

Câu 1. (2,0 điểm)

Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$.

b) $B = \left(3 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \cdot \left(3 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right)$ (với $a \geq 0, a \neq 1$).

Câu 2. (1,5 điểm)a) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = (m - 1)x + 2$ đồng biến trên \mathbb{R} .

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm)Cho phương trình $x^2 - 6x + m + 4 = 0$ (1) (với m là tham số).a) Giải phương trình (1) khi $m = 1$.b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$2020(x_1 + x_2) - 2021x_1x_2 = 2014.$$

Câu 4. (1,0 điểm)Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng:
$$\frac{a + b}{\sqrt{a(15a + b)} + \sqrt{b(15b + a)}} \geq \frac{1}{4}.$$
Câu 5. (3,5 điểm)Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB , dây cung MN vuông góc với AB tại I sao cho $AI < BI$. Trên đoạn thẳng MI lấy điểm H (H khác M và I), tia AH cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm thứ hai là K . Chứng minh rằng:a) Tứ giác $BIHK$ nội tiếp đường tròn.b) $\triangle AHM$ đồng dạng với $\triangle AHK$.c) $AH \cdot AK + BI \cdot AB = 4R^2$.

-----HẾT-----



LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. (2,0 điểm)

Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$.

b) $B = \left(3 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \cdot \left(3 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right)$ (với $a \geq 0, a \neq 1$).

Lời giải

a) $A = \sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$

$$A = \sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$$

$$A = \sqrt{2^2 \cdot 2} - \sqrt{4^2 \cdot 2} + \sqrt{5^2 \cdot 2}$$

$$A = 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$$

$$A = (2 - 4 + 5)\sqrt{2}$$

$$A = 3\sqrt{2}$$

Vậy $A = 3\sqrt{2}$.

b) $B = \left(3 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \cdot \left(3 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right)$ (với $a \geq 0, a \neq 1$).

Với $a \geq 0, a \neq 1$ ta có:

$$B = \left(3 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \cdot \left(3 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right)$$

$$B = \left(3 + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a} + 1}\right) \cdot \left(3 - \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{\sqrt{a} - 1}\right)$$

$$B = (3 + \sqrt{a}) \cdot (3 - \sqrt{a})$$

$$B = 9 - a$$

Vậy với $a \geq 0, a \neq 1$ thì $B = 9 - a$.



Câu 2. (1,5 điểm)

a) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = (m-1)x + 2$ đồng biến trên \mathbb{R} .

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$$

Lời giải

a) Để hàm số $y = (m-1)x + 2$ đồng biến trên \mathbb{R} , thì $m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Vậy hàm số $y = (m-1)x + 2$ đồng biến trên \mathbb{R} khi $m > 1$.

b) Ta có:
$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y = 6 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 3x + 2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (2; 1)$.

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 6x + m + 4 = 0$ (1) (với m là tham số).

a) Giải phương trình (1) khi $m = 1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$2020(x_1 + x_2) - 2021x_1x_2 = 2014.$$

Lời giải

a) Với $m = 1$ thì (1) trở thành $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Ta có $a + b + c = 1 - 6 + 5 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt
$$\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = 5 \end{cases}.$$

Vậy khi $m = 1$ thì tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 5\}$.

b) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - m - 4 > 0 \Leftrightarrow 5 - m > 0 \Leftrightarrow m < 5$.

Khi đó áp dụng hệ thức Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1x_2 = m + 4 \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$2020(x_1 + x_2) - 2021x_1x_2 = 2014$$

$$\Leftrightarrow 2020.6 - 2021.(m + 4) = 2014$$



$$\Leftrightarrow 12120 - 2021m - 8084 = 2014$$

$$\Leftrightarrow 2021m = 2022 \Leftrightarrow m = \frac{2022}{2021}(tm)$$

$$\text{Vậy } m = \frac{2022}{2021}.$$

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{\sqrt{a(15a+b)} + \sqrt{b(15b+a)}} \geq \frac{1}{4}$.

Lời giải

Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\sqrt{16a(15a+b)} \leq \frac{16a+15a+b}{2} = \frac{31a+b}{2}$$

$$\sqrt{16b(15b+a)} \leq \frac{16b+15b+a}{2} = \frac{31b+a}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{16a(15a+b)} + \sqrt{16b(15b+a)} \leq \frac{31a+b+31b+a}{2} = 16(a+b)$$

$$\Rightarrow \sqrt{a(15a+b)} + \sqrt{b(15b+a)} \leq 4(a+b)$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{\sqrt{a(15a+b)} + \sqrt{b(15b+a)}} \geq \frac{1}{4} \text{ (đpcm)}$$

Câu 5. (3,5 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB , dây cung MN vuông góc với AB tại I sao cho $AI < BI$. Trên đoạn thẳng MI lấy điểm H (H khác M và I), tia AH cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm thứ hai là K . Chứng minh rằng:

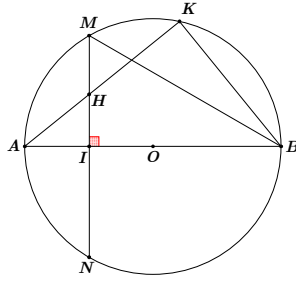
a) Tứ giác $BIHK$ nội tiếp đường tròn.

b) $\triangle AHM$ đồng dạng với $\triangle AHK$.

c) $AH \cdot AK + BI \cdot AB = 4R^2$.

Lời giải





a) Ta có $\widehat{AKB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{BKH} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $BIHK$ có: $\widehat{BIH} + \widehat{BKH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $BIHK$ là tứ giác nội tiếp (dnhb).

b) Ta có: $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$$\Rightarrow \widehat{AMH} + \widehat{BMH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AMH} + \widehat{ABM} = 90^\circ$$

Lại có $\widehat{ABM} = \widehat{AKM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AM) $\Rightarrow \widehat{AMH} = \widehat{AKM}$.

Xét $\triangle AHM$ và $\triangle AMK$ có: $\begin{cases} \widehat{MAK} \text{ chung} \\ \widehat{AMH} = \widehat{AKM} (cmt) \end{cases} \Rightarrow \triangle AHM \sim \triangle AMK (g \cdot g)$.

$$c) \text{ Vì } \triangle AHM \sim \triangle AMK (cmt) \Rightarrow \frac{AH}{AM} = \frac{AM}{AK} \text{ (2 cạnh tương ứng)} \Rightarrow AH \cdot AK = AM^2.$$

Xét tam giác vuông ABM có đường cao MI ta có: $BI \cdot BA = BM^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông).

$$\Rightarrow AH \cdot AK + BI \cdot AB = AM^2 + BM^2.$$

Mà $\triangle ABM$ vuông tại M (cmt) nên áp dụng định lí Pytago ta có $AM^2 + BM^2 = AB^2 = (2R)^2 = 4R^2$.

$$\text{Vậy } AH \cdot AK + BI \cdot AB = 4R^2 \text{ (đpcm)}$$

