

Phần I. Trắc nghiệm (2,0 điểm)

Hãy chọn phương án trả lời đúng và viết chữ cái đứng trước phương án đó vào bài làm.

Câu 1. Điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}$ là

- A. $-2 \leq x \leq 3$. B. $-2 \leq x < 3$. C. $-2 < x \leq 3$. D. $-3 \leq x < 2$.

Câu 2. Trong các hàm số sau hàm số nào đồng biến trên \mathbb{R} ?

- A. $y = -2x + 5$. B. $y = (1 - \sqrt{2})x + 1$. C. $y = -\frac{1}{3}x$. D. $y = \frac{4}{3}x - 6$.

Câu 3. Hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ là

- A. $(2; -1)$. B. $(-1; 0)$. C. $(-2; 1)$. D. $(-1; 2)$.

Câu 4. Một hình trụ có chiều cao $h = 5\text{cm}$, bán kính $r = 3\text{cm}$. Thể tích hình trụ đó bằng

- A. $15\pi\text{cm}^3$. B. 45cm^3 . C. $45\pi\text{cm}^3$. D. $75\pi\text{cm}^3$.

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại A , có đường cao $AH = \sqrt{3}\text{cm}$, góc $ABC = 60^\circ$. Độ dài cạnh AC là

- A. 2cm . B. 3cm . C. $2\sqrt{3}\text{cm}$. D. $3\sqrt{2}\text{cm}$.

Câu 6. Biết phương trình $2x^2 - 7x - 4 = 0$. Có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Giá trị của biểu thức $S = 2(x_1 + x_2) + x_1x_2$ bằng

- A. 10. B. 5. C. -7. D. -9.

Câu 7. Đường thẳng $y = 2x + 3$ và đường thẳng $y = (m^2 - 2)x - m + 1$ song song với nhau khi và chỉ khi:

- A. $m = -2$. B. $m = 0$. C. $m = 2$. D. $m = \pm 2$.

Câu 8. Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh $4\sqrt{3}\text{cm}$, Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng:

- A. $\sqrt{3}\text{cm}$. B. 2cm . C. 4cm . D. 6cm .

Phần II. Tự luận (8,0 điểm)

Câu 1. (1,5 điểm)

1) Chứng minh đẳng thức: $\left(2 - \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}\right) \cdot \left(2 + \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}\right) = 1$.

2) Rút gọn biểu thức: $A = \left(\frac{1}{x-2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-4\sqrt{x}+4}$ với $x > 0; x \neq 4$.

Vậy với $x > 0; x \neq 4$: $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$.

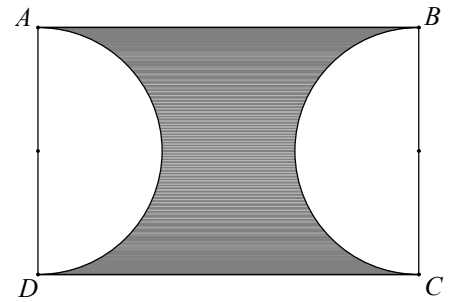
Câu 2. (1,5 điểm)

- 1) Tìm tọa độ của tất cả các điểm thuộc parabol $y = -2x^2$ có tung độ bằng -8 .
- 2) Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ (với $x_1 < x_2$) thỏa mãn: $|x_1| = 3|x_2|$.

Câu 3. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + 2 \cdot \frac{y}{x} = 3 \\ 2x^2 - 3y = -1 \end{cases}$$

Câu 4. (3,0 điểm)

1. Mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 6m$, chiều rộng $BC = 4m$. Người ta trồng hoa trên phần đất là nửa hình tròn đường kính AD và nửa đường tròn đường kính BC , phần còn lại của mảnh đất để trồng cỏ. Tính diện tích phần đất trồng cỏ (phần tô đậm trong hình vẽ bên, kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



2. Cho (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Từ A kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Kẻ đường kính BD của đường tròn (O)

a) Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn và $\widehat{BDC} = \widehat{AOC}$.

b) Kẻ CK vuông góc với BD tại K . Gọi I là giao điểm của AD và CK . Chứng minh rằng I là trung điểm của CK .

Câu 5. (1,0 điểm)

1. Giải phương trình $4x+1 - \sqrt{9(2x-1)(x+1)} + 2\sqrt{2x-1} - 2\sqrt{x+1} = 0$ (1).

2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2021}{\sqrt{ab} + \sqrt{cd} + \sqrt{ac}} - \frac{b\sqrt{a}}{1+b} - \frac{c\sqrt{b}}{1+c} - \frac{a\sqrt{c}}{1+a}$$

HẾT

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

I - Trắc nghiệm.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	A	D	A	C	C	B	C	B

II – Tự luận

Câu 1. (1,5 điểm)

3) Chứng minh đẳng thức: $\left(2 - \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}\right) \cdot \left(2 + \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}\right) = 1.$

4) Rút gọn biểu thức: $A = \left(\frac{1}{x - 2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2}\right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 4\sqrt{x} + 4}$ với $x > 0; x \neq 4.$

Lời giải.

1) Ta có: $\left(2 - \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}\right) \cdot \left(2 + \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}\right)$
 $= \left(2 - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3} + 1}\right) \cdot \left(2 + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} - 1}\right) = (2 - \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

2) Với $x > 0; x \neq 4$:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{x - 2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2}\right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 4\sqrt{x} + 4} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2}\right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 2)^2} \\ &= \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 2)^2}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Vậy với $x > 0; x \neq 4$: $A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}.$

Câu 2. (1,5 điểm)

3) Tìm tọa độ của tất cả các điểm thuộc parabol $y = -2x^2$ có tung độ bằng $-8.$

4) Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2m = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ (với $x_1 < x_2$) thỏa mãn: $|x_1| = 3|x_2|.$

Lời giải.

1) Thay $y = -8$ vào phương trình parabol: $y = -2x^2$. Ta có:

$$-2x^2 = -8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Vậy tọa độ tất cả các điểm thỏa mãn đề bài là: $(2; -8)$ và $(-2; -8).$

2) Phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0$ (1)

Phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn x có:

$$\Delta' = [-(m+1)]^2 - (m^2 + 2m) = m^2 + 2m + 1 - m^2 - 2m = 1 > 0$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi m , mà $x_1 < x_2$ nên:

$$x_1 = m + 1 - 1 = m \quad x_2 = m + 1 + 1 = m + 2$$

$$x_1; x_2 \text{ thỏa mãn: } |x_1| = 3|x_2| \Rightarrow |m| = 3|m+2|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 3(m+2) \\ m = -3(m+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 6 = m \\ m = -3m - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \text{ (tm } x_1 < x_2 \text{)} \\ m = \frac{-3}{2} \text{ (tm } x_1 < x_2 \text{)} \end{cases}$$

Vậy tất cả các giá trị của m thỏa mãn đề bài là: $m = -3$ và $m = -\frac{3}{2}$.

Câu 3. (1,0 điểm)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} \frac{x}{y} + 2 \cdot \frac{y}{x} = 3 \\ 2x^2 - 3y = -1 \end{cases}$$

Lời giải.

* **Điều kiện:** $x; y \neq 0$

$$\text{* Đặt } \frac{x}{y} = t \text{ khi đó hệ trở thành } \begin{cases} t + \frac{2}{t} = 3 & (1) \\ 2x^2 - 3y = -1 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1) ta được: } t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

* Với $t = 1 \Rightarrow \frac{x}{y} = 1 \Leftrightarrow x = y$ thế vào (2) ta được:

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy suy ra $y = 1; y = \frac{1}{2}$. Do đó hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = \left\{ (1; 1); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \right\}$

* Với $t = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2 \Leftrightarrow x = 2y$ thế vào (2) ta được:

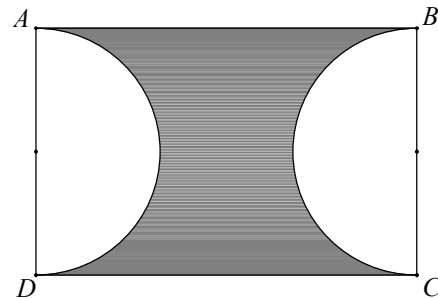
$$2(2y)^2 - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow 8y^2 - 3y + 1 = 0$$

Do $\Delta = -23 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

KL: Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = \left\{ (1; 1); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right) \right\}$

Câu 4. (3,0 điểm)

1. Mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 6m$, chiều rộng $BC = 4m$. Người ta trồng hoa trên phần đất là nửa hình tròn đường kính AD và nửa đường tròn đường kính BC , phần còn lại của mảnh đất để trồng cỏ. Tính diện tích phần đất trồng cỏ (phần tô đậm trong hình vẽ bên, kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



2. Cho (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Từ A kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Kẻ đường kính BD của đường tròn (O)

a) Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn và $\widehat{BDC} = \widehat{AOC}$.

b) Kẻ CK vuông góc với BD tại K . Gọi I là giao điểm của AD và CK . Chứng minh rằng I là trung điểm của CK .

Lời giải.

1) Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $6.4 = 24(m^2)$

Có $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AD = BC = 4m$

Bán kính đường tròn đường kính AD là $\frac{AD}{2} = \frac{4}{2} = 2(m)$

Diện tích nửa đường tròn đường kính AD là $\frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 2\pi(m^2)$

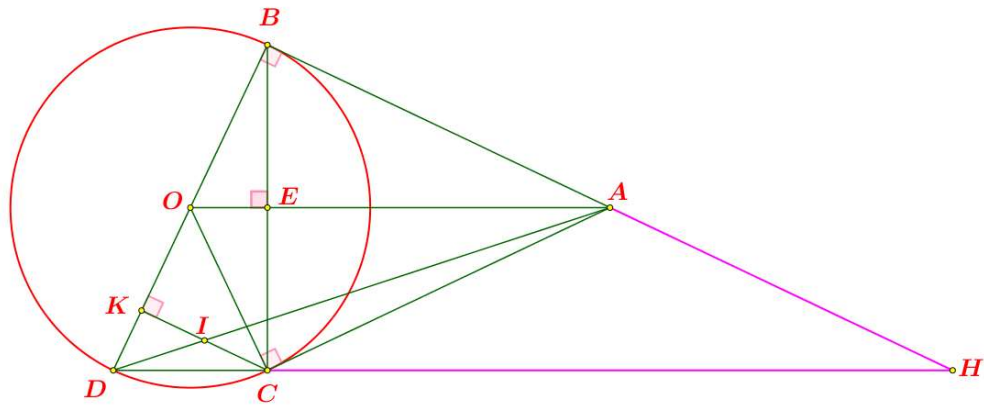
Bán kính đường tròn đường kính BC là $\frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2(m)$

Diện tích nửa đường tròn đường kính BC là $\frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 2\pi(m^2)$

Diện tích phần đất trồng cỏ là $24 - (2\pi + 2\pi) \approx 11,4(m^2)$.

2)

a) Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn và $\widehat{BDC} = \widehat{AOC}$.



Do AB, AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) (gt)

$$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp OB \\ AC \perp OC \end{cases} \text{ (Tính chất tiếp tuyến)}$$

Từ đó suy ra $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$

Xét tứ giác $ABOC$ có:

$$\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \text{ và hai góc ở vị trí đối nhau}$$

Nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn.

Ta có AB, AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) (gt)

Suy ra $AB = AC$ (Tính chất tiếp tuyến) nên A thuộc đường trung trực của BC

Lại có $OB = OC = R$ nên suy ra O cũng thuộc đường trung trực của BC

Từ đó suy ra OA là đường trung trực của BC

$$\Rightarrow OA \perp BC \quad (1)$$

Xét (O) có: BD là đường kính (gt) và $C \in (O)$

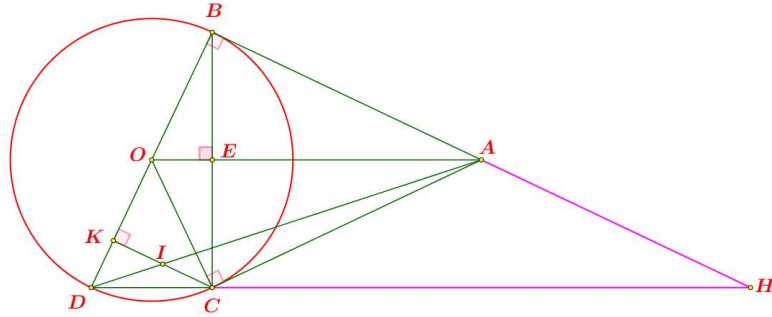
Suy ra $\widehat{DCB} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow DC \perp BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $OA \parallel CD$ (Từ vuông góc đến song song)

$$\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{AOC}$$

b) Kẻ CK vuông góc với BD tại K . Gọi I là giao điểm của AD và CK . Chứng minh rằng I là trung điểm của CK .



Kẻ $CD \cap AB$ tại H

$$\Rightarrow \widehat{HCB} = \widehat{BCD} = 90^\circ$$

Ta có $\widehat{ACH} + \widehat{ACB} = 90^\circ$ và $\widehat{AHC} + \widehat{ABC} = 90^\circ$

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (do tam giác ABC cân)

Từ đó suy ra $\widehat{ACH} = \widehat{AHC} \Rightarrow \Delta ACH$ cân

$$AH = AC$$

Mà $AB = AC$ nên suy ra $AB = AH = AC$ (3)

Vì $HB \parallel CK$ (Vì cùng vuông góc BD)

$$\frac{CI}{AH} = \frac{DI}{DA} = \frac{IK}{AB} \quad (\text{Định lí Talet}) \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $CI = IK$

Từ đó suy ra I là trung điểm của CK

Câu 5. (1,0 điểm)

1. Giải phương trình $4x+1-\sqrt{9(2x-1)(x+1)}+2\sqrt{2x-1}-2\sqrt{x+1}=0$ (1).

2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2021}{\sqrt{ab} + \sqrt{cd} + \sqrt{ac}} - \frac{b\sqrt{a}}{1+b} - \frac{c\sqrt{b}}{1+c} - \frac{a\sqrt{c}}{1+a}.$$

Lời giải.

1. Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{2x-1} \\ b = \sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 = a^2 \\ x+1 = b^2 \end{cases} \Rightarrow 4x+1 = a^2 + 2b^2.$$

Khi đó, phương trình (1) trở thành

$$\begin{aligned}
a^2 + 2b^2 - 3ab + 2a - 2b = 0 &\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 3b^2 - 3ab + 2a - 2b = 0 \\
&\Leftrightarrow (a-b)(a+b) - 3b(a-b) + 2(a-b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b-3b+2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a-2b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a=2b-2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Với $a = b$, ta có $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow 2x-1 = x+1 \Leftrightarrow x = 2$ (TM).

Với $a = 2b-2$, ta có

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x-1} = 2\sqrt{x+1} - 2 &\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} + 2 = 2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 2x-1 + 4\sqrt{2x-1} + 4 = 4(x+1) \\
&\Leftrightarrow 2x+1 = 4\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 32x - 16 \Leftrightarrow 4x^2 - 28x + 17 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7+4\sqrt{2}}{2} \text{ (TM)} \\ x = \frac{7-4\sqrt{2}}{2} \text{ (KTM)} \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{ 2; \frac{7+4\sqrt{2}}{2} \right\}$.

$$2. \text{ Ta có: } a+b+c=3 \Rightarrow \begin{cases} a+b=3-c \\ b+c=3-a \\ a+c=3-b \end{cases}$$

Vì a, b, c dương nên $a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow 3-c \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{3-c}{2}$.

Tương tự, ta có: $\sqrt{bc} \leq \frac{3-a}{2}$; $\sqrt{ac} \leq \frac{3-b}{2}$.

Suy ra $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq \frac{9-(a+b+c)}{2} = \frac{9-3}{2} = 3$.

Ta có

$$\frac{b\sqrt{a}}{1+b} \leq \frac{b\sqrt{a}}{2\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{2}; \quad \frac{c\sqrt{b}}{1+c} \leq \frac{c\sqrt{b}}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{bc}}{2}; \quad \frac{a\sqrt{c}}{1+a} \leq \frac{a\sqrt{c}}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{ac}}{2}$$

Suy ra $\frac{b\sqrt{a}}{1+b} + \frac{c\sqrt{b}}{1+c} + \frac{a\sqrt{c}}{1+a} \leq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}}{2} \leq \frac{3}{2}$.

Vậy $P \geq \frac{2021}{3} - \frac{3}{2} = \frac{4033}{6}$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$.