

Giải chi tiết đề thi tuyển sinh vào 10 Hà Nội

Nguyễn Duy Khương - Hà Huy Khôi - Đoàn Phương Khang - Bùi Hồng Hạnh -
Nguyễn Đức Toàn - Nguyễn Khang

1 Câu I

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 16$.

2) Chứng minh $A + B = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$

Lời giải.

1) Khi $x = 16 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{16} = 4$. Do đó

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = \frac{4}{4+3} = \frac{4}{7}.$$

2) Ta có

$$\begin{aligned} A + B &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \right) - \frac{3x+9}{x-9} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{x-9} - \frac{3x+9}{x-9} \\ &= \frac{x - 3\sqrt{x} + 2x + 6\sqrt{x}}{x-9} - \frac{3x+9}{x-9} \\ &= \frac{3x + 3\sqrt{x} - (3x+9)}{x-9} \\ &= \frac{3(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{3}{\sqrt{x}+3}. \end{aligned}$$

Do đó ta có điều cần chứng minh.

Xong. □

2 Câu II

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một tổ sản xuất phải làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế trong một số ngày nhất định. Thực tế, mỗi ngày tổ đội đã làm được nhiều hơn 100 bộ đồ bảo hộ y tế so với số bộ đồ bảo hộ y tế phải làm trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế 8 ngày trước khi hết hạn, tổ sản xuất đã làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế đó. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ đội sản xuất phải làm bao nhiêu bộ đồ bảo hộ y tế? (Giả định rằng số bộ đồ bảo hộ y tế mà tổ đội đó làm xong mỗi ngày là bằng nhau.)

2) Một thùng nước có dạng hình trụ với chiều cao $1,6m$ và bán kính đáy $0,5m$. Người ta sơn toàn bộ phía ngoài mặt xung quanh của thùng nước này (trừ hai mặt đáy). Tính diện tích bề mặt được sơn của thùng nước (lấy $\pi = 3,14$).

Lời giải.

1) Giả sử theo kế hoạch, mỗi ngày tổ đội sản xuất phải làm x bộ đồ bảo hộ y tế ($0 < x < 4800$).

Vậy theo kế hoạch, tổ đội phải làm hết 4800 bộ đồ bảo hộ y tế trong $\frac{4800}{x}$ (ngày).

Thực tế, số ngày tổ đội sản xuất làm hết 4800 bộ đồ bảo hộ y tế là:

$$\frac{4800}{x} - 8.$$

Vậy thực tế, mỗi ngày tổ đội sản xuất làm được $\frac{4800}{\frac{4800}{x} - 8}$ bộ đồ bảo hộ y

tế.

Mà theo giả thiết, thực tế mỗi ngày tổ đội làm được nhiều hơn 100 bộ đồ bảo hộ y tế so với kế hoạch.

Vậy ta có phương trình sau:

$$\frac{4800}{\frac{4800}{x} - 8} = x + 100 \Leftrightarrow x = 200 \text{ (bộ đồ)}$$

Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày tổ độ sản xuất phải làm được 200 bộ đồ bảo hộ y tế.

- 2) Ta cần tính diện tích bề mặt được sơn, hay có nghĩa là tính diện tích xung quanh của hình trụ. Ta có:

$$S_{xq} = 2\pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,5 \cdot 1,6 = 5,024 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích bề mặt được sơn của thùng nước là $5,024 \text{ m}^2$.

3 Câu III

1.

$$\begin{cases} \frac{3}{x+1} - 2y = -1 \\ \frac{5}{x+1} + 3y = 11 \end{cases}$$

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = 2x + m - 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$.

Lời giải.

- 1) Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{3}{x+1} - 2y = -1 \\ \frac{5}{x+1} + 3y = 11 \end{cases}$$

Điều kiện: $x \neq -1$

Ta có, hệ phương trình đề bài tương đương:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{9}{x+1} - 6y = -3 \\ \frac{10}{x+1} + 6y = 22 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{19}{x+1} = 19 \\ \frac{10}{x+1} + 6y = 22 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{1}{x+1} = 1 \\ \frac{5}{x+1} + 3y = 11 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 1 = 1 \\ \frac{5}{x+1} + 3y = 11 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ 5 + 3y = 11 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) là $(0, 2)$.

- 2)** Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) ta có:

$$x^2 - 2x - m + 2 = 0 \quad (1)$$

Ta có:

$$\Delta' = m - 1$$

Đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , ta có:

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 1$$

Hệ thức Vi-et:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = 2 - m \end{cases}$$

Theo đề:

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= 2 \\ \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 &= 4 \quad (2) \end{aligned}$$

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có:

$$\begin{aligned} (2) \Leftrightarrow 2^2 - 4(2 - m) &= 4 \\ \Leftrightarrow 4m - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= 2 \text{ (TMĐK)} \end{aligned}$$

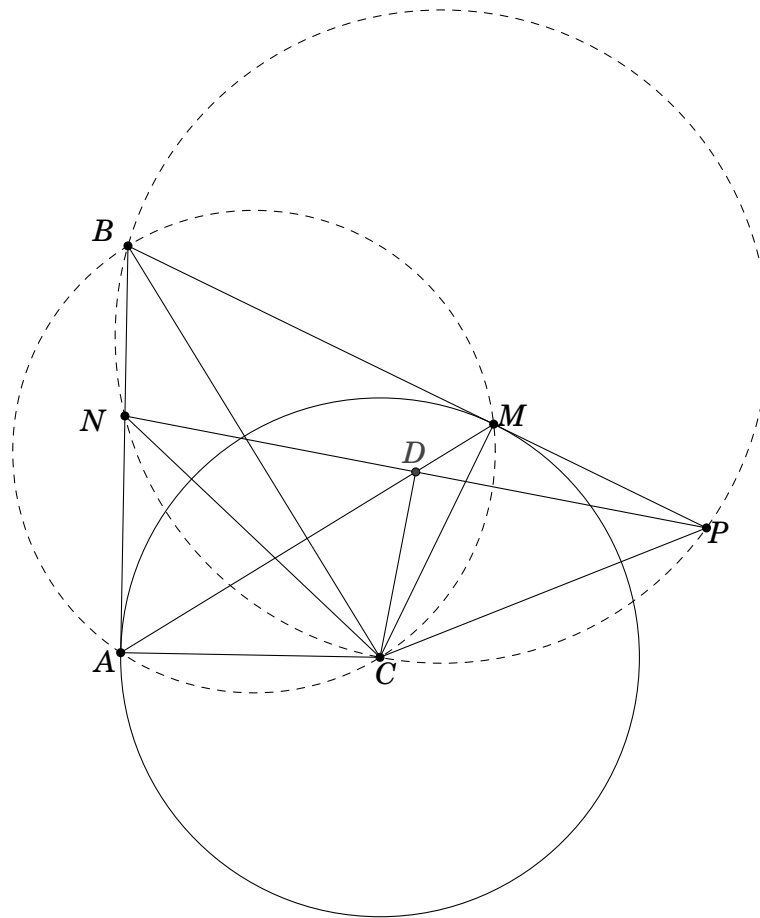
Vậy $m = 2$ thoả mãn yêu cầu đề bài.

4 Câu IV

Cho tam giác ABC vuông tại A . Từ điểm B kẻ tiếp tuyến BM với đường tròn $(C; CA)$ (M là tiếp điểm, M nằm khác phía với A đối với BC).

- 1) Chứng minh rằng 4 điểm A, C, M, B cùng nằm trên 1 đường tròn.
- 2) Lấy điểm N trên đoạn AB . Lấy điểm P trên tia đối của tia MB sao cho $MP = AN$. Chứng minh tam giác CPN cân và AM đi qua trung điểm của NP .

Lời giải.



1) Vì BM là tiếp tuyến của $(C;CA)$ nên $\angle CMB = 90^\circ$. Mà $\angle CAB = 90^\circ$ nên $\angle CMB + \angle CAB = 180^\circ \Rightarrow A, C, M, B$ cùng nằm trên 1 đường tròn.

2) Ta xét 2 $\triangle CMP$ và $\triangle CAN$ có: $CA = CB$; $AN = MP$; $\angle CAN = \angle CMP = 90^\circ$ nên $\triangle CAN = \triangle CMP$ (cgc) $\Rightarrow \angle ANC = \angle CPM \Rightarrow 4$ điểm B, N, C, P cùng nằm trên 1 đường tròn và $CN = CP \Rightarrow \triangle CPN$ cân tại C .

Gọi AM cắt NP tại D thì có: $\angle CND = \angle CBM = \angle CAM \Rightarrow 4$ điểm A, N, D, C cùng nằm trên 1 đường tròn $\Rightarrow \angle CDN = \angle CAN = 90^\circ$ hay $CD \perp NP$. Mà tam giác CPN cân nên D là trung điểm NP (đpcm)

5 Câu V

Cho 2 số thực a, b thoả mãn $a^2 + b^2 = 2$. Tìm Min của biểu thức sau:

$$P = 3(a + b) + ab$$

Lời giải.

Ta có : Đặt $a + b = x, ab = y$. Ta có: $x^2 - 2y = 2$. Suy ra: $y = \frac{x^2 - 2}{2}$.

Suy ra biểu thức đã cho trở thành:

$$H = 3x + \frac{x^2 - 2}{2} = \frac{x^2 + 6x - 2}{2}$$

Ta có: $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ do đó: $(a+b)^2 \leq 4$ hay $x \in [-2; 2]$. Ta chứng minh: $H \geq -5$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x - 2 \geq -10 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+4) \geq 0 (\text{đúng}).$$

Vậy $H \geq -5$ hay $P \geq -5$. Dấu bằng đạt tại $x = -2$ và $y = 1$ hay là: $a = b = -1$.

Kết luận. $\text{Min } P = -5$ khi $a = b = -1$.