SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NGHỆ AN

Đề chính thức

(Đề gồm có 01 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN – TRƯỜNG ĐH VINH
NĂM HỌC 2021 – 2022

Môn thi: TOÁN

Thời gian: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 *(6,0 điểm).*

a) Giải phương trình $x^2+2\left(2+\sqrt{x-1}\right)=5x$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x^2+y^2=5+2xy+2x-2y\\2x^2+y^2=10+2x-3y\end{cases}$.

Câu 2 *(3,0 điểm).*

a) Tìm $x, y \in \mathbf{N}$ sao cho $x^3=1993.3^y+2021$.

b) Tìm số nguyên dương n để $\dfrac{n-23}{n+89}$ là bình phương của một số hữu tỉ dương.

Câu 3 *(2,0 điểm).*

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca\le 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}-\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2a+2b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2b+2c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2c+2a}}\right).$$

Câu 4 *(7,0 điểm).*

Cho đường tròn (O) có dây cung BC cố định và không đi qua tâm O. Gọi A là điểm di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB<AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm tam giác ABC. Tia MH cắt đường tròn (O) tại K, đường thẳng AH cắt cạnh BC tại D và đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại E (E khác A).

a) Chứng minh rằng tứ giác $BHCE$ là hình bình hành và $HA.HD=HK.HM$.

b) Tia KD cắt đường tròn (O) tại I (I khác K), đường thẳng đi qua I và vuông góc với đường thẳng BC cắt AM tại J. Chứng minh rằng các đường thẳng AK, BC và HJ cùng đi qua một điểm.

c) Một đường tròn thay đổi luôn tiếp xúc với AK tại A và cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q phân biệt. Gọi N là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng AN luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 *(2,0 điểm).*

Cho 676 số nguyên tố khác nhau. Chứng minh rằng có ít nhất hai số trong các số đã cho mà hiệu của chúng chia hết cho 2022.

Lời giải đề thi được thực hiện bởi

① Nguyễn Nhất Huy – THPT Chuyên Phan Bội Châu.

② Doãn Quang Tiến – Đại học KHTN Thành phố Hồ Chí Minh.

③ Phan Quang Đạt – Đại học Sư phạm Hà Nội.

④ Dương Quỳnh Châu – Đại học Sư phạm Hà Nội.

⑤ Nguyễn Minh Tuấn – THPT Bình Minh, Kim Sơn, Ninh Bình.

Câu 1.

a) Giải phương trình $x^2+2\left(2+\sqrt{x-1}\right)=5x$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x^2+y^2=5+2xy+2x-2y\\2x^2+y^2=10+2x-3y\end{cases}$.

Lời giải.

a) Điều kiện xác định: $x\geqslant 1$.
Đặt $\sqrt{x-1}=y$, với điều kiện $y\geqslant 0$. Ta có $x=y^2+1$, và phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}\left(y^2+1\right)^2+2(2+y)=5\left(y^2+1\right)&\Leftrightarrow\left(y^2+1\right)\left(y^2-4\right)+2(y+2)=0\\&\Leftrightarrow\left(y^2+1\right)(y-2)(y+2)+2(y+2)=0\\&\Leftrightarrow(y+2)\left[\left(y^2+1\right)(y-2)+2\right]=0\\&\Leftrightarrow(y+2)\left(y^3-2y^2+y\right)=0\\&\Leftrightarrow(y+2)y(y-1)^2=0\end{aligned}$$

Do điều kiện phép đặt là $y\geqslant 0$, ta được $y=0$ hoặc $y=1$.

- Với $y=0$, ta có phương trình
$$\sqrt{x-1}=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1.$$
- Với $y=1$, ta có phương trình
$$\sqrt{x-1}=1\Leftrightarrow x-1=1\Leftrightarrow x=2.$$

Đối chiếu với điều kiện xác định, ta kết luận tập nghiệm của phương trình là $S=\{1;2\}$.

b) Ta viết lại hệ phương trình

$$\begin{cases}3x^2+y^2-2xy-2x+2y-5=0 & (1)\\2x^2+y^2-2x+3y-10=0 & (2)\end{cases}$$

Nhân đôi hai vế phương trình (1), rồi trừ theo vế với phương trình (2), ta được

$$\begin{aligned}&2\left(3x^2+y^2-2xy-2x+2y-5\right)-\left(2x^2+y^2-2x+3y-10\right)=0\\\Leftrightarrow\ &4x^2+y^2-4xy-2x+y=0\\\Leftrightarrow\ &(2x-y)^2-(2x-y)=0\\\Leftrightarrow\ &(2x-y)(2x-y-1)=0\\\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}y=2x\\y=2x-1\end{array}\right.\end{aligned}$$

- Với $y=2x$, thế vào phương trình (2), ta được
$$\begin{aligned}2x^2+(2x)^2=10+2x-3\cdot(2x)&\Leftrightarrow 6x^2+4x-10=0\\&\Leftrightarrow 2(3x+5)(x-1)=0\\&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=1&\Rightarrow y=2\\x=-\dfrac{5}{3}&\Rightarrow y=-\dfrac{10}{3}\end{array}\right.\end{aligned}$$

- Với $y = 2x - 1$, thế vào phương trình (2), ta được

$$
\begin{aligned}
2x^2 + (2x-1)^2 = 10 + 2x - 3(2x-1) &\Leftrightarrow 2x^2 + 4x^2 - 4x + 1 = 10 + 2x - 6x + 3 \\
&\Leftrightarrow 6x^2 - 12 = 0 \\
&\Leftrightarrow 6\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow 6\left(x^2 - 2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \sqrt{2} & \Rightarrow y = 2\sqrt{2} - 1 \\ x = -\sqrt{2} & \Rightarrow y = -2\sqrt{2} - 1 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Như vậy, hệ phương trình đã cho có tất cả 4 nghiệm phân biệt, bao gồm

$$(1,2), \left(-\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}\right), \left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 1\right), \left(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2} - 1\right)$$

Bài toán được giải quyết. $\triangledown$

Câu 2.

a) Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ sao cho $x^3 = 1993 \cdot 3^y + 2021$.

b) Tìm số nguyên dương n để $\dfrac{n-23}{n+89}$ là bình phương một số hữu tỉ dương.

Lời giải.

a) Dựa vào tính chất đã biết $x^3 \equiv 0, 1, 8 \pmod 9$, ta có các đánh giá

$$1993 \cdot 3^y + 2021 \equiv 0, 1, 8 \pmod 9 \Rightarrow 4 \cdot 3^y \equiv 3, 4, 5 \pmod 9.$$

Ta xét các trường hợp kể trên.

- Với $4.3^y \equiv 3 \pmod 9$, ta được $y = 1$. Thay ngược lại, ta tìm ra $x = 20$.
- Với $4.3^y \equiv 4 \pmod 9$, ta được $y = 0$. Thay ngược lại, ta tìm ra $x = \sqrt[3]{4041}$, không là số nguyên.
- Với $4.3^y \equiv 5 \pmod 9$, ta không tìm được y nguyên dương thỏa mãn.

Như vậy, cặp số (x, y) duy nhất thỏa mãn là $(x, y) = (20, 1)$.

b) Vì $\dfrac{n-23}{n+89}$ là bình phương một số hữu tỉ dương nên $n > 23$.

Lúc này, ta có thể đặt $\dfrac{n-23}{n+89} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2$, trong đó $a, b \in \mathbb{N}^*, (a, b) = 1, a < b$.

Vì $(a, b) = 1$ nên $(a^2, b^2) = 1$. Do đó, tồn tại số nguyên dương k sao cho

$$\begin{cases} n - 23 = a^2 k, & (1) \\ n + 89 = b^2 k, & (2) \end{cases}$$

Trừ tương ứng vế của (1) cho (2), ta suy ra

$$(n + 89) - (n - 23) = (b^2 - a^2)k \Leftrightarrow 112 = (b + a)(b - a)k.$$

Dựa vào các đánh giá

- $b + a$ và $b - a$ đều là ước dương của 112,
- $b + a$ và $b - a$ cùng tính chẵn lẻ,
- $b + a > b - a > 0$,

Ta lập được bảng giá trị sau

$b+a$	$b-a$	k	b	a	$n = a^2k + 23$
28	4	1	16	12	loại vì $(a, b) > 1$
56	2	1	29	27	752
14	8	1	11	3	32
14	4	2	9	5	73
28	2	2	15	13	361
8	2	7	5	3	86
14	2	4	8	6	loại vì $(a, b) > 1$
4	2	14	3	1	37
7	1	16	4	3	167

Kết quả, có 7 giá trị của n thỏa mãn đề bài, gồm

$$n = 32, n = 37, n = 73, n = 86, n = 167, n = 361, n = 752.$$

Bài toán được giải quyết. $\triangledown$

Câu 3. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca \leqslant 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{a+c} - \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2a+2b}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2b+2c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2c+2a}}\right)$$

Lời giải. Đặt $x = \dfrac{1}{a}, y = \dfrac{1}{b}, z = \dfrac{1}{c}$, ta có $x + y + z \leqslant 3$.
Lúc này, ta cần đi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{x+y}{xy}} + \sqrt{\frac{z+y}{zy}} + \sqrt{\frac{x+z}{xz}} - \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2xy(x+y)}} + \sqrt{\frac{x^2+z^2}{2xz(x+z)}} + \sqrt{\frac{z^2+y^2}{2zy(z+y)}}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có

$$A + B \leqslant \sqrt{2\left(A^2+B^2\right)} \tag{1}$$

Trong (1), cho $A = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x+y}}, B = \sqrt{\dfrac{2xy}{x+y}}$, ta được

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x+y}} + \sqrt{\frac{2xy}{x+y}} \leqslant \sqrt{2(x+y)},$$

hay là

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2xy(x+y)}} + \frac{1}{\sqrt{x+y}} \leqslant \sqrt{\frac{x+y}{xy}}.$$

Thiết lập các bất đẳng thức tương tự rồi cộng theo vế, ta được

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2xy(x+y)}} + \sqrt{\frac{x^2+z^2}{2xz(x+z)}} + \sqrt{\frac{z^2+y^2}{2zy(z+y)}} + \sqrt{\frac{1}{x+y}} + \sqrt{\frac{1}{y+z}} + \sqrt{\frac{1}{z+x}}\\ \leqslant\ &\sqrt{\frac{x+y}{xy}} + \sqrt{\frac{y+z}{yz}} + \sqrt{\frac{z+x}{zx}}\end{aligned} \tag{2}$$

Mặt khác, ta có

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \leqslant \sqrt{6(x+y+z)} \leqslant 3\sqrt{2} \tag{3}$$

Kết hợp (3) với việc áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{y+z}} + \frac{1}{\sqrt{z+x}} \geqslant \frac{9}{\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}} \geqslant \frac{3\sqrt{2}}{2} \tag{4}$$

Kết hợp (2) và (4), ta có

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{x+y}{xy}} + \sqrt{\frac{z+y}{zy}} + \sqrt{\frac{x+z}{xz}} - \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2xy(x+y)}} + \sqrt{\frac{x^2+z^2}{2xz(x+z)}} + \sqrt{\frac{z^2+y^2}{2zy(z+y)}}\right)\\ \geqslant\ &\frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{y+z}} + \frac{1}{\sqrt{x+z}} \geqslant \frac{3\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Từ đây, ta chứng minh được $P \geqslant \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Như vậy,

$$\min\left[\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{a+c}-\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2a+2b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2b+2c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2c+2a}}\right)\right]=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Bài toán được giải quyết. ▽

Nhận xét. Bài toán gốc là bài toán của nước Belgium đề xuất trong IMO Shortlist 2009, và đã được sử dụng trong rất nhiều đề thi toán của một số tỉnh ở Việt Nam.

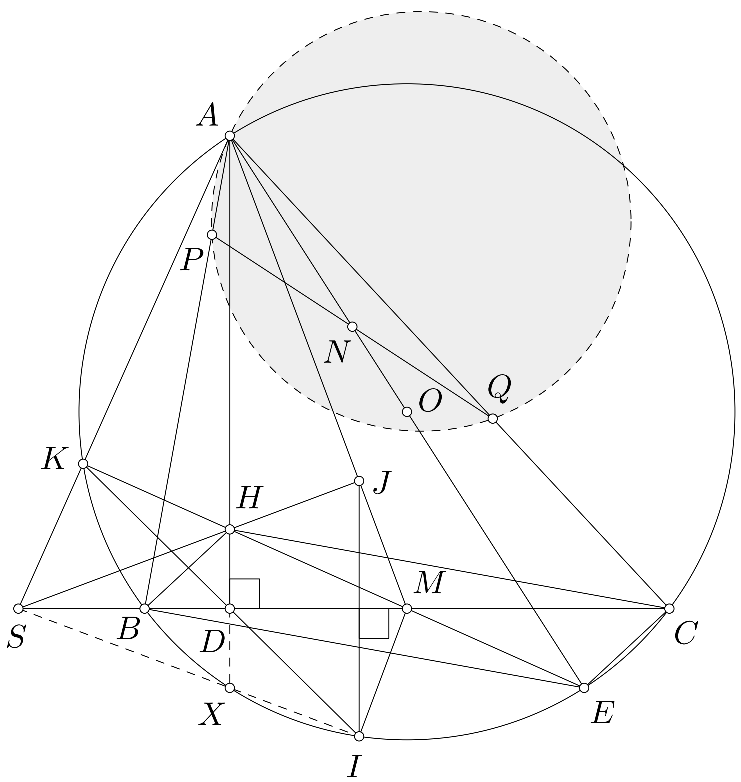
Câu 4. Cho đường tròn (O) có dây cung BC cố định và không đi qua tâm O. Gọi A là điểm di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm của tam giác ABC. Tia MH cắt đường tròn (O) tại K, đường thẳng AH cắt cạnh BC tại D và đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại E (E khác A).

a) Chứng minh rằng tứ giác $BHCE$ là hình bình hành và $HA.HD = HK.HM$.

b) Tia KD cắt đường tròn (O) tại I (I khác K), đường thẳng đi qua I và vuông góc với đường thẳng BC cắt AM tại J. Chứng minh rằng các đường thẳng AK, BC và HJ cùng đi qua một điểm.

c) Một đường tròn thay đổi luôn tiếp xúc với AK tại A và cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q phân biệt. Gọi N là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng AN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



a) Ta có AE là đường kính của (O) nên $\widehat{ABE} = \widehat{ACE} = 90^o$, suy ra $BH \parallel CE$ (cùng vuông góc AC) và $CH \parallel BE$ (cùng vuông góc AB), từ đó $BHCE$ là hình bình hành, điều này dẫn đến H, M, E thẳng hàng, do đó $\widehat{AKM} = 90^\circ$, suy ra tứ giác $AKDM$ nội tiếp. Như vậy

$$HA \cdot HD = HK \cdot HM,$$

điều phải chứng minh.

b) Gọi X là giao điểm của AD với (O). Dễ thấy H đối xứng với X qua BC, suy ra

$$\widehat{DMX} = \widehat{HMD} = \widehat{KAD} = \widehat{DIX}$$

Dẫn đến tứ giác $DMIX$ nội tiếp. Gọi S là giao điểm của IX và BC, K' là giao điểm khác A của AS với (O). Tứ giác $DMIX$ nội tiếp nên

$$SD \cdot SM = SX \cdot SI = SA \cdot SK'$$

do đó tứ giác $AK'DM$ nội tiếp, điều này dẫn đến $K \equiv K'$. Như vậy AK, BC, IX đồng quy tại S. Bây giờ ta sẽ đi chứng minh HJ đi qua S. Ta có

$$\widehat{JMB} = \widehat{SKI} = 180^\circ - \widehat{AKI} = 180^\circ - \widehat{AXI} = 180^\circ - \widehat{DXI} = \widehat{SMI}$$

Mà IJ vuông góc với BC nên I, J đối xứng với nhau qua BC. Mặt khác H và X đối xứng với nhau qua BC nên HJ đối xứng với XI qua BC. Do vậy, HJ đi qua S, điều phải chứng minh.

c) Ta có $\widehat{AQP} = \widehat{SAP} = \widehat{KCB}, \widehat{PAQ} = \widehat{BKC}$, do vậy $\Delta APQ \sim \Delta KBC$, mà M, N lần lượt là trung điểm BC, PQ nên suy ra

$$\Delta APN \sim \Delta KBM \Rightarrow \widehat{PAN} = \widehat{BKM} = \widehat{BKE} = \widehat{BAE} = \widehat{BAO}$$

Suy ra A, N, O thẳng hàng hay AN luôn đi qua điểm O cố định.

Bài toán được giải quyết. ∇

Câu 5. Cho 676 số nguyên tố khác nhau. Chứng minh rằng có ít nhất hai số trong các số đã cho mà hiệu của chúng chia hết cho 2022.

Lời giải. Ta xét 674 số trong 676 số, trong đó mỗi số trong 674 số này đều khác 2 và 3. Suy ra tất cả các số này đều lẻ và đều chia 3 dư 1 hoặc 2.
Ta chia 674 số này vào 2 tập, tập A là các số chia 3 dư 2, tập B là các số chia 3 dư 1. Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1. Nếu 1 trong 2 tập (không mất tính tổng quát, giả sử B) có nhiều hơn 337 số thì theo nguyên lí Dirichlet tồn tại 2 số có cùng số dư khi chia cho 337. Suy ra hiệu của chúng chia hết cho $2.3.337 = 2022$.

Trường hợp 2. Nếu cả 2 tập đều có số lượng phần tử là 337 thì ta xét tập A. Vì $337 \notin A$ nên các số trong tập A không chia hết cho 337. Do các số trong tập A chỉ nhận 336 số dư khi chia cho 337 nên tồn tại 2 số có cùng dư khi chia cho 337. Hiệu 2 số này chia hết cho $2.3.337 = 2022$.

Từ đây suy ra điều phải chứng minh. ▽

HẾT