac{x}{4}\geq 1-z$$

Do đó:

$$A=\frac{(x-1)^2}{z}+\frac{(y-1)^2}{x}+\frac{(z-1)^2}{y}\geq 3-\frac{5}{4}(x+y+z)=3-\frac{5}{4}.2=\frac{1}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $x=y=z=\frac{2}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{2}{3}$

Câu 19. Cho $x;y$ là hai số thực dương thỏa mãn $x+y\leq\frac{4}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$A=x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=x+y+\frac{4}{x+y}=(x+y+\frac{16}{9(x+y)})+\frac{20}{9(x+y)}\geq 2\sqrt{(x+y)\frac{16}{9(x+y)}}+\frac{20}{9\frac{4}{3}}=\frac{13}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $x=y=\frac{2}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{13}{3}$ khi và chỉ khi $x = y = \frac{2}{3}$

Câu 20. Cho a, b, c là các số lớn hơn 1. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{a-1} \geq 12$$

Hướng dẫn giải:

Với a, b, c là các số lớn hơn 1, áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\frac{a^2}{b-1} + 4(b-1) \geq 4a$$
$$\frac{b^2}{c-1} + 4(c-1) \geq 4b$$
$$\frac{c^2}{a-1} + 4(a-1) \geq 4c$$

Do đó: $A = \frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{a-1} \geq 12$