

I. Phần trắc nghiệm: (2,0 điểm)

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = 3x - 1$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A. -2. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng d có phương trình $y = 2 - 7x$. Hệ số góc của đường thẳng d bằng

- A. $-\frac{7}{2}$. B. 7. C. -7. D. 2.

Câu 3. Phương trình $x^2 - 7x + 10 = 0$ có một nghiệm bằng

- A. -5. B. -7. C. -2. D. 5.

Câu 4. Hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 5x + y = 9 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất là

- A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$.

Câu 5. Điều kiện của x để biểu thức $\sqrt{x-2}$ có nghĩa là

- A. $x \leq 2$. B. $x \geq -2$. C. $x \geq 2$. D. $x \neq 2$.

Câu 6. Giá trị của biểu thức $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ bằng

- A. $1+2\sqrt{2}$. B. $2+\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2}-1$. D. $1+\sqrt{2}$.

Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6cm, BC = 10cm$ và đường cao AH với $H \in BC$. Khi đó độ dài đoạn BH bằng

- A. $\frac{18}{5}cm$. B. $\frac{24}{5}cm$. C. $2cm$. D. $\frac{3}{5}cm$.

Câu 8. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) . Biết $\widehat{BAD} = 105^\circ$ và $\widehat{DBC} = 45^\circ$. Khi đó, giá trị của $\cos \widehat{BDC}$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

II. Phần tự luận: (8,0 điểm)

Câu 1 (2,0 điểm)

a) Tính giá trị của biểu thức $A = 3\sqrt{3} - 7\sqrt{27} + 2\sqrt{243}$.

b) Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{x-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{x}{\sqrt{x}+1}$ khi $x = 4$.

c) Cho biểu thức $C = \frac{-2x+13}{x-\sqrt{x}-6} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{3\sqrt{x}-2}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 9$. Tìm x để $C = 1$.

Câu 2 (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

b) Giải phương trình: $\sqrt{49(3x+2)} - \sqrt{12x+8} = \sqrt{3x+2} - 3\sqrt{9x^2+12x+4} + 7$.

Câu 3 (1,5 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng d có phương trình $y = x + \frac{1}{2}m^2 + m + 1$, với m là tham số.

a) Vẽ đồ thị (P) .

b) Tìm m để đường thẳng d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1^3 + x_2^3 = 68$.

Câu 4 (2,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . Vẽ các đường cao AH, BK và CP của tam giác ABC , với $H \in BC, K \in AC, P \in AB$.

a) Chứng minh tứ giác $BPKC$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

c) Đường thẳng PK cắt (O) tại hai điểm E và F . Chứng minh OA là tia phân giác của \widehat{EAF} .

Câu 5 (0,5 điểm)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^3 + 12x^2y = 8(x^3 + 1) + 6xy^2 \\ xy + 2y - x^2 - x + 10 = 0 \end{cases} \quad (\text{với } x, y \in \mathbb{R}).$$

-----HẾT-----

(HDC gồm có 03 trang)

Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

I. Phần trắc nghiệm (2,0 điểm)

1. B	2. C	3. D	4. A	5. C	6. D	7. A	8. C
------	------	------	------	------	------	------	------

II. Phần tự luận (8,0 điểm)

Câu 1 (2,0 điểm)

a) Tính giá trị của biểu thức $A = 3\sqrt{3} - 7\sqrt{27} + 2\sqrt{243}$.

Ta có: $A = 3\sqrt{3} - 7\sqrt{27} + 2\sqrt{243}$

$$A = 3\sqrt{3} - 21\sqrt{3} + 18\sqrt{3}$$

$$A = (3 - 21 + 18)\sqrt{3}$$

$$A = 0$$

Vậy $A = 0$.

b) Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{x-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{x}{\sqrt{x}+1}$ khi $x = 4$.

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Thay $x = 4$ (TM ĐKXĐ vào biểu thức B ta có:

$$B = \frac{4-2}{\sqrt{4}-1} + \frac{4}{\sqrt{4}+1} = \frac{2}{2-1} + \frac{4}{2+1}$$

$$= 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

c) Cho biểu thức $C = \frac{-2x+13}{x-\sqrt{x}-6} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{3\sqrt{x}-2}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 9$. Tìm x để $C = 1$.

$$C = \frac{-2x+13}{x-\sqrt{x}-6} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{3\sqrt{x}-2}{3-\sqrt{x}}$$

$$C = \frac{-2x+13}{(\sqrt{x}+2)(3-\sqrt{x})} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{3\sqrt{x}-2}{3-\sqrt{x}}$$

$$C = \frac{-2x+13 - (\sqrt{x}+1)(3-\sqrt{x}) + (3\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$C = \frac{-2x+13 - (x-2\sqrt{x}-3) + (3x+4\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$C = \frac{6(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{6}{\sqrt{x} - 3}$$

Đề C = 1 thì $\frac{6}{\sqrt{x} - 3} = 1 \Leftrightarrow 6 = \sqrt{x} - 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 9 \Leftrightarrow x = 81(TM)$

Vậy với $x = 81$ thì $C = 1$.

Câu 2 (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

Ta có $\Delta = (-5)^2 - 4.3(-2) = 49 > 0$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = 2; x_2 = \frac{-1}{3}$$

b) Giải phương trình: $\sqrt{49(3x+2)} - \sqrt{12x+8} = \sqrt{3x+2} - 3\sqrt{9x^2+12x+4} + 7$

$$ĐKXD: \begin{cases} 3x+2 \geq 0 \\ 12x+8 \geq 0 \\ 9x^2+12x+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{-2}{3} \\ (3x+2)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{-2}{3} \\ x \neq \frac{-2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{-2}{3}$$

Ta có: $\sqrt{49(3x+2)} - \sqrt{12x+8} = \sqrt{3x+2} - 3\sqrt{9x^2+12x+4} + 7$

$$\Leftrightarrow \sqrt{49(3x+2)} - 2\sqrt{3x+2} = \sqrt{3x+2} - 3\sqrt{(3x+2)^2} + 7$$

$$\Leftrightarrow 7\sqrt{3x+2} - 2\sqrt{3x+2} = \sqrt{3x+2} - 3|3x+2| + 7$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{3x+2} + 3(3x+2) - 7 = 0 \quad (\text{Do } x > \frac{-2}{3} \text{ nên } 3x+2 > 0)$$

Đặt $t = \sqrt{3x+2} (t > 0)$, phương trình trở thành $3t^2 + 4t - 7 = 0(*)$

Ta có $a + b + c = 3 + 4 + (-7) = 0$ nên pt (*) có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} t = 1(TM) \\ t = \frac{-7}{3}(KTM) \end{cases}$

Với $t = 1$, suy ra $\sqrt{3x+2} = 1 \Leftrightarrow 3x+2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{-1}{3}$.

Câu 3 (1,5 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng d có phương

trình $y = x + \frac{1}{2}m^2 + m + 1$, với m là tham số.

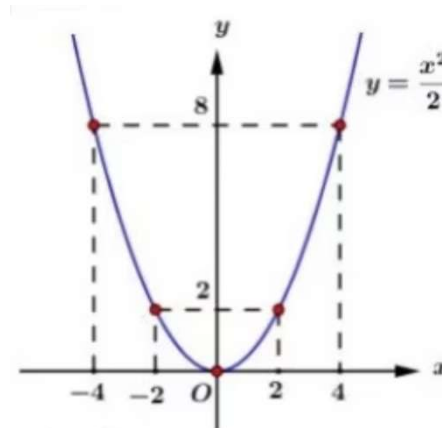
a) Vẽ đồ thị (P) .

Parabol (P) có hệ số $a = \frac{1}{2} > 0$ nên đồng biến với $x > 0$ và nghịch biến với $x < 0$. Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và nhận Oy làm trục đối xứng.

Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{1}{2}x^2$	8	2	0	2	8

Vẽ đths:



b) Tìm m để đường thẳng d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1^3 + x_2^3 = 68$.

PT hoành độ giao điểm: $\frac{1}{2}x^2 = x + \frac{1}{2}m^2 + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 - 2m - 2 = 0(*)$

Để đường thẳng d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt thì pt (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 3 > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 + 2 > 0$$

Do $(m+1)^2 \geq 0 \forall m$ nên $(m+1)^2 + 2 > 0 \forall m$, do đó pt (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi $m \Rightarrow$ đường thẳng d luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2

Khi đó áp dụng ĐL Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = -m^2 - 2m - 2 \end{cases}$$

Theo bài ra ta có: $x_1^3 + x_2^3 = 68$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 68$$

$$\Leftrightarrow 2^3 - 3(-m^2 - 2m - 2) \cdot 2 = 68$$

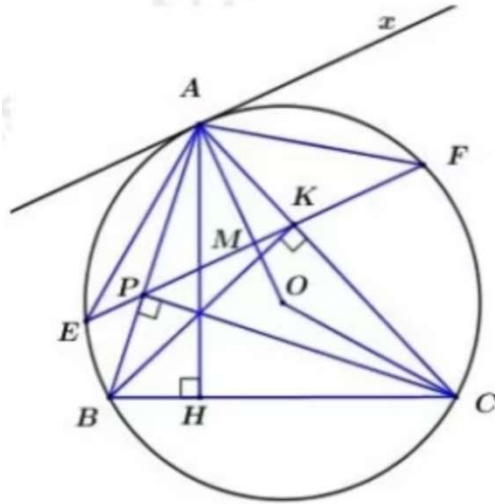
$$\Leftrightarrow 6m^2 + 12m - 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 6m - 8 = 0(**)$$

PT (**) có hai nghiệm phân biệt $m_1 = 2; m_2 = -4$.

Câu 4 (2,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . Vẽ các đường cao AH, BK và CP của tam giác ABC , với $H \in BC, K \in AC, P \in AB$.



a) Chứng minh tứ giác $BPKC$ nội tiếp.

Xét tứ giác $BPKC$ có: $\widehat{BPC} = \widehat{BKC} = 90^\circ$ nên P, K cùng thuộc đường tròn đường kính BC .
 Vậy tứ giác $BPKC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC .

b) Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

ΔABH vuông tại H nên $\widehat{BAH} + \widehat{AHB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAH} + \widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAH} = 90^\circ - \widehat{ABC}$ (1)

ΔOAC có $OA = OC$ nên ΔOAC cân tại $O \Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OCA}$

Ta có: $\widehat{OAC} + \widehat{OCA} + \widehat{AOC} = 180^\circ$

$$\Rightarrow 2\widehat{OAC} = 180^\circ - \widehat{AOC} \Rightarrow \widehat{OAC} = \frac{180^\circ - \widehat{AOC}}{2}$$

Lại có: $\Rightarrow \widehat{AOC} = 2\widehat{ABC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC).

$$\Rightarrow \widehat{OAC} = \frac{180^\circ - \widehat{AOC}}{2} = \frac{180^\circ - 2\widehat{ABC}}{2} = 90^\circ - \widehat{ABC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$

c) Đường thẳng PK cắt (O) tại hai điểm E và F . Chứng minh OA là tia phân giác của \widehat{EAF} .
 Kẻ tiếp tuyến Ax với (O) .

Ta có $\widehat{xAC} = \widehat{ABC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC).

Mà $\widehat{AKP} = \widehat{ABC}$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp $BPKC$)

$\Rightarrow \widehat{xAC} = \widehat{AKP}$. Hai góc này lại ở vị trí so le trong.

$\Rightarrow Ax \parallel PK$.

Ta có: $Ax \perp OA$ (do Ax là tiếp tuyến của (O) tại A) $\Rightarrow PK \perp OA$

Gọi $M = OA \cap PK$, ta có $EF \perp OA$ tại M . Suy ra M là trung điểm của EF .

Suy ra tam giác AEF có OA là đường cao đồng thời là trung tuyến

Suy ra tam giác AEF cân tại A .

Vậy đường cao AO là phân giác của góc EAF .

Câu 5 (0,5 điểm)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^3 + 12x^2y = 8(x^3 + 1) + 6xy^2 \\ xy + 2y - x^2 - x + 10 = 0 \end{cases} \quad (\text{với } x, y \in \mathbb{R}).$$

$$\begin{cases} y^3 + 12x^2y = 8(x^3 + 1) + 6xy^2 & (1) \\ xy + 2y - x^2 - x + 10 = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} y^3 + 12x^2y &= 8(x^3 + 1) + 6xy^2 \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 &= -8 \\ \Leftrightarrow (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot y + 3 \cdot 2x \cdot y^2 - y^3 &= -8 \\ \Leftrightarrow (2x - y)^3 &= -8 \\ \Leftrightarrow 2x - y &= -2 \\ \Leftrightarrow y &= 2x + 2 \end{aligned}$$

Thay vào phương trình (2) ta có

$$\begin{aligned} x(2x + 2) + 2(2x + 2) - x^2 - x + 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 4x + 4 - x^2 - x + 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 5x + 14 &= 0(*) \end{aligned}$$

$$\Delta = -31 < 0$$

Do đó pt(*) vô nghiệm.

Vậy hpt đã cho vô nghiệm.