

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1: (1,5 điểm)

- 1) Giải phương trình: $2x^2 + 5x - 3 = 0$.
- 2) Cho hàm số $y = (m-1)x + 2021$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- 3) Cho $a = 1 + \sqrt{2}$ và $b = 1 - \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức: $P = a + b - 2ab$

Câu 2: (2,0 điểm) Cho biểu thức:

$$P = \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} \text{ với } x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$$

- 1) Rút gọn P .
- 2) Tìm các giá trị của x để $P > 1$.

Câu 3: (2,0 điểm)

- 1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm $A(1; -2)$ và song song với đường thẳng $y = 2x - 1$.
- 2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-1)x - m + 3$. Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) . Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = x_1^2 + x_2^2$.

Câu 4: (3,5 điểm)

Trên nửa đường tròn (O) đường kính AB với $AB = 2022$, lấy điểm C (C khác A và B), từ C kẻ CH vuông góc với AB ($H \in AB$). Gọi D là điểm bất kì trên đoạn CH (D khác C và H), đường thẳng AD cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai là E .

- 1) Chứng minh tứ giác $BHDE$ là tứ giác nội tiếp.
- 2) Chứng minh $AD \cdot EC = CD \cdot AC$.
- 3) Chứng minh $AD \cdot AE + BH \cdot BA = 2022^2$.
- 4) Khi điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A, B và điểm chính giữa cung AB), xác định vị trí điểm C sao cho chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5: (1,0 điểm) Cho $a \geq 1348, b \geq 1348$. Chứng minh rằng : $a^2 + b^2 + ab \geq 2022(a + b)$

----- Hết -----

SƠ LƯỢC BÀI GIẢI

Câu 1: (1,5 điểm)

$$1) 2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{1}{2}; -3 \right\}$

$$2) \text{ Hàm số } y = (m - 1)x + 2021 \text{ đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$$

$$3) P = a + b - 2ab = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) - 2(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 2 - 2 \cdot (-1) = 4$$

Câu 2: (2,0 điểm) Cho biểu thức:

1) Rút gọn P .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} = \frac{2\sqrt{x} - 9}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} \\ &= \frac{2\sqrt{x} - 9 - (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3) + (2\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{2\sqrt{x} - 9 - x + 9 + 2x - 3\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} \\ &= \frac{x - \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Ta có } P > 1 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3} > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x} - 3} > 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > 9 \text{ (TMĐK)} \end{aligned}$$

Câu 3: (2,0 điểm)

1) Phương trình đường thẳng (Δ) có dạng $y = ax + b$

Vì đường thẳng (Δ) song song với đường thẳng $y = 2x - 1 \Rightarrow a = 2, b \neq -1$

Vì đường thẳng (Δ) đi qua điểm $A(1; -2) \Rightarrow 2 \cdot 1 + b = -2 \Leftrightarrow b = -4$ (TMĐK $b \neq -1$)

Vậy phương trình đường thẳng $(\Delta): y = 2x - 4$.

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$x^2 = 2(m - 1)x - m + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0 (*)$$

(d) cắt $(P) \Leftrightarrow (*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow [-(m - 1)]^2 - (m - 3) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq 0 \text{ (đúng với mọi } m)$$

$$\text{Theo Viét, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m - 1) \\ x_1 x_2 = m - 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } M &= x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = [2(m - 1)]^2 - 2(m - 3) = 4m^2 - 10m + 10 = \\ &= \left(2m - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \geq \frac{15}{4}. \text{ Dấu “=” xảy ra khi } 2m - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Vậy $\text{Min}(M) = \frac{15}{4}$ khi $m = \frac{5}{4}$.

Câu 4: (3,5 điểm)

1) Chứng minh tứ giác BHDE là tứ giác nội tiếp.

Xét tứ giác BHDE, ta có:

$$\widehat{BHD} = 90^\circ \quad (CH \perp AB)$$

$$\widehat{BED} = 90^\circ \quad (\text{góc nội tiếp chắn nửa đường tròn } (O))$$

Vậy tứ giác BHDE là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $AD \cdot EC = CD \cdot AC$.

Ta có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ $\widehat{BAC}$)

mà $\widehat{AEC} = \widehat{ABC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AC}$), nên $\widehat{ACD} = \widehat{AEC}$

Xét $\triangle ACD$ và $\triangle AEC$, ta có: $\widehat{CAD}$ (góc chung), $\widehat{ACD} = \widehat{AEC}$ (cmt)

$$\text{Vậy } \triangle ACD \sim \triangle AEC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{CD}{EC} \Rightarrow AD \cdot EC = CD \cdot AC \text{ (đpcm)}$$

3) Chứng minh $AD \cdot AE + BH \cdot BA = 2022^2$.

Xét $\triangle AHD$ và $\triangle AEB$, ta có: $\widehat{DAH}$ (góc chung), $\widehat{AHD} = \widehat{AEB} = 90^\circ$ (gt và cmt)

$$\text{Vậy } \triangle AHD \sim \triangle AEB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AH}{AE} \Rightarrow AD \cdot AE = AB \cdot AH$$

$$\text{Do đó } AD \cdot AE + BH \cdot BA = AH \cdot AB + BH \cdot BA = AB \cdot (AH + HB) = AB \cdot AB = AB^2 = 2022^2$$

4) Xác định vị trí điểm C sao cho chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất.

Đặt $OH = a, CH = b$.

$$\triangle COH : \widehat{CHO} = 90^\circ, \text{ nên } OH^2 + CH^2 = OC^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \left(\frac{2022}{2}\right)^2 = 1011^2$$

Áp dụng bất đẳng thức $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, ta có:

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) = 2 \cdot 1011^2 \Leftrightarrow a+b \leq 1011\sqrt{2}$$

Do đó chu vi tam giác COH:

$$OH + CH + OC = a + b + \frac{2022}{2} \leq 1011\sqrt{2} + 1011 = 1011(\sqrt{2} + 1)$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b \Leftrightarrow \triangle COH$ vuông cân tại H $\Leftrightarrow \widehat{AOC} = 45^\circ \Leftrightarrow \text{sđ } \widehat{AC} = 45^\circ$

Vậy khi C nằm trên nửa đường tròn sao cho $\text{sđ } \widehat{AC} = 45^\circ$ thì chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất là $1011(\sqrt{2} + 1)$ (đv chu vi)

Câu 5: (1,0 điểm) Cho $a \geq 1348, b \geq 1348$. Chứng minh rằng : $a^2 + b^2 + ab \geq 2022(a+b)$

$$\text{Ta có: } a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 + ab \geq 3ab = \frac{3}{2}ab + \frac{3}{2}ab$$

$$\text{Lại có } a \geq 1348, b \geq 1348 \Rightarrow \frac{3}{2}ab + \frac{3}{2}ab \geq \frac{3}{2} \cdot 1348b + \frac{3}{2} \cdot 1348b = 2022(a+b)$$

$$\text{Do đó } a^2 + b^2 + ab \geq 2022(a+b). \text{ Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} a = b \\ a = 1348, b = 1348 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1348$$

