SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 N NĂM 2020
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG
NĂM HỌC: 2021 - 2022
Môn thi: Toán (Chung) – Đề 1
Dành cho có các thí sinh thi vào lớp tự nhiên
Thời gian làm bài 120 phút

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $P=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{5x-1}}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=m^2x+m-1\ (m\neq 0)$ và đường thẳng $y=9x+2$ song song.

c) Tính diện tích tam giác ABC đều cạnh bằng $2\sqrt{3}$ cm.

d) Tính thể tích của hình nón có đường sinh bằng 5 cm và bán kính đáy bằng 3 cm.

Câu 2. (1,5 điểm) Cho biểu thức $Q=\left(\dfrac{x^2}{x^2-\sqrt{x^3}}+\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}\right)\left(\dfrac{x+25}{x+\sqrt{x}+1}\right)$ với $x\geq 0;\ x\neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) Tìm x để Q có đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 3. (2,5 điểm)

1. Cho phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2+3=0$ (1) với m là tham số.

a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt g $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $1<x_1<x_2$.

2. Giải phương trình: $x+1+\sqrt{2x+1}-\sqrt{x^2+8x+4}=0$.

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn $ABC\ (AB>AC)$ nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AP. Các đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BCEF$ nội tiếp và $AE\cdot AC=AF\cdot AB$.

b) Gọi $K,\ I$ lần lượt là trung điểm của EF và AH. Chứng minh IK song song với AP.

c) Gọi M là giao điểm của IK và BC, N là giao điểm của MH với cung nhỏ AC của đường tròn (O). Chứng minh $\widehat{HMC}=\widehat{HAN}$.

Câu 5. (1,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}8\sqrt{x^2y+y}=3\left(x^2-y+1\right)\\ x^2+9y^2=\dfrac{13}{9}\end{cases}$.

b) Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leq 2021$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{7x^2-2xy+4y^2}}+\frac{1}{\sqrt{7y^2-2yz+4z^2}}+\frac{1}{\sqrt{7z^2-2zx+4x^2}}\leq\frac{2021}{3}.$$

--------------------------Hết--------------------------

LỜI GIẢI ĐỀ TOÁN CHUYÊN LỚP 10/2022

THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH

THUVIENTOAN.NET

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $P=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{5x-1}}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=m^2x+m-1\ (m\neq 0)$ và đường thẳng $y=9x+2$ song song.

c) Tính diện tích tam giác ABC đều cạnh bằng $2\sqrt{3}$ cm.

d) Tính thể tích của hình nón có đường sinh bằng 5 cm và bán kính đáy bằng 3 cm.

Lời giải

a) Ta có: P xác định khi và chỉ khi $5x-1>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{5}$.

Do đó điều kiện xác định của P là $x>\dfrac{1}{5}$.

b) Hai đương thẳng song song khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2=9 \\ m-1\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-3 \end{array}\right. \\ m\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m=-3.$

Vậy $m=-3$ là giá trị cần tìm

c) Diện tích của tam giác đều ABC có cạnh $2\sqrt{3}$ cm là $S=\dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}$ cm^2.

d) Gọi h là chiều cao của hình nón ta có: $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2h=\dfrac{1}{3}\pi R^2\sqrt{l^2-R^2}=\dfrac{1}{3}\pi 3^2\sqrt{5^2-3^2}=12\pi$ cm^3.

Vậy thể tích của khối nón là 12π cm^3.

Câu 2. (1,5 điểm) Cho biểu thức $Q=\left(\dfrac{x^2}{x^2-\sqrt{x^3}}+\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}\right)\left(\dfrac{x+25}{x+\sqrt{x}+1}\right)$ với $x\geq 0$; $x\neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) Tìm x để Q đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) Với $x\geq 0$ và $x\neq 1$, ta có:

$$Q=\left(\frac{x^2}{x^2-\sqrt{x^3}}+\frac{x+1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}\right)\left(\frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1}\right)=\left[\frac{x^2}{x\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}+\frac{x+1}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right]\left(\frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{x+1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1}\right)=\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}+1\right)\cdot\frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1}$$

$$=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1}=\frac{x+25}{\sqrt{x}}.$$

Vậy $Q=\dfrac{x+25}{\sqrt{x}}$.

b) Ta có $Q=\dfrac{x+25}{\sqrt{x}}\geq\dfrac{2\sqrt{x\cdot 25}}{\sqrt{x}}=10$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=25$.

Vậy $x=25$ là giá trị cần tìm.

Câu 3. (2,5 điểm)

1. Cho phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2+3=0$ (1) với m là tham số.

a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $1<x_1<x_2$.

2. Giải phương trình: $x+1+\sqrt{2x+1}-\sqrt{x^2+8x+4}=0$.

Lời giải

1. a) Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta=(2m+1)^2-4\left(m^2+3\right)=4m-11\geq 0\Leftrightarrow m\geq\dfrac{11}{4}$.

Vậy $m\geq\dfrac{11}{4}$ là giá trị cần tìm.

b) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $1<x_1<x_2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\Delta>0\\ x_1+x_2>2\\ (x_1-1)(x_1-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ x_1+x_2>2\\ x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m-11>0\\ 2m+1>2\\ m^2+3-(2m+1)+1>0\end{cases}\Leftrightarrow m>\frac{1}{2}.$$

Vậy $m>\dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

2. Điều kiện $\begin{cases}x\geq-\dfrac{1}{2}\\ x^2+8x+4\geq 0\end{cases}$.

Vì $x\geq-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x+1>0$. Khi đó phương trình tương đương:

$$\sqrt{x^2+8x+4}=x+1+\sqrt{2x+1}$$
$$\Leftrightarrow x^2+8x+4=x^2+2x+1+2x+1+2(x+1)\sqrt{2x+1}$$
$$\Leftrightarrow 2x+1=(x+1)\sqrt{2x+1}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+1}=0\\ \sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ x=0\end{array}\right..$$

So với điều kiện ban đầu, phương trình đã cho có hai nghiệm $S=\left\{0;-\dfrac{1}{2}\right\}$.

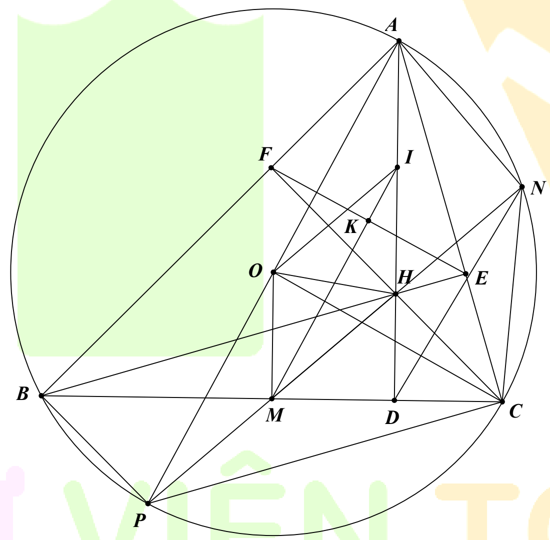
Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC $(AB>AC)$ nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AP. Các đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BCEF$ nội tiếp và $AE\cdot AC=AF\cdot AB$.

b) Gọi K, I lần lượt là trung điểm của EF và AH. Chứng minh IK song song với AP.

c) Gọi M là giao điểm của IK và BC, N là giao điểm của MH với cung nhỏ AC của đường tròn (O). Chứng minh $\widehat{HMC}=\widehat{HAN}$.

Lời giảii



a) Ta có $\widehat{BEC}=\widehat{CFB}=90^0 \Rightarrow$ tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

Mặt khác $\begin{cases}\widehat{AFE}=\widehat{ACB}\\ \widehat{AEF}=\widehat{ABC}\end{cases} \Rightarrow \Delta AEF\sim\Delta ABC \Rightarrow \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AE}{AC} \Rightarrow AE\cdot AC=AF\cdot AB.$

b) Vì I là trung điểm của $AH \Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác $AEHF$.

Mà K là trung điểm của $EF \Rightarrow IK\perp EF$.

Mặt khác $\widehat{POC}+\widehat{AEF}=90^0-\dfrac{\widehat{AOC}}{2}+\widehat{ABC}=90^0 \Rightarrow AP\perp EF$.

Từ đó suy ra $IK \parallel AP$.

c) Gọi M' là trung điểm của $BC \Rightarrow M'$ là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác $BCEF$.

Suy ra $M'K \perp EF$. Mà $IK \parallel EF \Rightarrow M'\, I,\, K$ thẳng hàng hay $M \equiv M'$.

Gọi D là giao điểm của BC và $AH \Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{ANP} = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $ANDM$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{HAN} = \widehat{HMC}$ do cùng nhìn cung nhỏ DN.

Câu 5. (1,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 8\sqrt{x^2y+y} = 3\left(x^2-y+1\right) \\ x^2+9y^2 = \dfrac{13}{9} \end{cases}$.

b) Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \le 2021$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{7x^2-2xy+4y^2}}+\frac{1}{\sqrt{7y^2-2yz+4z^2}}+\frac{1}{\sqrt{7z^2-2zx+4x^2}} \le \frac{2021}{3}.$$

Lời giải

a) Điều kiện: $y \ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$8\sqrt{\left(x^2+1\right)y} = 3\left(x^2+1\right)-3y$$
$$\Leftrightarrow 3\left(x^2+1\right)-8\sqrt{\left(x^2+1\right)y}-3y = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x^2+1}-3\sqrt{y}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 3\sqrt{y}$$
$$\Leftrightarrow 9y-1 = x^2.$$

Thay $x^2 = 9y-1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$9y-1+9y^2 = \frac{13}{9} \Leftrightarrow 81y^2+81y-22 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{9} \text{ do } y \ge 0.$$

Từ đây ta có $x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm: $(x;y) = \left(1;\dfrac{2}{9}\right);\left(-1;\dfrac{2}{9}\right)$.

b) Với $x,\ y > 0$, ta có: $7x^2-2xy+4y^2 = \left(2x+y\right)^2+3\left(x-y\right)^2 \ge \left(2x+y\right)^2$.

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{7x^2-2xy+4y^2}} \le \dfrac{1}{2x+y}$.

Viết hai bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{7x^2-2xy+4y^2}}+\frac{1}{\sqrt{7y^2-2yz+4z^2}}+\frac{1}{\sqrt{7z^2-2zx+4x^2}} \le \frac{1}{2x+y}+\frac{1}{2y+z}+\frac{1}{2z+x}.$$

Mặt khác ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z} \ge \dfrac{9}{x+x+z} = \dfrac{9}{2x+z}$.

Suy ra: $\dfrac{1}{2x+z} \le \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{z}\right)$.

Viết hai bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại ta được:

$$\frac{1}{2x+y}+\frac{1}{2y+z}+\frac{1}{2z+x} \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = \frac{2021}{3}.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ $x=y=z=\dfrac{3}{2021}$.