

**Bài I. (1,5 điểm)**

1) Rút gọn biểu thức:  $A = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} - \sqrt{3}$ .

2) Cho biểu thức  $B = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{x}{x-4}$  với  $x \geq 0$  và  $x \neq 4$ .

a) Rút gọn biểu thức B.

b) Tìm tất cả các giá trị của x để  $B < 1$ .

**Bài II. (2,5 điểm)**

1) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a)  $x^2 - 3x + 2 = 0$

b)  $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

c)  $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

**Bài III. (1,5 điểm)**

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P):  $y = 2x^2$ .

a) Vẽ đồ thị parabol (P).

b) Bằng phép tính, tìm tất cả những điểm thuộc Parabol (P) (khác gốc tọa độ O) có tung độ gấp hai lần hoành độ

**Bài IV. (1,5 điểm)**

Quãng đường AB dài 150 km. Một xe tải khởi hành đi từ A đến B, cùng lúc đó một ô tô cũng đi trên quãng đường đó từ A đến B với vận tốc lớn hơn vận tốc xe tải 5 km/h, nên ô tô đến B sớm hơn xe tải 20 phút. Tính vận tốc xe tải.

**Bài V. (3,0 điểm)**

1) Cho tam giác ABC vuông tại A có  $AB = 3\text{cm}$  và  $AC = 4\text{cm}$ . Tính độ dài cạnh BC và giá trị của  $\tan C$ .

2) Cho nửa đường tròn (O) đường kính  $AB = 2R$ . Lấy điểm C thuộc nửa đường tròn (O) sao cho  $CA < CB$ . Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng OB, đường thẳng vuông góc với AB tại H cắt dây CB và tia AC lần lượt tại D và E.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, C, D, H cùng thuộc một đường tròn

b) Gọi I là trung điểm DE. Chứng minh rằng IC là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

c) Chứng minh rằng  $AC \cdot AE = 3R^2$ .

## HƯỚNG DẪN GIẢI

### Bài I.

**1) Rút gọn biểu thức:**  $A = \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} - \sqrt{3}$

Ta có:

$$A = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} - \sqrt{3}$$

$$A = |2 + \sqrt{3}| - \sqrt{3}$$

$$A = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} \text{ (do } 2 + \sqrt{3} > 0)$$

$$A = 2.$$

**2) Cho biểu thức:**  $B = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{x}{x-4}$  với  $x \geq 0$  và  $x \neq 4$

**a) Rút gọn biểu thức B**

ĐKXĐ:  $x \geq 0, x \neq 4$ .

Ta có:

$$B = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{x}{x-4}$$

$$B = \frac{\sqrt{x-2}}{x-4} + \frac{\sqrt{x+2}}{x-4} + \frac{x}{x-4}$$

$$B = \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} + x}{x-4}$$

$$B = \frac{x + 2\sqrt{x}}{x-4}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$$

Vậy với  $x \geq 0, x \neq 4$  thì  $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$ .

**b) Tìm tất cả các giá trị của x để  $B < 1$**

Ta có:

$$\begin{aligned}
B < 1 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - 1 < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - (\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-2} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 < 0 \text{ (do } 2 > 0) \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 2^2 \Leftrightarrow x < 4
\end{aligned}$$

Kết hợp với ĐKXĐ ta có  $0 \leq x < 4$  thì  $B < 1$ .

## Bài II.

1) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a)  $x^2 - 3x + 2 = 0$

Ta có  $a + b + c = 1 - 3 + 2 = 0$  nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt  $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = 2 \end{cases}$ .

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm  $S = \{1; 2\}$ .

b)  $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $(x; y) = (2; 1)$ .

c)  $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$  (1)

Đặt  $x^2 = t$  ( $t \geq 0$ ) phương trình (1) trở thành:  $t^2 - 8t - 9 = 0$  (2).

Ta có  $a - b + c = 1 - (-8) - 9 = 0$  nên phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt:  $\begin{cases} t_1 = -1(\text{ktm}) \\ t_2 = -\frac{c}{a} = 9(\text{tm}) \end{cases}$

Với  $t = 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$ .

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm  $S = \{-3; 3\}$ .

2) Viết phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc là 2 và đi qua điểm  $M(-1; 3)$

Giả sử phương trình đường thẳng (d) là  $y = ax + b$

Vì (d) có hệ số góc là 2 nên ta có  $a = 2$ .

Vì (d) đi qua điểm  $M(-1;3)$  nên ta có:  $3 = a \cdot (-1) + b \Leftrightarrow -a + b = 3(*)$ .

Thay  $a = 2$  vào (\*) ta có  $-2 + b = 3 \Leftrightarrow b = 5$ .

Vậy đường thẳng (d) cần tìm có phương trình là  $y = 2x + 5$ .

### Bài III.

**Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P):  $y = 2x^2$ .**

**a) Vẽ đồ thị parabol (P).**

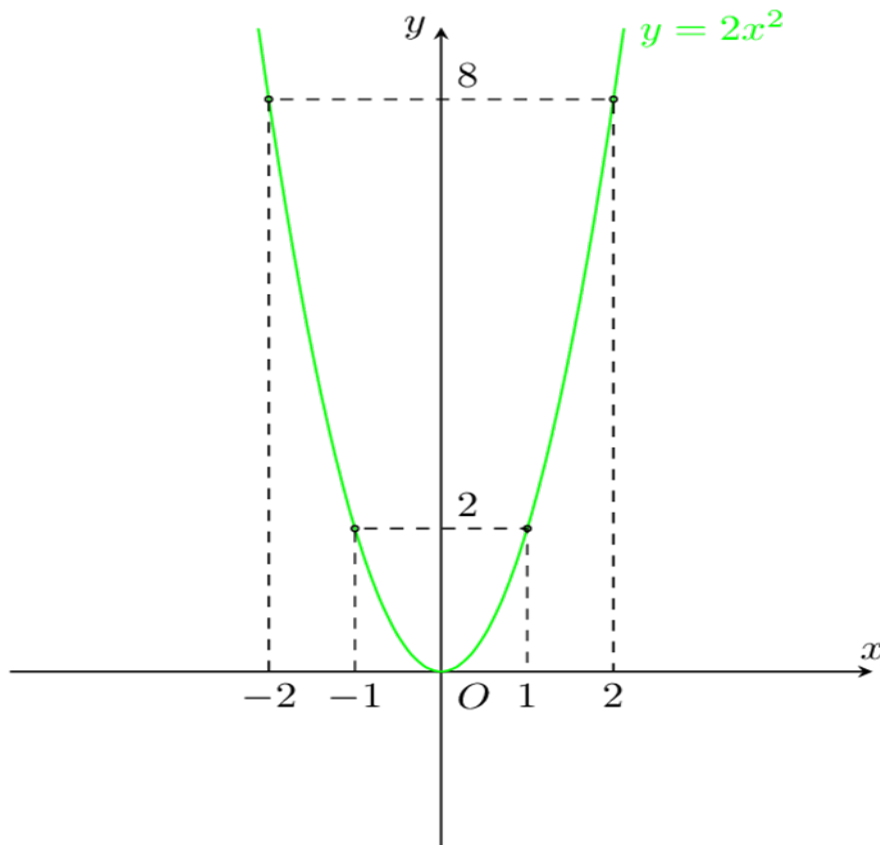
Parabol (P):  $y = 2x^2$  có bề lõm hướng lên và nhận Oy làm trục đối xứng

Ta có bảng giá trị sau:

|            |    |    |   |   |   |
|------------|----|----|---|---|---|
| x          | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $y = 2x^2$ | 8  | 2  | 0 | 2 | 8 |

$\Rightarrow$  Parabol (P):  $y = 2x^2$  đi qua các điểm  $(-2;8), (-1;2), (0;0), (1;2), (2;8)$ .

Đồ thị Parabol (P):  $y = 2x^2$



**b) Bằng phép tính, tìm tất cả những điểm thuộc Parabol (P) (khác gốc tọa độ O) có tung độ gấp hai lần hoành độ**

Goi điểm có tung độ gấp hai lần hoành độ là  $A(m;2m)(m \neq 0)$ .

Vì  $A \in (P)$  nên ta có:  $2m = 2.m^2 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow 2m(m - 1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$  (do  $m \neq 0$ ).

Vậy điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán là  $A(1;2)$

#### Bài IV:

**Quãng đường** AB dài 150 km. **Một xe tải khởi hành đi từ A đến B, cùng lúc đó một ô tô cũng đi trên quãng đường đó từ A đến B với vận tốc lớn hơn vận tốc xe tải 5 km/h, nên ô tô đến B sớm hơn xe tải 20 phút. Tính vận tốc xe tải.**

Goi vận tốc xe tải là  $x$  (km/h)( $x > 0$ )

$\Rightarrow$  Thời gian xe tải đi hết quãng đường AB là  $\frac{150}{x}$ (h)

Vận tốc của ô tô là  $x + 5$  (km/h)

$\Rightarrow$  Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB là  $\frac{150}{x+5}$ (h)

Do thời gian xe ô tô đến B sớm hơn so với xe tải là 20 phút  $= \frac{1}{3}$  h nên ta có phương trình:

$$\frac{150}{x} - \frac{150}{x+5} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 150.3 \cdot (x+5) - 150.3x = x(x+5)$$

$$\Leftrightarrow 450x + 2250 - 450x = x^2 + 5x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 2250 = 0$$

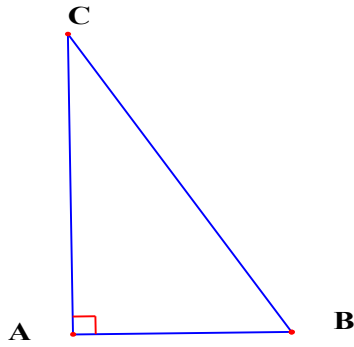
Ta có:  $\Delta = 5^2 - 4.1.(-2250) = 9025 = 95^2 > 0$  nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$\left[ \begin{array}{l} x = \frac{-5+95}{2} = 45(\text{tm}) \\ x = \frac{-5-95}{2} = -50(\text{ktm}) \end{array} \right.$$

Vậy vận tốc xe tải là 45 km / h .

#### Bài V.

**1) Cho tam giác ABC vuông tại A có  $AB = 3\text{cm}$  và  $AC = 4\text{cm}$ . Tính độ dài cạnh BC và giá trị của  $\tan C$ .**



Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông ABC vuông tại A ta có:

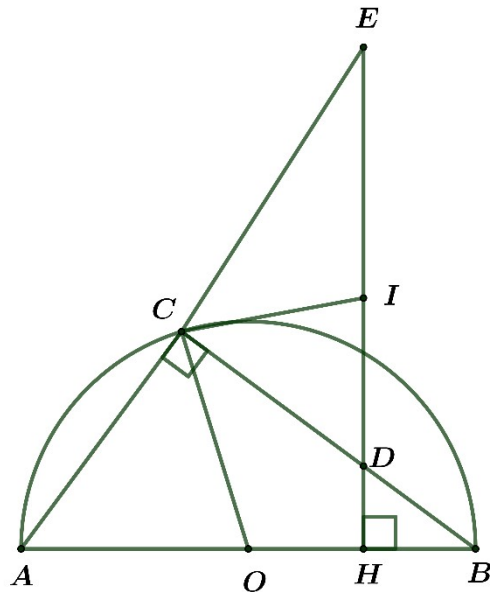
$$BC^2 = AC^2 + AB^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{25} = 5\text{cm}$$

$$\Rightarrow \tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$$

Vậy  $BC = 5\text{cm}$  và  $\tan C = \frac{3}{4}$ .

2) Cho nửa đường tròn (O) đường kính  $AB = 2R$ . Lấy điểm C thuộc nửa đường tròn (O) sao cho  $CA < CB$ . Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng OB, đường thẳng vuông góc với AB tại H cắt dây CB và tia AC lần lượt tại D và E.



a) Chứng minh rằng bốn điểm A, C, D, H cùng thuộc một đường tròn.

Ta có  $HD \perp AB$  tại H(gt) nên  $\widehat{DHA} = 90^\circ$

Mà C thuộc nửa đường tròn nên  $\widehat{ACB} = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{DHA} + \widehat{ACB} = 180^\circ \Rightarrow$  ACHD nội tiếp đường tròn đường kính AD (dnhb).

Vậy A, C, D, H cùng thuộc một đường tròn. (đpcm)

**b) Gọi I là trung điểm DE. Chứng minh rằng IC là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).**

Ta có  $\widehat{ECD} = 90^\circ$  (Bù góc  $\widehat{ACB} = 90^\circ$ ) nên  $\triangle ECD$  là tam giác vuông tại C.

DE là cạnh huyền của tam giác vuông ECD và I là trung điểm của DE nên  $IC = ID = IE = \frac{1}{2}DE$   
(trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền).

$\Rightarrow \triangle ICD$  cân tại I  $\Rightarrow \widehat{ICD} = \widehat{IDC} = \widehat{HDB}$  (đối đỉnh)

Mặt khác,  $\triangle OBC$  cân tại O ( $OB = OC$ )  $\Rightarrow \widehat{DCO} = \widehat{OBD}$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $\widehat{ICO} = \widehat{ICD} + \widehat{DCO} = \widehat{HDB} + \widehat{OBD}$

Mà  $\widehat{OBD} + \widehat{HDB} = 90^\circ$  (do tam giác HBD vuông tại H)  $\Rightarrow \widehat{ICO} = 90^\circ$  hay  $IC \perp OC$ .

Vậy IC là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

**c) Chứng minh rằng  $AC \cdot AE = 3R^2$ .**

Xét tam giác  $\triangle AHE$  và  $\triangle ACB$  ta có:

$\widehat{EAB}$  chung;

$\widehat{ACB} = \widehat{AHE} = 90^\circ$ ;

$\Rightarrow \triangle AHE \sim \triangle ACB$  (g.g)  $\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AE}{AB}$  (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow AC \cdot AE = AB \cdot AH = 2R \cdot AH$  (do  $AB = 2R$ )

Mặt khác, ta có H là trung điểm của OB(gt) nên

$HO = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}R \Rightarrow AH = AO + OH = R + \frac{1}{2}R = \frac{3}{2}R$ .

Vậy  $AC \cdot AE = 2R \cdot \frac{3}{2}R = 3R^2$  (đpcm).